第 29 卷第 9 期　　电 子 与 信 息 学 报　　Vol.29No.9
2007 年 9 月　　Journal of Electronics & Information Technology　　Sept. 2007

相关跳频转移函数的双随机矩阵模型及其应用

李天昀　　许漫坤　　葛临东
(郑州信息工程大学信息工程学院　郑州　450002)

摘　要：该文分别从状态空间的分解和平稳分布等角度对双随机矩阵以及双随机马氏(Markov)链的性质进行了研究，并将这些性质应用到相关跳频转移函数的分析和建模。文中证明了转移函数的双随机矩阵数学模型就状态转移过程的均匀性来说是完备的。基于对该模型的分析，提出了一种转移函数构造方法——周期分组法，通过将频率转移过程构造成一个周期性双随机马氏链，可以获得纠错性能和频率间隔性能俱佳的转移函数。

关键词：相关跳频；双随机矩阵；转移函数

中图分类号：TN914.41　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2007)09-2182-05

Doubly Stochastic Matrices Model of DFH G-Function and Its Application

Li Tian-yun　　Xu Man-kun　　Ge Lin-dong
(*University of Information Engineering*, *Zhengzhou* 450002, *China*)

Abstract: In this paper, the properties of doubly stochastic matrices and doubly stochastic Markov chains are researched from the viewpoints of the classification of states and equilibrium distributions. These properties are applicable to the analysis and modeling of differential frequency hopping G-functions. It is proved that the doubly stochastic matrix model of G-functions is complete in terms of the state transition's uniformity. Based on this mathematic model, a periodic grouping method is proposed to design G-functions by regarding the state transition as a periodic doubly stochastic Markov chain, and it can achieve good performance both in error-correcting and in frequency interval.

Key words: Differential frequency hopping; Doubly stochastic matrices; G-function

1　引言

相关跳频技术是美国在 1995 年研制短波CHESS (Correlated Hopping Enhanced Spread Spectrum)电台时首次提出的[1,2]，是一种新的高速抗干扰宽带跳频通信体制。相关跳频也叫差分跳频(Differential Frequency Hopping，DFH)，采用频率转移函数机制来控制频率跳变序列，传输的数据信息被调制到跳变频率序列的频点变化中，利用相邻跳变频率之间的变化来携带信息。每跳传输的都是未调制的单频脉冲，收端仅需检测频点、而不涉及定时和解调等问题，从而可以使跳频系统获得更高的跳速和数据传输速率，并减小对其他共享带宽用户的干扰。同时，在相关跳频传输信息的过程中因频率的跳变存在冗余而具有一定的检错和纠错能力[3]，可以重建接收机检测过程中出错的数据，实现可靠的高速数据传输。

相关跳频系统中，频率转移函数以及频率检测算法是两个关键技术。其中，频率转移函数的设计将直接影响系统的相关纠错性能、保密性能以及抗干扰性能等。目前，国内外相关文献中提出的频率转移函数设计算法有分组编码方案[4]、基于可加性模糊系统原理的方案[5]、累加求模循环取频方案[6]、数据推移取频方案[7]、基于仿射密码原理的方案[8]等。然而，目前国内外对转移函数的研究并没有对其建立起一个全面的数学模型。

相关跳频通信的频率跳变序列是一个典型的有限状态齐次马氏(Markov)链。通过对频率转移函数的设计要求和性能的分析，以及对双随机马氏链的性质研究，本文建立了一个基于双随机矩阵的频率转移函数数学模型，并证明了该模型表示转移函数时的完备性。该数学模型的建立，有利于对相关跳频转移函数的性能及设计进行进一步研究。在该模型基础上，通过对转移函数的设计准则及其相关纠错性能、频率间隔性能的分析，文中还提出了一种转移函数设计方法——周期分组法，通过将频率转移过程构造成一个周期性双随机马氏链，可以获得纠错性能和频率间隔性能俱佳的转移函数。

2　双随机矩阵性质研究

如果 N 维方阵 $\boldsymbol{A}$ 中所有元素皆为正数或零、且任一行元素的和皆为 1，则称 $\boldsymbol{A}$ 为随机矩阵。如果 $\boldsymbol{A}$ 同时还满足任一列元素的和皆为 1，即 $\boldsymbol{A}$ 的转置也为随机矩阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为双随机矩阵。

马氏链的转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$ 必然是随机矩阵，而双随机矩阵可以表征一类特殊的马氏链的转移特性，定义这一类马氏

2006-03-06 收到，2006-09-07 改回

链为双随机马氏链。下面的定理分别从状态空间的分解、极限分布和平稳分布等角度分析了双随机马氏链的性质，从而导出频率转移函数的数学模型。

定理 1 不包含孤立闭集的双随机矩阵必为既约矩阵。

证明 孤立闭集 $\boldsymbol{L}$ 是指 $\boldsymbol{L}$ 外的任何状态和 $\boldsymbol{L}$ 中的任何状态之间都互不可达，包含孤立闭集的马氏链实际可分为两条或两条以上完全独立的马氏链。设双随机矩阵为 $\boldsymbol{A}$，以 $\boldsymbol{A}$ 为转移概率矩阵的马氏链的状态空间为 $I=\{1,2,\cdots\}$，状态空间 $\boldsymbol{I}$ 中不包含孤立闭集。

反证法。设双随机矩阵$\boldsymbol{A}$可约，则状态空间$\boldsymbol{I}$可唯一地分解为 $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{D}\cup\boldsymbol{C}_1\cup\boldsymbol{C}_2\cup\cdots$，其中$\boldsymbol{D}$为非常返类，$\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2,\cdots$ 为常返类$\boldsymbol{C}$依据状态间的互通关系分解而成的不可约闭集，$\boldsymbol{D},\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2,\cdots$ 互不相交[9]。从而可按$\boldsymbol{D},\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2,\cdots$ 的顺序将$\boldsymbol{I}$中各状态的编号作适当调整，使转移概率矩阵$\boldsymbol{A}$变换成如下表示形式：

$$\boldsymbol{P}=\begin{array}{c}\\ \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{C}_1\\ \boldsymbol{C}_2\\ \vdots\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{C}_3 & \cdots\end{array}\\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{S}_1 & \boldsymbol{S}_2 & \boldsymbol{S}_3 & \cdots\\ 0 & \boldsymbol{P}_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{P}_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \end{bmatrix}\end{array} \tag{1}$$

设$\boldsymbol{C}_1$中状态数为k，考察不可约闭集$\boldsymbol{C}_1$对应的$k\cdot k$的转移概率矩阵$\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_1$中各行的和为 1，因此$\boldsymbol{P}_1$中所有元素的和 $\sum\limits_{i,j=1}^{k}\boldsymbol{P}_1(i,j)=k$。因为$\boldsymbol{C}_1$不为孤立闭集，所以$\boldsymbol{S}_1$中不全为 0。因此$\boldsymbol{P}$中$\boldsymbol{P}_1$所处的$k$列的和大于$k$，这与$\boldsymbol{A}$为双随机矩阵矛盾。考察$\boldsymbol{P}$中各子集后可知，不包含孤立闭集的双随机矩阵必为既约矩阵。 证毕

可见，不包含孤立闭集的双随机马氏链是不可约的。因为包含孤立闭集的马氏链可分为两条或两条以上完全独立的马氏链，以下假设所提到的马氏链均不含孤立闭集。可知，双随机马氏链中的状态都是互通的，所有状态都具有相同的周期。如果还满足状态数有限，则该马氏链也是正常返的。

定理 2 周期为d的双随机马氏链，其状态空间$\boldsymbol{I}$可唯一地分解为d个互不相交的子集$\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\cdots,\boldsymbol{G}_d$，使得自 $\boldsymbol{G}_i$ 中的任一状态出发经一步转移必进入 $\boldsymbol{G}_{i+1}$ 中(i=1,2,$\cdots$,d，$\boldsymbol{G}_{d+1}\doteq\boldsymbol{G}_1$)，且各子集 $\boldsymbol{G}_i$,(i=1,2,$\cdots$,d)中的状态数相同。

证明 由定理 1，该马氏链是不可约的，因此存在唯一的分解 $\boldsymbol{I}=\bigcup\limits_{i=1}^{d}\boldsymbol{G}_i$，使得自$\boldsymbol{G}_i$出发经一步转移必进入$\boldsymbol{G}_{i+1}$中[9]。

下面证各子集中的状态数相同。按$\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\cdots,\boldsymbol{G}_d$的顺序将$\boldsymbol{I}$中各状态的编号作适当调整，使转移概率矩阵$\boldsymbol{P}$变换成如下表示形式：

$$\boldsymbol{P}=\begin{array}{c}\\ \boldsymbol{G}_1\\ \boldsymbol{G}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{G}_{d-1}\\ \boldsymbol{G}_d\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}\boldsymbol{G}_1 & \boldsymbol{G}_2 & \boldsymbol{G}_3 & \cdots & \boldsymbol{G}_d\end{array}\\ \begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{P}_{12} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{P}_{23} & \cdots & 0\\ & \cdots & & \ddots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{P}_{(d-1)d}\\ \boldsymbol{P}_{d1} & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\end{array} \tag{2}$$

设$\boldsymbol{G}_i$中状态数为k_i，$\boldsymbol{G}_{i+1}$中状态数为k_{i+1}($k_{d+1}\doteq k_1$)，则$\boldsymbol{P}_{i(i+1)}$为$k_i\cdot k_{i+1}$维矩阵，且各行、各列元素的和皆为 1。因此，k_i=k_{i+1}，$\boldsymbol{P}_{i(i+1)}$为双随机矩阵。 证毕

由定理 2，对有限状态双随机马氏链，状态数 N 是周期 d 的整数倍。

定理 3 周期为d的有限状态马氏链，状态空间为$\boldsymbol{I}$=$\{1,2,\cdots,N\}$，如果其转移概率矩阵$\boldsymbol{P}$=$(p_{ij})_{N\cdot N}$为双随机矩阵，则对任意i,j∈$\boldsymbol{I}$，有

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(nd+m)}=\begin{cases}d/N, & i\in\boldsymbol{G}_s, j\in\boldsymbol{G}_{s+m},\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{3}$$
$$(s=1,2,\cdots,d;m=0,1,\cdots,d-1)$$

其中 $\boldsymbol{I}=\bigcup\limits_{i=1}^{d}\boldsymbol{G}_i$ 由定理 2 给出($\boldsymbol{G}_{d+k}\doteq\boldsymbol{G}_k,k=1,2,\cdots,d-1$)。

特别地，如马氏链为非周期的，d=1，则对任意 i,j∈$\boldsymbol{I}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=1/N$。

证明 由定理 1，该马氏链是不可约和正常返的。

先证 d=1 时的结论。此时对任意 $i,j\in\boldsymbol{I}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=1/\mu_j$，其中 μ_j 为状态j的平均返回时间[9]。易知，双随机矩阵的乘方亦为双随机矩阵，从而 $\boldsymbol{P}^{(\infty)}=\begin{bmatrix}1/\mu_1 & 1/\mu_2 & \cdots & 1/\mu_N\\ 1/\mu_1 & 1/\mu_2 & \cdots & 1/\mu_N\\ & \cdots & \cdots & \end{bmatrix}$仍然是双随机矩阵。因此，$\mu_j=N$，$\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=1/\mu_j=1/N$。得证。

对于d>1 的情形，设M=N/d，由定理 2，M为整数，各子集$\boldsymbol{G}_i$,(i=1,2,$\cdots$,d)中的状态数皆为M。将转移概率矩阵$\boldsymbol{P}$按子集$\boldsymbol{G}_i$划分出d个子阵$\boldsymbol{P}_{12},\boldsymbol{P}_{23},\cdots$，$P_{(d-1)d}$，$\boldsymbol{P}_{d1}$，这$d$个子阵$\boldsymbol{P}_{ij}$皆为$M$阶方阵，表示从子集$\boldsymbol{G}_i$转移到$\boldsymbol{G}_j$的转移矩阵，为双随机矩阵。$\boldsymbol{P}$中$\boldsymbol{P}_{ij}$以外的元素皆为 0。调整马氏链中各状态的编号，使调整后的转移概率矩阵$\boldsymbol{Q}$具有式(2)所示的矩阵形式：

$$\boldsymbol{Q}=\begin{array}{c}\\ \boldsymbol{G}_1\\ \boldsymbol{G}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{G}_{d-1}\\ \boldsymbol{G}_d\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}\boldsymbol{G}_1 & \boldsymbol{G}_2 & \boldsymbol{G}_3 & \cdots & \boldsymbol{G}_d\end{array}\\ \begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{P}_{12} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{P}_{23} & \cdots & 0\\ & \cdots & & \ddots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{P}_{(d-1)d}\\ \boldsymbol{P}_{d1} & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

。调整过程即为$\boldsymbol{Q}$=$\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_2$，其中$\boldsymbol{E}_1$为行对调多次的初等方阵，$\boldsymbol{E}_2$为列作同样对调的初等方阵，$\boldsymbol{E}_1$= $\boldsymbol{E}_2$且$\boldsymbol{E}_1$ $\boldsymbol{E}_2$= $\boldsymbol{E}$。因此，$\boldsymbol{Q}^n$=$\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{P}^n\boldsymbol{E}_2$，即$\boldsymbol{P}^n$可由$\boldsymbol{Q}^n$作同样的状态编号调整得到。由

矩阵分块乘法和初等方阵理论，$\boldsymbol{Q}^n$中也是含有d个M阶双随机矩阵，而其余元素为0。

在$d>1$, $m=0$时[9]，有 $\lim\limits_{n\to\infty} q_{ij}^{(nd)} = \begin{cases} d/\mu_j, & i,j \in \boldsymbol{G}_s \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。因此，$\dfrac{d}{\mu_j}\cdot M = 1$，从而 $\mu_j = N$ 。得证。

在$d>1$, $m\neq 0$时，由$d>1$, $m=0$时结论以及矩阵分块乘法和初等方阵理论，结论显然成立。 证毕

定理2和定理3表明，周期为d的有限状态双随机马氏链，其转移路径必为$\boldsymbol{G}_1\to\boldsymbol{G}_2\to\cdots\to\boldsymbol{G}_d$的循环；其极限转移概率矩阵$\boldsymbol{P}_m^{(\infty)}$如式(3)所示，且分别对应$m$=0,1,⋯,$d$-1而有$d$种形式。

定理4 有限状态马氏链，状态空间为$\boldsymbol{I}=\{1,2,\cdots,N\}$，如果对任意$i,j\in\boldsymbol{I}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 1/N$ ，则其转移概率矩阵$\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{N\cdot N}$为非周期的双随机矩阵。

证明 本定理实际上就是定理3在非周期情况下的逆定理。

用反证法来证明。设$\boldsymbol{P}$不是双随机矩阵，则必存在至少两列的列和不为1。设$\boldsymbol{P}$中第m列中元素的和为c且$c\neq 1$，则在$\boldsymbol{P}^{(\infty+1)} = \boldsymbol{P}^{(\infty)}\boldsymbol{P}$中，$p_{im}^{(\infty+1)} = c/N \neq 1/N$，与$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 1/N$矛盾。从而$\boldsymbol{P}$中每列元素的和皆应为1，是双随机矩阵。

又由定理3的逆否命题可得，如果$\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{P}^{(n)}$中不含0元素，则周期必为$d$=1，因此该马氏链是非周期的。 证毕

3 转移函数建模分析

3.1 转移函数定义

相关跳频频率转移函数定义为

$$F_n = G(F_{n-1}, X_n) \tag{4}$$

式中X_n为当前数据符号，F_{n-1}为前一跳的频率值，F_n为当前跳变频率。当前跳变频率由上一跳的跳变频率以及当前传输的数据共同决定，所以这是一个典型的有限状态马氏链，且对于离散无记忆信源来说是齐次马氏链。设每跳数据符号X_n携带的信息为Bh比特，则X_n取值范围为$\{0,1,\cdots,2^{\mathrm{Bh}}-1\}$，而$f=2^{\mathrm{Bh}}$表示$F_{n-1}$确定时$F_n$可能的取值数。再设跳变频率集为$\boldsymbol{S}=\{f_1, f_2,\cdots,f_N\}$，$F_{n-1}$和$F_n$从中取值，其中$N$表示跳变频率数。通常$N$取2的整数幂，且$N>2^{\mathrm{Bh}}$，如CHESS系统中$N$取64或256，Bh取1~4。

相关跳频编码过程中，原始二进制数据先按Bh比特分组为数据符号。从一个随机的频点开始，由当前传输的数据分组来决定转移到哪个频点，并将该频点对应的跳变频率发射出去。接收端检测到跳变频率序列后，可以根据式(4)的逆函数来进行译码：

$$X_n = G^{-1}(F_n, F_{n-1}) \tag{5}$$

频率转移函数的直观表示有频率转移矩阵、树图、状态图等。频率转移矩阵$\boldsymbol{T}$是一个$N\cdot 2^{\mathrm{Bh}}$的矩阵，元素$\boldsymbol{T}(i,j)$表示从频率编号为i, i=1,2,⋯,N的频点出发，当输入信息为j, j=0,1,⋯,$2^{\mathrm{Bh}}-1$时，将转移到编号为$\boldsymbol{T}(i,j)$的频率。

3.2 转移函数数学模型

相关跳频的频率序列转移过程可以看成是一个典型的有限状态齐次马氏链。由频率转移函数以及待传输数据符号的统计概率可知其一步转移概率矩阵。例如在N=4, Bh=1的简单情况下，假设传输信息“0”对应概率为p_0，传输信息“1”对应概率为p_1，其频率转移矩阵$\boldsymbol{T}$，对应的转移概率矩阵$\boldsymbol{P}$如式(6)所示。

$$\boldsymbol{T}=\begin{array}{c}\\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cc}0 & 1\end{array}\\ \begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\\ 1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}\end{array} \qquad \boldsymbol{P}=\begin{array}{c}\\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1 & 2 & 3 & 4\end{array}\\ \begin{bmatrix}0 & p_1 & 0 & p_0\\ p_1 & 0 & p_0 & 0\\ p_0 & 0 & 0 & p_1\\ 0 & p_0 & p_1 & 0\end{bmatrix}\end{array} \tag{6}$$

跳变频率序列应该具有均匀性，即对于跳变频率序列对应的马氏链，从任意的初始分布出发，经足够多步的状态转移后，其平稳分布为均匀向量。

推论 跳变频率序列具有均匀性当且仅当其对应的马氏链是非周期的双随机马氏链。

证明 设该马氏链的状态空间为$\boldsymbol{I}=\{1,2,\cdots,N\}$，转移概率矩阵为$\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{N\cdot N}$，初始概率向量为$(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_N)$，$n$时刻的绝对概率向量为$(\boldsymbol{p}_1(n), \boldsymbol{p}_2(n),\cdots, \boldsymbol{p}_N(n))$。

先证充分性：由定理3，对任意$i,j\in\boldsymbol{I}$，有$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 1/N$。因此对任意$j\in\boldsymbol{I}$，其极限分布$\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{p}_j(n) = \lim\limits_{n\to\infty}\cdot\sum\limits_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_i p_{ij}^{(n)} = 1/N$，满足均匀性。得证。

再证必要性：由均匀性定义，对任意初始分布，其绝对分布满足$\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{p}_j(n) = 1/N$。而$\boldsymbol{p}_j(n) = \sum\limits_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_i p_{ij}^{(n)}$，取特定初始概率向量$(1,0,\cdots,0)$，则$\lim\limits_{n\to\infty} p_{1j}^{(n)} = 1/N$。同理可得，对任意$i,j\in\boldsymbol{I}$，有$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 1/N$。由定理4，转移概率矩阵$\boldsymbol{P}$为非周期的双随机矩阵。 证毕

对于跳变频率序列对应双随机马氏链且具有周期d的情况，由定理2和定理3，从任意的初始分布出发，经足够多步的状态转移后，在每个周期$\boldsymbol{G}_1\to\boldsymbol{G}_2\to\cdots\to\boldsymbol{G}_d\to\boldsymbol{G}_1$内的绝对分布为均匀向量。从而总体来看，跳变频率序列也具有均匀性。

综上所述，转移函数的数学模型是一个每行和每列都只有2^{Bh}个元素非零的双随机矩阵，该双随机矩阵即为跳变频率序列所对应马氏链的转移概率矩阵，通过这个模型来表述转移函数就状态转移过程的概率意义和均匀性来说是完备的。

双随机矩阵模型对应到转移函数的频率转移矩阵表示中，要求频率转移矩阵$\boldsymbol{T}$中每个频点出现的次数应该相同，皆为2^{Bh}。如果要传输的数据符号的统计特性不具有均匀分布特性，那么频率转移矩阵$\boldsymbol{T}$中的每列还必须是所有状态的

一个全排列，以保证其对应转移概率矩阵的双随机性。

在转移函数的构造过程中，可以将转移函数的双随机矩阵数学模型简化为待传输数据符号具有均匀统计特性条件下的情形，此时转移概率矩阵$\boldsymbol{P}$是一个每行和每列中有 2^{Bh}个元素为 $1/2^{\mathrm{Bh}}$而其它元素为 0 的N维双随机矩阵。在$\boldsymbol{P}$按简化模型构造好之后，再由$\boldsymbol{P}$来确定频率转移矩阵$\boldsymbol{T}$，其中$\boldsymbol{T}$中的每列为所有状态的一个全排列。对一个确定的简化模型转移概率矩阵$\boldsymbol{P}$，其对应的频率转移矩阵$\boldsymbol{T}$不止一个。

3.3　基于周期马氏链构造转移函数——周期分组法

相关跳频通信中由转移函数决定的性能主要包括相关纠错性能、频率间隔性能等。相关纠错指根据频率转移路径的唯一性来纠正频率跳变序列检测中的错误检测结果，转移路径间的最小距离达到最大值$s=\left\lfloor\dfrac{\log_2 N}{\mathrm{Bh}}\right\rfloor$时，可以达到最大纠错性能，纠连续的$s-1$个错[3]。频率间隔性能[10]则指相邻跳频时隙发射的跳变频率之间的频率间隔和从任意频点出发的所有下转分支频率间的间隔。在转移函数设计及分析中，频率编号大小与频率值大小一致时，一般用频率编号的差值来表示频率间隔。

周期分组法是一种从频率间隔性能出发并同时考虑最佳相关纠错性能的转移函数设计方法，将频率转移过程构造成一个周期为d($d\geqslant 2$ 且整除N)的马氏链。其状态空间$\boldsymbol{I}=\{1,2,\cdots,N\}$按定理 3 所述分为$d$组$\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\cdots,\boldsymbol{G}_d$，每组$N/d$个状态。假如需要纠连续的$n$个错，则应满足

$$N/d\geqslant(2^{\mathrm{Bh}})^{n+1} \tag{7}$$

这样才有可能使从$\boldsymbol{G}_i$,(i=1,2,$\cdots$,d)中的任一状态出发，第n+1 步转移到达属于$\boldsymbol{G}_{i+n+1}$($G_{d+k}\triangleq G_k$)的$(2^{\mathrm{Bh}})^{n+1}$个状态时这些状态不重复，满足路径唯一。在$d\geqslant 2$ 且整除N的前提下，n值取满足式(7)要求的最大整数，n值确定后d值也取满足条件的最大整数。

在$\log_2 N/\mathrm{Bh}$为整数的情况下，$s=\log_2 N/\mathrm{Bh}$，取$n=s-2$，即比最大可能的相关纠错性能少纠一个错，此时周期取$d=2^{\mathrm{Bh}}$。

在$\log_2 N/\mathrm{Bh}$不为整数的情况下，$s=\left\lfloor\log_2 N/\mathrm{Bh}\right\rfloor$。此时，如果$N/2\geqslant(2^{\mathrm{Bh}})^s$，则取$n=s-1$，即达到最大可能的相关纠错性能，周期$d$取满足$N/d\geqslant(2^{\mathrm{Bh}})^s$的最大整数。如果不能满足上述条件并取到整数$d$，则取$n=s-2$，周期$d$取满足$N/\mathrm{d}\geq(2\mathrm{Bh})^{s-1}$的最大整数。

因为从$\boldsymbol{G}_i$中的任意状态出发必将转移到$\boldsymbol{G}_{i+1}$，因此不会出现一步内转移到自身的状态。而且，如果在将状态空间$\boldsymbol{I}$分组时充分考虑组内元素的频率间隔特性和相邻组的频率间隔特性，将可以使设计出的转移函数具有比较好的频率间隔性能。例如N=64, Bh=2 的情形，取d=4，可以分组为$\boldsymbol{G}_1$={1,5,9,⋯,61}，$\boldsymbol{G}_2$={3,7,11,⋯,63}，$\boldsymbol{G}_3$={2,6,10,⋯,62}，$\boldsymbol{G}_4$={4,8,12,⋯,64}，则使得从任意频点出发的所有一步下转分支频率间的间隔至少为 4，并且相邻频点间频率间隔较大。

相邻组之间的转移映射关系设计采用分组编码[4]的方法，以使从任意频点出发的频率转移中直至第n+1 步转移的所有状态都满足路径唯一。仍然以上述N=64, Bh=2, d=4 的情形进行说明。首先对每个$\boldsymbol{G}_i$,(i=1,2,3,4)，将其中的 16 个频点随机分为 4 个小组$\boldsymbol{G}_{ij}$,(j=1,2,3,4)，每个小组含 4 个频点，如表 1 所示。任意小组$\boldsymbol{G}_{ij}$中的 4 个频点，分别随机对应到$\boldsymbol{G}_{i+1}$中的 4 个小组，以第 1 组中的 4 个小组为例，如表 2 第 1 行所示。此时转移函数对应的双随机矩阵模型已确定。再从$\boldsymbol{G}_{ij}$中的任一频点出发，按传输信息“00”,“01”,“10”,“11”分别随机转移到该频点对应的小组中的 4 个频点，如表 2 第 2 行所示。此时从所有频点出发的转移关系已确定，转移函数也就确定。

表 1　周期分组法频率分组表

i	j 第(1)小组	第(2)小组	第(3)小组	第(4)小组
第 1 组	1　5　9　13	17　21　25　29	33　37　41　45	49　53　57　61
第 2 组	3　7　11　15	19　23　27　31	35　39　43　47	51　55　59　63
第 3 组	2　6　10　14	18　22　26　30	34　38　42　46	50　54　58　62
第 4 组	4　8　12　16	20　24　28　32	36　40　44　48	52　56　60　64

表 2　周期分组法频率转移过程示意

	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61
频率→小组	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	2(1)	2(2)	2(3)	2(4)	2(3)	2(1)	2(4)	2(2)	2(4)	2(2)	2(1)	2(3)	2(1)	2(4)	2(3)	2(2)
频率→频率	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
“00”:	3	19	35	51	47	11	59	31	55	23	15	43	7	63	39	27
“01”:	7	23	39	55	35	3	51	27	63	19	11	47	15	59	43	31
“10”:	11	27	43	59	39	15	63	19	51	31	7	35	3	55	47	23
“11”:	15	31	47	63	43	7	55	23	59	27	3	39	11	51	35	19

采用由周期分组法构造的转移函数时，因为跳变频率序列必然满足$\boldsymbol{G}_i \rightarrow \boldsymbol{G}_{i+1}$的转移关系，因此在相关跳频信号接收的频率检测过程中可以提供一定的检错能力，从而可以将检错与相关纠错结合起来进行对频率检测结果的有效纠正。

4 结束语

频率转移函数是相关跳频通信系统中的关键技术，将直接影响相关跳频通信的性能。本文着重分析了频率转移函数的数学模型和设计问题。

首先从状态空间的分解、极限分布和平稳分布等角度深入分析了双随机矩阵以及双随机马氏链的性质。在此基础上，建立了转移函数的双随机矩阵数学模型，可以证明，用这种模型表示转移函数时是完备的。

基于双随机矩阵的转移函数数学模型的建立有助于转移函数的设计和性能分析。基于该数学模型，通过对转移函数的设计准则及其相关纠错性能、频率间隔性能的分析，提出了采用周期分组法来设计频率转移函数。周期分组法以马氏链的状态空间分解理论为基础，所设计的转移函数通过将频率转移过程构造成一个周期性的马氏链，兼顾了转移函数的相关纠错性能和频率间隔性能，可以设计出性能较好的频率转移函数。

参 考 文 献

[1] Herrick D L and Lee P K. CHESS: A new reliable high speed HF radio [J]. Proc. MILCOM'96, Washington, DC, 1996: 684-690.

[2] Herrick D L, Lee P K, and Ledlow L L. Correlated frequency hopping: An improved approach to HF spread spectrum communications [J]. Proc. Tactical Communications Conference, Washington, DC, 1996: 319-324.

[3] 李天昀, 葛临东. 相关跳频序列的 Viterbi 译码算法及其纠错性能分析[J]. 电子与信息学报, 2005, 27(8): 1282-1286.
Li Tian-yun and Ge Lin-dong. Viterbi algorithm for DFH sequence and analysis of its error-correcting performance [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2005, 27(8): 1282-1286.

[4] 李明, 戚仁华, 朱红琛. 短波宽带快速跳频通信技术研究[J]. 通信技术, 2000, (3): 34-37.
Li Ming, Qi Ren-hua, and Zhu Hong-chen. The study of HF frequency hopping communication technology [J]. *Communications Technology*, China, 2000, (3): 34-37.

[5] 刘忠英, 万谦, 姚富强. 基于可加性模糊系统原理的差分跳频 G 函数算法[J]. 电子学报, 2002, 30(5): 647-650.
Liu Zhong-ying, Wan Qian, and Yao Fu-qiang. DFH G function algorithm based on additivity fuzzy system principle [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2002, 30(5): 647-650.

[6] 杨裕亮, 何遵文, 匡镜明. 差分跳频系统的转移函数研究[J]. 通信学报, 2002, 23(4): 103-108.
Yang Yu-liang, He Zun-wen, and Kuang Jing-ming. Research on the transition function of differential frequency hopping [J]. *Journal of China Institute of Communications*, 2002, 23(4): 103-108.

[7] 潘武, 周世东, 姚彦. 差分跳频通信系统性能分析[J]. 电子学报, 1999, 27(11A): 102-104.
Pan Wu, Zhou Shi-dong, and Yao Yan. Performance analysis of differential frequency hopping communication system [J]. *Acta Electronica Sinica*, 1999, 27(11A): 102-104.

[8] 易大进, 杨千里. 基于仿射密码原理的差分跳频频率转移函数研究[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2005, 6(3): 50-52.
Yi Da-jin and Yang Qian-li. Study of DFH frequency transition function based on the principle of affine cipher [J]. *Journal of Air Force Engineering University* (Natural Science Edition), 2005, 6(3): 50-52.

[9] 王梓坤. 随机过程通论[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1996: 39-67.
Wang Zik-un. Theories of Stochastic Process [M]. Beijing: Beijing Normal University Press, 1996: 39-67.

[10] 梅文华, 杨义先. 跳频通信地址编码理论[M]. 北京: 国防工业出版社, 1996: 27-29.
Mei Wen-hua and Yang Yi-xian. Access Coding Theories of Frequency Hopping Communication [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1996: 27-29.

李天昀： 男，1979 年生，博士生，研究方向为通信信号处理.
许漫坤： 女，1977 年生，博士生，研究方向为信息处理.
葛临东： 男，1946 年生，教授，博士生导师，主要研究方向为通信信号处理和软件无线电.