2000,15(1):107～112

关于 Sigma-Pi 神经网络中的逼近问题

罗跃虎 沈世镒

（南京理工大学应用数学系,210094） （南开大学数学系,天津 300071）

摘　要　研究 **R** 上不连续函数可作为 Sigma-Pi 神经网络激励函数的条件. 给出了 **R** 上局部黎曼可积函数可作为 Sigma-Pi 神经网络激励函数的特征条件. 本文的结果表明:局部黎曼可积函数作为 Sigma-Pi 神经网络激励函数的特征条件与连续函数时的情形是一致的.

关键词　神经网络,Sigma-Pi 函数,连续逼近.

分类号　（中图）O174；(1991MR)92B20,41A.

神经网络的逼近能力的问题是神经网络系统理论研究的重要问题,它在信号分析、模式识别等许多方面有着重要应用. 已有不少作者作过研究,参见文[1～14]和那里的引文. 本文要研究的所谓 Sigma-Pi 神经网络的能力问题,从数学上来讲它可归结函数被一个激励函数的逼近问题,即形如

$$\sum_{k=1}^{m} c_k g\Big(y_k \prod_{j=1}^{n}(x_j-\theta_j)\Big) \tag{1}$$

的函数全体的稠密性问题,其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in K$ 为自变量,$K\subset\mathbf{R}^n$ 为一紧集,$y_k,c_k,\theta_j\in\mathbf{R}^1$ 为常量,$k=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$.

Lenze 首先在[4]中证明了 **R** 上连续的 Sigmoidal 函数(**R** 上的函数 $g(t)$ 称为 Sigmoidal 函数,如果 $\lim\limits_{t\to-\infty}g(t)=0,\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=1$)可作为 Sigma-Pi 神经网络的激发函数,即所有形如(1)的函数在每个空间 $C(K)$ 中稠密,其中 K 为 **R** 中的紧集,[13]证明了,当存在严格单增的自然数列 $\{p_k\}_1^\infty$ 使得 $g^{(p_k)}(0)\neq 0,k=1,2,\cdots$,并且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{p_k}=\infty$ 时,这个结论仍然成立. 然而,上述这些结果并未给出 $g(t)$ 可作为 Sigma-Pi 神经网络激励函数的特征. 不久,文[9,10]给出了连续函数 $g(t)$ 可作为 Sigma-Pi 神经网络激励函数的特征是:$g(t)$ 在 **R** 上不是如下形式的函数:

$$a_0+\sum_{j=1}^{n}(\ln|t|^{j})^{j-1}\sum_{k=1}^{m}a_{jk}t^k. \tag{2}$$

收稿:1998-09-04. 修回:1999-09-05.

国家自然科学基金、国家教委自然科学基金、博士点基金、博士后基金、金融数学基金和南京理工大学科研启动基金资助.

其中 a_0, a_{jk} 为常数.

由于神经网络中许多重要的激发函数都不是连续的,很自然的一个问题是对于当 $g(t)$ 不连续时情况如何?本文在 $g(t)$ 为局部黎曼可积的条件下讨论这一问题,证明了这类函数可作为 Sigma-Pi 神经网络的激发函数的特征与连续函数可作为 Sigma-Pi 神经网络的激发函数的特征是一样的.容易验证,如果 $g(t)$ 满足[3]中提出的条件:$g(t)$ 局部有界并且其不连续点集的闭包为 $\mathbf{R}$ 中的零测集,那么 $g(t)$ 必定是在 $\mathbf{R}$ 上局部黎曼可积的.

我们记 K 上所有形如(1)的函数所成之集为 $\Sigma(g,K)$,即

$$\Sigma(g,K)=\left\{\sum_{k=1}^{m}c_k g\left(y_k\prod_{j=1}^{n}(x_j-\theta_j)\right)\,\middle|\, y_k,c_k,\theta_j\in\mathbf{R},1\leqslant k\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n,m\geqslant 1\right\},$$

其中 $x\in K$ 为自变量.我们的结果是:

定理1 假设 g 是 $\mathbf{R}$ 上局部 Riemman 可积函数,则对任何紧集 K,集合 $\Sigma(g,K)$ 都在 $C(K)$ 中稠密(即形如(1)的函数在 $C(K)$ 中稠密)的充要条件是:$g(t)$(几乎处处)不是形如(2)的函数.

推论2 假设 $g(t)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的局部黎曼可积函数.如果存在严格单增的自然数列 $\{p_k\}_1^\infty$ 使得 $g^{(p_k)}(0)\neq 0, k=1,2,\cdots$,则对任何紧集 K,集合 $\Sigma(g,K)$ 都在 $C(K)$ 中稠密.

为了证明我们的结果,先引入记号:对于 $\mathbf{R}^n$ 上的函数 $f(x)$,记 $\operatorname{supp}f$ 为 $f(x)$ 的支集,即 $\operatorname{supp}f=\overline{\{x\in\mathbf{R}^n\,|\,f(x)\neq 0\}}$;对于 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$,记 $\lambda x=(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,\cdots,\lambda_nx_n)$,$\pi(x)=\prod\limits_{k=1}^{n}x_k$,当 $\lambda_k\neq 0$ 时,记 $\lambda^{-1}=(\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1})$.对于 $\mathbf{R}$ 上的函数 g 和实数 t,定义 $\mathbf{R}^n$ 上的函数 $\hat{g}$ 和 $\hat{g}_t$ 如下:

$$\hat{g}:\hat{g}(x)=g(\pi(x)),\quad \hat{g}_t:\hat{g}_t(x)=g(t\pi(x)),\quad \forall\, x\in\mathbf{R}^n. \tag{3}$$

对 $\mathbf{R}$ 上的函数 ϕ,$\mathbf{R}^n$ 上的函数 f 与 ψ,分用 $g\diamond\phi$ 与 $f*\psi$ 表示'积积'与'卷积'函数:即

$$g\diamond\phi(t)=\int_{\mathbf{R}}g(ts)\phi(s)\mathrm{d}s,\quad f*\psi(x)=\int_{\mathbf{R}^n}g(x-y)\psi(y)\mathrm{d}y. \tag{4}$$

记 $\Delta_k(a)$ 为 $f(x)$ 关于第 k 个坐标分量的增量算子,即 $\Delta_k(a)f(x)=f(x+ae_k)-f(x)$,这里 e_k 是 $\mathbf{R}^n$ 中第 k 个坐标为1,其余坐标为零的元.对于 n 重指标 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$(即 α_k 均为非负整数)及 $h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)\in\mathbf{R}^n$,记 $|\alpha|=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k$,$\Delta^\alpha(h)=(\Delta_1(h_1))^{\alpha_1}(\Delta_2(h_2))^{\alpha_2}\cdots(\Delta_n(h_n))^{\alpha_n}$,$h^\alpha=h_1^{\alpha_1}h_2^{\alpha_2}\cdots h_n^{\alpha_n}$,$D^\alpha f(x)=\dfrac{\partial^{|\alpha|}f(x)}{\partial x_1{}^{\alpha_1}\partial x_2{}^{\alpha_2}\cdots\partial x_n{}^{\alpha_n}}$.对于 $\mathbf{R}^n$ 中的集合 A,记 $C^\infty(A)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上所有无穷次可微的函数所成之集,$C_0(A)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的所有支集是紧的并且含在 A 中的连续函数所成之集,$C_0^\alpha(A)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的支集是紧的,含在 A 中并且有一直到 α 阶的连续偏导数的函数(即对于 n 重指标 $\beta\leqslant\alpha$,$f(x)$ 在 A 上的偏导数 D^β 存在且连续)所成之集,$C_0^\infty(A)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上所有支集是紧的并且含在 A 中的无穷次可微函数所成之集,$L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上所有局部 p 方可积的函数所成之集;记 $\Sigma_0(f,A)$ 为 A 上所有形如

$$\sum_{k=1}^{m}c_kf(\lambda_k^{-1}x+\theta_k) \tag{5}$$

的函数所成的集合.显然有 $\Sigma(g,A)\supset\Sigma_0(\hat{g},K)$.

引理1[10] 假设 $g(t)\in C^\infty(\mathbf{R}\setminus\{0\})$,$0\notin(a,b)$,则 $g(t)$ 在区间 (a,b) 上不是如下形式的

函数：

$$\sum_{j=1}^{n}(\ln|t|)^{j-1}\sum_{k=0}^{m}a_{jk}t^{k} \tag{6}$$

（其中 a_{jk} 为常数）的充要条件是：对任何 n 重指标 α，都存在 $x_\alpha\in \mathbf{R}^n$ 使得

$$D^\alpha \hat{g}(x_\alpha)\neq 0,\quad \pi(x^\alpha)\in(a,b). \tag{7}$$

引理2　假设 $g(t)$ 局部可积，$0\notin(a,b)$，$0<\delta<1$. 如果 $g(t)$ 在 (a,b) 上几乎处处不是形如(6)的函数，则必存在某个 $\phi_0\in C_0^\infty([1-\delta,1+\delta])$ 使得 $(g\diamond\phi_0)(t)$ 在 (a,b) 上不是形如(6)的函数.

证　如若不然，则对任何 $\phi\in C_0^\infty([1-\delta,1+\delta])$，$(g\diamond\phi)(t)$ 在 (a,b) 上都是形如(6)的函数. 注意到 $g\diamond\phi\in C^\infty(\mathbf{R}\backslash\{0\})$，由引理1可知对任何 $\phi\in C_0^\infty([1-\delta,1+\delta])$ 存在 n 重指标 α_ϕ 使得 $D^{\alpha_\phi}\widehat{g\diamond\phi}(x)=0$，$\forall\ x\in\mathbf{R}^n$，$\pi(x)\in(a,b)$. 因此有

$$C_0^\infty([1-\delta,1+\delta])=\bigcup_\alpha W_\alpha, \tag{8}$$

其中 $W_\alpha=\{\phi\mid\phi\in C_0^\infty([1-\delta,1+\delta]),D^\alpha\widehat{g\diamond\phi}(x)=0,\forall\ x\in\mathbf{R}^N,\pi(x)\in(a,b)\}$. 注意到 $C_0^\infty([1-\delta,1+\delta])$ 是一个 Frèchet 空间（参见[15]例1.46），并且每个 W_α 是 $C_0^\infty([1-\delta,1+\delta])$ 的闭线性子空间，则对(8)式利用 Bair 纲论可知至少有一个 W_{α_0} 的内点集不空，因而 $W_{\alpha_0}=C_0^\infty([1-\delta,1+\delta])$. 于是由引理2可知对任何 $\phi\in C_0^\infty([1-\delta,1+\delta])$，$g\diamond\phi$ 在 (a,b) 上是形如(6)的函数，其中 m 是 α_0 中坐标分量中最大的数.

现考察 Banach 空间 $L(a,b)$. 取一列 $\phi_k\in C_0^\infty([1-\delta,1+\delta])$，使得 $\{g\diamond\phi_n\}_0^\infty$ 在 $L(a,b)$ 中收敛于 g，这显然是可以办到的（事实上，取非负函数 $\phi_k\in C_0^\infty([1-1/k,1+1/k])$ 使得 $\|\phi_k\|=1$，就有 $\|g\diamond\phi_k-g\|\to0(k\to\infty)$）. 由前面的结论可知 $g\diamond\phi_k$ 含在由 $\{x^k\ln|x|^j\mid0\leqslant k\leqslant m,0\leqslant j\leqslant n-1\}$ 张成的子空间 X_0 中. 由于 X_0 是有限维的，从而是闭的. 那么由 $\|g\diamond\phi_k-g\|\to0(k\to\infty)$ 可知 $g\in X_0$，即 $g(t)$ 在 (a,b) 上是形如(6)的函数，矛盾！

类似于[4]中引理4的证明可以证明下面的引理3.

引理 3　假设 $g(t)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的局部黎曼可积函数，$\phi(t)\in C_0((0,2))$，K 为 $\mathbf{R}^n$ 中的紧集，并且 $\pi(x)\neq0$，$\forall\ x\in K$，那么 $\Sigma(g,K)$ 在 $C(K)$ 中的闭包 $\overline{\Sigma(g,K)}$ 必含有 $\widehat{g\diamond\phi}(x)$.

引理4　假设 $x_0\in A\subset\mathbf{R}^n$，$\alpha$ 为 n 重指标 $f(x)\in C^\alpha(A)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的函数. 如果 x_0 为 A 的内点，并且 $D^\alpha f(x_0)\neq0$，则对 $\mathbf{R}^n$ 中的任何紧集 K，多项式 x^α 都在 $\overline{\Sigma_0(f,K)}$ 中.

证　由假设条件易知下列极限成立：

$$\lim_{h\to0,h^\alpha\neq0}\frac{\Delta^\alpha(h)f(x_0)}{h^\alpha}=D^\alpha f(x_0). \tag{9}$$

注意到 K 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界集，那么由(9)式可知下面的极限

$$\lim_{\lambda\to0,\lambda^\alpha\neq0}\frac{\Delta^\alpha(\lambda x)f(x_0)}{\lambda^\alpha}=x^\alpha D^\alpha f(x_0) \tag{10}$$

对 $x\in K$ 一致地成立. 由定义，上式左边的元属于 $\Sigma_0(f,K)$，因而 $D^\alpha f(x_0)x^\alpha$ 属于 $\overline{\Sigma(f,K)}$. 注意到 $D^\alpha f(x_0)\neq0$，故知多项式 x^α 在 $\overline{\Sigma_0(f,K)}$ 中.

引理5　假设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上局部黎曼可积，则下面结论等价：

(1) 对任何 $\mathbf{R}^n$ 的紧集 K 都有 $\overline{\Sigma_0(f,K)}=C(K)$；

(2) 对任何 n 重指标 α，存在 $\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 使得

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) D^\alpha \psi(x) \mathrm{d}x \neq 0; \tag{11}$$

(3) 对任何 n 重指标 α，存在 $\psi \in C_0^\alpha(\mathbf{R}^n)$ 使得(11)式成立.

证 (2)⇒(3)显然成立.

(1)⇒(2)：若不然，存在 n 重指标 α 使得 $D^\alpha f = 0$. 对任何 $\psi \in C_0^\infty(K)$ 和 $\theta, \lambda, \pi(\lambda_k) \neq 0$，则有

$$\int_K f(\lambda^{-1}x + \theta) D^\alpha \psi(x) \mathrm{d}x = \pi(\lambda) \int_{\mathbf{R}^n} f(x) D^\alpha \psi(\lambda x - \lambda\theta) \mathrm{d}x = 0. \tag{12}$$

从而对任何形如(5)的函数 $h(x)$ 都有

$$\int_K h(x) D^\alpha \psi(x) \mathrm{d}x = 0, \quad \forall\, \psi \in C_0^\infty(K). \tag{13}$$

因而当 $h(x)$ 为 K 上的连续函数时，(13)成立. 但是，当 K 是具有内点的非空紧集时，上式显然不成立.

(3)⇒(1)：对任何 n 重指标 α，则存在 $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 使得 $D^\alpha f(\phi) \neq 0$，故知(13)式成立. 类似于[4]引理4可以证明 $f * \phi \in \overline{\Sigma_0(f, K)}$. 而(11)式表明 $f * \phi(x)$ 在原点的 α 次偏导数不为零，于是由引理4可知多项式 $x^\alpha \in \overline{\Sigma_0(f * \phi, K)}$. 因此 $\Sigma_0(f * \phi, K)$ 在 $C(K)$ 中稠密，故知 $\Sigma_0(f, K)$ 在 $C(K)$ 中稠密.

定理**1**的证明 必要性已在[9,10]中得证.

充分性：不妨假设 K 具有性质 $\pi(x) \neq 0, \forall\, x \in K$，否则取 K 的一个具有上述性质的平移集 $K' = K + \theta$ 即可，这里 $\theta \in \mathbf{R}^n$ 为某个元.

如果 $g(t)$ 在某个不含原点的区间 (a,b) 上不是形如(6)的函数，则由引理2可知存在某个 $\phi \in C_0^\infty(0,2)$ 使得 $g \diamond \phi$ 在 (a,b) 上不是形如(6)的函数. 注意到 $g \diamond \phi \in C^\infty(\mathbf{R} \backslash \{0\})$，因而局部黎曼可积. 于是利用引理1和引理5可知 $\Sigma_0(g \diamond \phi, K)$ 在 $C(K)$ 中稠密，因而由引理3可知 $\Sigma(g, K)$ 在 $C(K)$ 中稠密.

如果 $g(t)$ 在每个不含原点的区间 (a,b) 上都是形如(6)的函数，利用形如(6)函数的局部解析性易知，$g(t)$ 在 $(0,\infty)$ 和 $(-\infty, 0)$ 上分别为形如(6)的函数，由于 $g(t)$ 是局部有界的，故 $g(t)$ 在 $(0,\infty)$ 和 $(-\infty,0)$ 上分别为形如(2)的函数. 所以 $g(t)$ 可表示为

$$g(t) = g_0(t) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} g_{jk}(t), \tag{14}$$

其中

$$g_0(t) = \begin{cases} a_0, & \text{当 } t > 0; \\ b_0, & \text{当 } t < 0, \end{cases} \quad g_{jk}(t) = \begin{cases} a_{jk}(\ln|t|)^{j-1} t^k, & \text{当 } t > 0, \\ b_{jk}(\ln|t|)^{j-1} t^k, & \text{当 } t < 0. \end{cases}$$

a_{jk} 与 b_{jk} 为常数.

当 $a_0 = b_0$，则 $g(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，因而由已知的结论可知 $\Sigma(g, K)$ 在 $C(K)$ 中稠密(参见[10]推论或[9]定理11的充分性，这也可以利用[11]中的结论和[6]中定理11的证明方法直接证明). 当 $a_0 \neq b_0$ 时，对任何 n 重指标 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，对 $1 \leqslant k \leqslant n$，定义 $\mathbf{R}$ 上的函数 $h_k(t)$ 如下：

$$h_k(t) = \begin{cases} (1 - t^2)^{\alpha_k + 1}, & \text{当 } |t| \leqslant 1, \alpha_k \text{ 为奇数}, \\ t(1 - t^2)^{\alpha_k + 1}, & \text{当 } |t| \leqslant 1, \alpha_k \text{ 为偶数}, \\ 0, & \text{当 } |t| > 1, \end{cases}$$

则 $h\in C_0^{\alpha_k}(\mathbf{R})$，并且 $h_k^{(\alpha_k-1)}(0)\neq 0$. 因而 $\mathbf{R}^n$ 上的函数

$$\phi:\phi(x)=\prod_{k=1}^{n}h_k(x_k),\quad \forall\ x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$$

属于 $C_0^{\alpha}(\mathbf{R}^n)$，其支集含在 $[-1,1]^n$ 中，并且 $D^{\alpha-e}(0)\neq 0$，这里 $e=(1,1,\cdots,1)$. 记 $Q_I=I_1\times I_2\times\cdots\times I_n$，其中 I_k 是闭区间 $[0,1]$ 或 $[-1,0]$. 经计算可知

$$\int_{Q_I}D^{\alpha}\phi(x)\mathrm{d}x=(-1)^{\tau(I)}\prod_{k=1}^{n}h^{(\alpha_k-1)}(0)=(-1)^{\tau(I)}D^{\alpha-e}\phi(0)\neq 0. \tag{15}$$

其中 $\tau(I)$ 表示 $I_1,I_2,\cdots,I_n$ 中为闭区间 $[0,1]$ 的个数.

$\forall\ \delta>0$，利用(15)式可知 $\int_{\mathbf{R}^n}\hat{g}_0(x)D^{\alpha}\left(\phi\left(\frac{x}{\delta}\right)\right)\mathrm{d}x=\delta^{n-|\alpha|}2^{n-1}(a_0-b_0)D^{\alpha-e}\phi(0)\neq 0.$

对 $g_{jk}(t)$ 容易验证，当 $\delta>0$ 充分小时，$\left|\int_{\mathbf{R}^n}\hat{g}_{jk}(x)D^{\alpha}\left(\phi\left(\frac{x}{\delta}\right)\right)\mathrm{d}x\right|\leqslant\max\limits_{0\leqslant j\leqslant n-1,1\leqslant k\leqslant m}\{|a_{jk}|,|b_{jk}|\}n^{n-1}|\ln\delta|^{n-1}\times 2^n\delta^{2n-|\alpha|}\max\{|D^{\alpha}\phi(x)|x\in[0,1]^n\}$. 于是对任何 α 总可以找到 $\delta_0>0$ 使得 $\left|\int_{\mathbf{R}^n}\hat{g}_0(x)D^{\alpha}\left(\phi\left(\frac{x}{\delta_0}\right)\right)\mathrm{d}x\right|>\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left|\int_{\mathbf{R}^n}\hat{g}_{jk}(x)D^{\alpha}\left(\phi\left(\frac{x}{\delta_0}\right)\right)\mathrm{d}x\right|$，从而 $\int_{\mathbf{R}^n}\hat{g}(x)D^{\alpha}\left(\phi\left(\frac{x}{\delta_0}\right)\right)\mathrm{d}x\neq 0.$

于是由引理5可知 $\Sigma_0(\hat{g},K)$ 在 $C(K)$ 中稠密，因而 $\Sigma(g,K)$ 在 $C(K)$ 中稠密. 充分性证毕.

参 考 文 献

1 Ito, Y., Approximation of continuous function on $\mathbf{R}^d$ by linear combinations of shifted rotations of a sigmoidal function without scaling, Neural Networks, 1992, 5(5): 105～115.

2 Mhaskar, H. N., Approximation by superposition of sigmoidal and radial functions, Advances in Applied Mathematics, 1992, 13: 350～373.

3 Leshno, M., et al., Multilayer feedforward networks with a nonpolynomial activation function can approximate any function, Neural Networks, 1993, 4(6): 861～867.

4 Hornik, K., Some new results on neural network aproximation, Neural Networks, 1993, 6(6): 1096～1072.

5 Lenze, B., Note on a density question for neural works, Numerical functional and Optimzition, 1994, 15: 909～913.

6 Chen Tianping, Chen hong, Ruey-wen Liu, Approximation capability in $C(\mathbf{R}^n)$ by multilayer feedforword network and problems, IEEE Trans. Neural Networks, 1995, 6(1): 25～31.

7 Chen Tianping, Chen Hong, Universal approximation to nonlinear operators by neural networks with arbitrary activation functions and its application to dynamical systems, IEEE Trans. Neural Networks, 1995, 6(4): 911～917.

8 Attali, J. G., Pagès, G., Approximations by a multilayer perception: a new approach, Neural Networks, 1997, 10(6): 1069～1081.

9 Allan, P., TDI-subspace of $C(\mathbf{R}^d)$ and some density problems from neural networks, Journal of Approximation Theory, 1996, 85: 269～287.

10 Chen Tianping, Wu Xiaowei, Characteristics of activation function in Sigma-pi neural networks, 复旦大学学报, 1987, 36(6): 639～644.

11 Chen Tianping, Chen Hong, Universal approximation capability to function of EBF neural networks with arbitary activation fuctions, Circuits Systems and Signal Processing, 1992, 24(1): 1~7.

12 陈天平,神经网络及其在系统识别中的逼近问题,中国科学,A辑,1992,24(1):1~7.

13 李纯明,陈天平,Sigma-Pi神经网络中的逼近问题,科学通报,1996,41(8):683~684.

14 韦刚等,关于前馈多层神经网络函数逼近能力的一个定理,电子科学学刊,1997,19(4):433~438.

15 Rudin, W., Functional Analysis, McGraw-Hill, New York, 1973.

THE APPROXIMATION PROBLEMS ON SIGMA-PI NEURAL NETWORKS

Luo Yuehu

(*Dept. of Appl. Math., Nanjing University of Science and Technology, Nanjing* 210094)

Shen Shiyi

(*Dept. of Math., Nankai University, Tianjin* 300071)

Abstract In this paper, conditions under which a noncontinuous function can be qualified as an active function of Sigma-Pi neural networks are studied. The result shows that the characteristic on a locally Riemannian integrable function can be qualified as an active function of Sigma-Pi neural networks is as same as that on a continuous function can be qualified as an active function of Sigma-Pi neural networks.

Keywords Sigma-Pi Neural Network, Approximation Ability, Continuous Approximation.

Subject Classification (CL)O174; (1991MR)92B20, 41A.