高校应用数学学报A辑 Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. A
2000,15(1):65～71

另一形式的多元 Γ 分布及其性质

张光远

(新疆大学数学系,乌鲁木齐 830046)

摘　要　本文基于形状参数可变,尺度参数不变的思路,提出了一种新形式的多元 Γ 分布,并研究了它的性质以及它与多元正态分布的关系.

关键词　密度函数,多元 Γ 分布,特征函数.

分类号　(中图)O211;(1991MR)60E05.

§1　引　言

在通常的多元 Γ 分布 $\Gamma_m(\alpha,\Sigma)$ 中,α 是正常数,$\Sigma>0$是正定阵.特别,当 $\alpha=\frac{n}{2}$,$\Sigma>0$且 $n\geqslant m$ 时,$\Gamma_m(\alpha,\Sigma)$即 Wishart 分布 $W_m(n,\Sigma)$.文[1]将 $\Sigma>0$减弱为 $\Sigma\geqslant 0$,在 $n\geqslant\mathrm{rank}(\Sigma)$的条件下,推广了这一分布.文献[2]在保持 $\Sigma\geqslant 0$,但进一步削弱自由度限制的条件下,以特征函数为工具,定义了广义多元 Γ 分布并研究了它的性质.[1]和[2]都是在保持形状参数不变,而尺度参数变得相当复杂的条件下进行的.本文基于形状参数可变,而尺度参数不变的思路,用密度函数定义了另一形式的多元 Γ 分布,它具有结构简单,便于分析、研究之特点.

为了引入不同于 $\Gamma_m(\alpha,\Sigma)$的多元 Γ 分布,先考察如下函数:

$$f(x_1,x_2)=\beta^{\alpha_1+\alpha_2}x_1^{\alpha_1-1}(x_2-x_1)^{\alpha_2-1}e^{-\beta x_2}/\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2),\quad 0<x_1<x_2<+\infty,$$

其中 $\alpha_1>0,\alpha_2>0,\beta>0$.容易验证:$f(x_1,x_2)$是一个二元概率密度函数,并且若 $X=(X_1,X_2)'$以 $f(x_1,x_2)$为其密度,那么有 $X_1\sim\Gamma(\alpha_1,\beta)$和 $X_2\sim\Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\beta)$.也就是说 X 的两个边际分布均为一元 Γ 分布.受此启发,提出如下

定义　设 $X=(X_1,\cdots,X_n)'$是 n 维随机变量,如果 X 的联合密度函数为

$$f_X(x)=\Big[\prod_{i=1}^{n}\beta^{-\alpha_i}\Gamma(\alpha_i)\Big]^{-1}x_1^{\alpha_1-1}(x_2-x_1)^{\alpha_2-1}\cdots(x_n-x_{n-1})^{\alpha_n-1}e^{-\beta x_n},\tag{1.1}$$

其中 $\alpha_i>0,i=1,\cdots,n,\beta>0,x\in S_n\triangleq\{(x_1,\cdots,x_n):0<x_1<\cdots<x_n<+\infty\}$,则称 X 服从参数为$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n;\beta)$的多元 Γ 分布,并简记为 $X\sim\Gamma_n(\alpha_1,\cdots,\alpha_n;\beta)$.特别,当 $\beta=1$时,称 $\Gamma_n(\alpha_1,\cdots,\alpha_n;1)$为标准多元 Γ 分布.又当 $n=1$时,显然 $\Gamma(\alpha_1;\beta)$就是常见的一元 Γ 分布.

收稿:1998-04-24.修回:1998-09-03.

§2 $\Gamma_n(\alpha_1,\cdots,\alpha_n;\beta)$的性质

本节研究由(1.1)式定义的多元Γ分布的性质.

性质1 如果$X=(X_1,\cdots,X_n)'\sim\Gamma_n(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta)$,则$X$的特征函数为:

$$\Phi_X(t)=\beta^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}[\beta-i(t_1+\cdots+t_n)]^{-\alpha_1}[\beta-i(t_2+\cdots+t_n)]^{-\alpha_2}\cdots(\beta-it_n)^{-\alpha_n}, \tag{2.1}$$

其中$t\in\mathbf{R}^n$,$i=\sqrt{-1}$是虚数单位.

证 用归纳法.当$n=1$时,$X=X_1\sim\Gamma(\alpha_1,\beta)$,结论显然成立.假定$n=k$时,结论仍成立,即对任意$t\in\mathbf{R}^k$,有

$$\Big[\prod_{i=1}^{k}\beta^{-\alpha_i}\Gamma(\alpha_i)\Big]^{-1}\int_{S_k}e^{it_1x_1+\cdots+it_kx_k}x_1^{\alpha_1-1}(x_2-x_1)^{\alpha_2-1}(x_k-x_{k-1})^{\alpha_k-1}e^{-\beta x_k}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k=$$

$$\beta^{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}[\beta-i(t_1+\cdots+t_k)]^{-\alpha_1}[\beta-i(t_2+\cdots+t_k)]^{-\alpha_2}\cdots(\beta-it_k)^{-\alpha_k}, \tag{2.2}$$

当$n=k+1$时,$\forall\ t\in\mathbf{R}^{k+1}$,我们有

$$\Phi_X(t)=Ee^{it'X}=\int_{\mathbf{R}^{k+1}}e^{it'x}f_X(x)\mathrm{d}x=$$

$$\Big[\prod_{i=1}^{k+1}\beta^{-\alpha_i}\Gamma(\alpha_i)\Big]^{-1}\int_{S_{k+1}}e^{it'x}x_1^{\alpha_1-1}(x_2-x_1)^{\alpha_2-1}\cdots(x_{k+1}-x_k)^{\alpha_{k+1}-1}e^{-\beta x_{k+1}}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{k+1}=$$

$$\Big[\prod_{i=1}^{k+1}\beta^{-\alpha_i}\Gamma(\alpha_i)\Big]^{-1}\int_{S_k}e^{it_1x_1+\cdots+it_kx_k}x_1^{\alpha_1-1}(x_2-x_1)^{\alpha_2-1}\cdots(x_k-x_{k-1})^{\alpha_k-1}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k\times$$

$$\int_{x_k}^{+\infty}(x_{k+1}-x_k)^{\alpha_{k+1}-1}e^{(it_{k+1}-\beta)x_{k+1}}\mathrm{d}x_{k+1}. \tag{2.3}$$

但

$$\int_{x_k}^{+\infty}(x_{k+1}-x_k)^{\alpha_{k+1}-1}e^{(it_{k+1}-\beta)x_{k+1}}\mathrm{d}x_{k+1}=$$

$$\int_0^{+\infty}u^{\alpha_{k+1}-1}e^{(it_{k+1}-\beta)(u+x_k)}\mathrm{d}u=$$

$$e^{(it_{k+1}-\beta)x_k}\int_0^{+\infty}u^{\alpha_{k+1}-1}e^{(it_{k+1}-\beta)u}\mathrm{d}u=$$

$$e^{(it_{k+1}-\beta)x_k}\beta^{-\alpha_{k+1}}\Gamma(\alpha_{k+1})\left(1-i\frac{t_{k+1}}{\beta}\right)^{-\alpha_{k+1}}=$$

$$\Gamma(\alpha_{k+1})(\beta-it_{k+1})^{-\alpha_{k+1}}e^{(it_{k+1}-\beta)x_k}, \tag{2.4}$$

将(2.4)代入(2.3),整理后得:

$$\Phi_X(t)=\left\{\Big[\prod_{i=1}^{k}\beta^{-\alpha_i}\Gamma(\alpha_i)\Big]^{-1}\int_{S_k}e^{it_1x_1+\cdots+it_{k-1}x_{k-1}+i(t_k+t_{k+1})x_k}x_1^{\alpha_1-1}(x_2-x_1)^{\alpha_2-1}\cdots\times\right.$$

$$\left.(x_k-x_{k-1})^{\alpha_k-1}e^{-\beta x_k}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k\right\}\beta^{\alpha_{k+1}}(\beta-it_{k+1})^{-\alpha_{k+1}}. \tag{2.5}$$

对(2.5)式右端大括弧内的部分运用归纳假设(2.2),便得

$$\Phi_X(t)=\beta^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{k+1}}[\beta-i(t_1+\cdots+t_{k+1})]^{-\alpha_1}[\beta-i(t_2+\cdots+t_{k+1})]^{-\alpha_2}\cdots$$

$$(\beta - it_{k+1})^{-\alpha_{k+1}}.$$

由此可知,$n=k+1$时结论亦成立.所以对一切自然数 n,结论成立.

性质**2** 设 $X=(X_1,\cdots,X_n)'\sim\Gamma_n(\alpha_1,\cdots,\alpha_n;\beta)$,则

(i) $X_k\sim\Gamma(\alpha_1+\cdots+\alpha_k;\beta)$, $k=1,2,\cdots,n$.

(ii) 若将 X 剖分为:$X=\begin{pmatrix}X^{(1)}\\X^{(2)}\end{pmatrix}\begin{matrix}r\\n-r\end{matrix}$,则

$$X^{(1)}\sim\Gamma_r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r;\beta),\quad X^{(2)}\sim\Gamma_{n-r}(\alpha_1+\cdots+\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_n;\beta).$$

证 (i) 在(2.1)式中令 $t_1=\cdots=t_{k-1}=t_{k+1}=\cdots=t_n=0$,得 X_k 的特征函数为:

$$\Phi_{X_k}(t_k)=\Phi_X(0,\cdots,0,t_k,0\cdots,0)=(1-it_k/\beta)^{-(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)},$$

这正是一元 Γ 分布 $\Gamma(\alpha_1+\cdots+\alpha_n,\beta)$的特征函数,因此由(关于分布函数与特征函数的)唯一性定理知(i)成立.

(ii) 在(2.1)式中分别令 $t_{r+1}=\cdots=t_n=0$和 $t_1=\cdots=t_r=0$,就分别得到 $X^{(1)}$和 $X^{(2)}$的特征函数如下:

$$\Phi_{X^{(1)}}(t^{(1)})=\Phi_X(t_1,\cdots,t_r,0,\cdots,0)=$$
$$\beta^{\alpha_1+\cdots+\alpha_r}[\beta-i(t_1+\cdots+t_r)]^{-\alpha_1}[\beta-i(t_2+\cdots+t_r)]^{-\alpha_2}\cdots(\beta-it_r)^{-\alpha_r},$$
$$\Phi_{X^{(2)}}(t^{(2)})=\Phi_X(0,\cdots,0,t_{r+1},\cdots,t_n)=$$
$$\beta^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_{r+1})+\alpha_{r+2}+\cdots+\alpha_n}[\beta-i(t_{r+1}+\cdots+t_n)]^{-(\alpha_1+\cdots+\alpha_{r+1})}\times$$
$$[\beta-i(t_{r+2}+\cdots+t_n)]^{-\alpha_{r+2}}\cdots(\beta-it_n)^{-\alpha_n}.$$

可见 $\Phi_{X^{(1)}}(t^{(1)})$和 $\Phi_{X^{(2)}}(t^{(2)})$仍有(2.1)式的形状,所以(ii)成立.

更一般地,对 X 的任一子向量 $X^*=(X_{j_1},\cdots,X_{j_m})'$,$1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_m\leqslant n$,从(2.1)式可求得它的特征函数为

$$\Phi_{X^*}(t^*)=\beta^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_{j_1})+(\alpha_{j_1+1}+\cdots+\alpha_{j_2})+\cdots+(\alpha_{j_{m-1}+1}+\cdots+\alpha_{j_m})}[\beta-i(t_{j_1}+\cdots+t_{j_m})]^{-(\alpha_1+\cdots+\alpha_{j_1})}\times$$
$$[\beta-i(t_{j_2}+\cdots+t_{j_m})]^{-(\alpha_{j_1+1}+\cdots+\alpha_{j_2})}\cdots(\beta-it_{j_m})^{-(\alpha_{j_{m-1}+1}+\cdots+\alpha_{j_m})}. \tag{2.6}$$

由此知 X^*同样是服从多元 Γ 分布的.这一性质表明:多元 Γ 分布 $\Gamma_n(\alpha_1,\cdots,\alpha_n;\beta)$的任一边际分布仍是(多元)$\Gamma$ 分布.正是由于这个原因,所以把(1.1)式定义的分布称多元 Γ 分布.此外,当 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 皆为正整数时,$\alpha_1+\cdots+\alpha_k$ 当然也是正整数,结论(i)表明此时诸 X_k 均服从埃尔兰分布,故此时也可以把 $\Gamma_n(\alpha_1,\cdots,\alpha_n;\beta)$看作多元埃尔兰分布.

推论 如果 $\alpha_n>\alpha_{n-1}>\cdots>\alpha_1>0$,$X=(X_1,\cdots,X_n)'\sim\Gamma_n(\alpha_1,\alpha_2-\alpha_1,\cdots,\alpha_n-\alpha_{n-1};\beta)$,则 $X_i\sim\Gamma(\alpha_i,\beta)$,$i=1,\cdots,n$.

性质**3** 设 $X\sim\Gamma_n(\alpha_1,\cdots,\alpha_n;\beta)$,则 X 的均值向量和协方差阵分别为:

$$EX=\beta^{-1}(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\cdots+\alpha_n)',$$

$$\mathrm{Cov}(X)=\beta^{-2}\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_1&\cdots&\alpha_1\\\alpha_1&\alpha_1+\alpha_2&\cdots&\alpha_1+\alpha_2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\alpha_1&\alpha_1+\alpha_2&\cdots&\alpha_1+\cdots+\alpha_n\end{pmatrix}.$$

证 根据性质2之(i)及一元 Γ 分布的有关结论,得到

$$EX_k=\beta^{-1}(\alpha_1+\cdots+\alpha_k),$$

$$DX_k=\beta^{-2}(\alpha_1+\cdots+\alpha_k),\quad k=1,2,\cdots,n. \tag{2.7}$$

所以 $$EX=\beta^{-1}(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\cdots+\alpha_n)'.$$

下面求 $\mathrm{Cov}(X)$. 对任意的 $1\leqslant j<k\leqslant n$，由(2.6)式知 $(X_j,X_k)'$ 的特征函数为：

$$\Phi_{jk}(t_j,t_k)=\beta^{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}[\beta-i(t_j+t_k)]^{-(\alpha_1+\cdots+\alpha_j)}(\beta-it_k)^{-(\alpha_{j+1}+\cdots+\alpha_k)},$$

由于

$$\frac{\partial^2\Phi_{jk}(t_j,t_k)}{\partial t_j\partial t_k}=-\beta^{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}(\alpha_1+\cdots+\alpha_j)[\beta-i(t_j+t_k)]^{-(\alpha_1+\cdots+\alpha_j+2)}\times$$
$$(\beta-it_k)^{-(\alpha_{j+1}+\cdots+\alpha_k+1)}\{(\alpha_1+\cdots+\alpha_j+1)(\beta-it_k)+$$
$$(\alpha_{j+1}+\cdots+\alpha_k)[\beta-i(t_j+t_k)]\},$$

故得

$$\left.\frac{\partial^2\Phi_{jk}(t_j,t_k)}{\partial t_j\partial t_k}\right|_{t_j=t_k=0}=-\beta^{-2}(\alpha_1+\cdots+\alpha_j)(\alpha_1+\cdots+\alpha_k+1),$$

所以

$$E(X_jX_k)=i^{-2}\left.\frac{\partial^2\Phi_{jk}(t_j,t_k)}{\partial t_j\partial t_k}\right|_{t_j=t_k=0}=$$
$$\beta^2(\alpha_1+\cdots+\alpha_j)(\alpha_1+\cdots+\alpha_k+1),$$

从而得 $\mathrm{Cov}(X_j,X_k)=E(X_jX_k)-EX_jEX_k=\beta^{-2}(\alpha_1+\cdots+\alpha_j),\quad 1\leqslant j<k\leqslant n,$

$$\mathrm{Cov}(X)=(\mathrm{Cov}(X_j,X_k))_{n\times n}=\beta^{-2}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1\\ \alpha_1 & \alpha_1+\alpha_2 & \cdots & \alpha_1+\alpha_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_1 & \alpha_1+\alpha_2 & \cdots & \alpha_1+\cdots+\alpha_n\end{pmatrix}.$$

性质4 设 $X=\begin{pmatrix}X^{(1)}\\X^{(2)}\end{pmatrix}\begin{matrix}r\\n-r\end{matrix}\sim\Gamma_n(\alpha_1,\cdots,\alpha_n;\beta)$，则

(i) 在给定 $X^{(2)}=x^{(2)}=(x_{r+1},\cdots,x_n)'$ 的条件下，$X^{(1)}$ 的条件密度为：

$$f(x^{(1)}|x^{(2)})=\Gamma(\alpha_1+\cdots+\alpha_{r+1})x_1^{\alpha_1-1}(x_2-x_1)^{\alpha_2-1}\cdots(x_{r+1}-x_r)^{\alpha_{r+1}-1}\times$$
$$x_{r+1}^{1-(\alpha_1+\cdots+\alpha_{r+1})}/(\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_{r+1})),\quad 0<x_1<\cdots<x_{r+1}; \tag{2.8}$$

(ii) 在给定 $X^{(1)}=x^{(1)}=(x_1,\cdots,x_r)'$ 的条件下，$X^{(2)}$ 的条件密度为：

$$f(x^{(2)}|x^{(1)})=\beta^{\alpha_{r+1}+\cdots+\alpha_n}(x_{r+1}-x_r)^{\alpha_{r+1}-1}\cdots(x_n-x_{n-1})^{\alpha_n-1}\times$$
$$e^{-\beta(x_n-x_r)}/(\Gamma(\alpha_{r+1})\cdots\Gamma(\alpha_n)),\quad x_r<x_{r+1}<\cdots<x_n<+\infty. \tag{2.9}$$

证　由性质2及定义(1.1)，可知 $X^{(1)}$ 和 $X^{(2)}$ 的密度函数分别为：

$$f_{X^{(1)}}(x^{(1)})=\Big[\prod_{i=1}^{r}\beta^{-\alpha_i}\Gamma(\alpha_i)\Big]^{-1}x_1^{\alpha_1-1}(x_2-x_1)^{\alpha_2-1}\cdots(x_r-x_{r-1})^{\alpha_r-1}e^{-\beta x_r},\quad x^{(1)}\in S_r, \tag{2.10}$$

$$f_{X^{(2)}}(x^{(2)})=\frac{\beta^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{r+1}+\alpha_{r+2}+\cdots+\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_1+\cdots+\alpha_{r+1})\Gamma(\alpha_{r+2})\cdots\Gamma(\alpha_n)}x_{r+1}^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{r+1}-1}(x_{r+2}-x_{r+1})^{\alpha_{r+2}-1}\times$$
$$\cdots\times(x_n-x_{n-1})^{\alpha_n-1}e^{-\beta x_n},\quad x^{(2)}\in S_{n-r}, \tag{2.11}$$

故当给定 $X^{(2)}=x^{(2)}$ 时，利用(1.1)、(2.11)及条件密度的计算公式即得(2.8)；当给定 $X^{(1)}=$

$x^{(1)}$ 时，利用(1.1)、(2.10)即得(2.9).

性质5　若 $X\sim\Gamma_n(\alpha_1,\cdots,\alpha_n;\beta)$ 与 $Y\sim\Gamma_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n;\beta)$ 独立，则 $Z=X+Y\sim\Gamma_n(\alpha_1+\lambda_1,\cdots,\alpha_n+\lambda_n;\beta)$.

证　由 X 与 Y 的独立性及性质1，可知 Z 的特征函数为：

$$\Phi_Z(t)=\Phi_X(t)\cdot\Phi_Y(t)=\beta^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n+\lambda_1+\cdots+\lambda_n}\times$$

$$\left\{\prod_{j=1}^{n}[\beta-i(t_j+\cdots+t_n)]^{-\alpha_j}\right\}\cdot\left\{\prod_{j=1}^{n}[\beta-i(t_j+\cdots+t_n)]^{-\lambda_j}\right\}=$$

$$\beta^{(\alpha_1+\lambda_1)+\cdots+(\alpha_n+\lambda_n)}\left\{\prod_{j=1}^{n}[\beta-i(t_j+\cdots+t_n)]^{-(\alpha_j+\lambda_j)}\right\}$$

这正是 $\Gamma_n(\alpha_1+\lambda_1,\cdots,\alpha_n+\lambda_n;\beta)$ 的特征函数，故结论成立.

这个性质说明：独立的多元 Γ 分布关于形状参数具有可加性. 此外，本性质显然可以推广到任意有限个独立多元 Γ 分布的情形.

性质6　设 $X=(X_1,\cdots,X_n)'\sim\Gamma_n(\alpha_1,\cdots,\alpha_n;\beta)$. 令

$$Y_1=X_1,\quad Y_i=X_i-X_{i-1},\quad i=2,\cdots,n,\tag{2.12}$$

则 $Y_1,\cdots,Y_n$ 相互独立，且 $Y_i\sim\Gamma(\alpha_i,\beta)$，$i=1,\cdots,n$.

证　容易算出变换(2.12)的雅可比行列式为1，又

$$x_1=y_1,\quad x_2=y_1+y_2,\quad\cdots,\quad x_n=y_1+\cdots+y_n,\quad 0<y_i<+\infty,$$

故得 $Y=(Y_1,\cdots,Y_n)'$ 的密度函数为：

$$f_Y(y)=f_X(y_1,y_1+y_2,\cdots,y_1+\cdots+y_n)\cdot 1=$$

$$\left[\prod_{i=1}^{n}\beta^{-\alpha_i}\Gamma(\alpha_i)\right]^{-1}y_1^{\alpha_1-1}y_2^{\alpha_2-1}\cdots y_n^{\alpha_n-1}e^{-\beta(y_1+\cdots+y_n)}=$$

$$\prod_{i=1}^{n}(\beta^{\alpha_i}/\Gamma(\alpha_i))y_i^{\alpha_i-1}e^{-\beta y_i},\quad y\in\mathbf{R}_+^n.$$

由此即知 $Y_1,\cdots,Y_n$ 相互独立，且 $Y_i\sim\Gamma(\alpha_i,\beta)$，$i=1,\cdots,n$.

§3　其它结果

悉知，一元 Γ 分布与 Dirichlet 分布、正态分布都有很密切的关系. 对于(1.1)式定义的多元 Γ 分布，也有类似结果.

定理3.1　设 $X=(X_1,\cdots,X_n)'\sim\Gamma_n(\alpha_1,\cdots,\alpha_n;\beta)$.

(i) 令：

$$Y_1=X_1/X_n,\quad Y_i=(X_i-X_{i-1})/X_n,\quad i=2,\cdots,n,\tag{3.1}$$

则 $Y\triangleq(Y_1,\cdots,Y_n)'\sim D_n(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$(Dirichlet 分布).

(ii) 令：

$$Z_m=X_m/X_n,\quad 1\leqslant m<n,\tag{3.2}$$

则 $Z_m\sim D_2(\alpha_1+\cdots+\alpha_m,\alpha_{m+1}+\cdots+\alpha_n)$.

证　记 $U_1=\beta X_1$，$U_i=\beta(X_i-X_{i-1})$，$i=2,\cdots,n$. 由性质6知 $U_1,\cdots,U_n$ 相互独立，又据一元 Γ 分布的性质知 $U_i\sim\Gamma(\alpha_i,1)$，$i=1,\cdots,n$. 由于 $\beta X_n=U_1+\cdots+U_n$，故(3.1)式可改写为：

$$Y_i = U_i/(U_1 + \cdots + U_n), \quad i = 1,\cdots,n.$$

从而根据 Dirichlet 分布的性质(参见[3])知(i)成立. 对任意$1 \leqslant m < n$,注意到 $\beta X_m = U_1 + \cdots + U_m$,则(3.2)可改写为:

$$Z_m = Y_1 + \cdots + Y_m.$$

再利用结论(i)及 Dirichlet 分布的性质就知(ii)成立.

定理3.2 设 $X = (X_1,\cdots,X_n)' \sim \Gamma_n(\alpha_1,\cdots,\alpha_n;\beta)$. 记 $\alpha = (\sqrt{\alpha_1},\cdots,\sqrt{\alpha_n})'$

$$B = \beta\begin{pmatrix} \alpha_1^{-1/2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\alpha_2^{-1/2} & \alpha_2^{-1/2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_3^{-1/2} & \alpha_3^{-1/2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha_n^{-1/2} & \alpha_n^{-1/2} \end{pmatrix},$$

则当 $\alpha_k \to +\infty, k=1,\cdots,n$ 时,$Y = (Y_1,\cdots,Y_n)' \triangleq BX - \alpha$ 的分布收敛于多元标准正态分布 $N_n(0,I_n)$, 即

$$\lim_{\substack{\alpha_k \to +\infty \\ k=1,\cdots,n}} P(Y_1 < y_1,\cdots,Y_n < y_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{-\infty}^{y_1}\cdots\int_{-\infty}^{y_n} \mathrm{e}^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)/2}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$\forall\ (y_1,\cdots,y_n)' \in \mathbf{R}^n. \qquad (3.3)$$

证 根据多元特征函数的性质,得 Y 的特征函数为:

$$\Phi_Y(t;\alpha_1,\cdots,\alpha_n) = e^{-i\alpha' t}\Phi_X(B't) =$$

$$e^{-i\alpha' t}\Phi_X\left(\beta\left(t_1/\sqrt{\alpha_1} - t_2/\sqrt{\alpha_2}\right),\cdots,\beta\left(t_{n-1}/\sqrt{\alpha_{n-1}} - t_n/\sqrt{\alpha_n}\right),\beta t_n/\sqrt{\alpha_n}\right) =$$

$$e^{-i\alpha' t}\beta^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\left(\beta - i\beta t_1/\sqrt{\alpha_1}\right)^{-\alpha_1}\cdots\left(\beta - i\beta t_n/\sqrt{\alpha_n}\right)^{-\alpha_n} =$$

$$e^{-i\alpha' t}\left(1 - it_1/\sqrt{\alpha_1}\right)^{-\alpha_1}\cdots\left(1 - it_n/\sqrt{\alpha_n}\right)^{-\alpha_n} =$$

$$[e^{-i\sqrt{\alpha_1}t_1}\left(1 - it_1/\sqrt{\alpha_1}\right)]^{-\alpha_1}\cdots[e^{-i\sqrt{\alpha_n}t_n}\left(1 - it_n/\sqrt{\alpha_n}\right)]^{-\alpha_n}, \quad \forall\ t = (t_1,\cdots,t_n)' \in \mathbf{R}^n,$$

而

$$e^{-i\sqrt{\alpha_k}t_k}\left(1 - it_k/\sqrt{\alpha_k}\right)^{-\alpha_k} = \exp\left\{-i\sqrt{\alpha_k}t_k - \alpha_k\ln\left(1 - it_k/\sqrt{\alpha_k}\right)\right\} =$$

$$\exp\left\{-i\sqrt{\alpha_k}t_k - \alpha_k\left[\left(-it_k/\sqrt{\alpha_k}\right) - \left(-it_k/\sqrt{\alpha_k}\right)^2/2 + o(\alpha_k^{-1})\right]\right\} =$$

$$\exp\left\{-t_k^2/2 - i\sqrt{\alpha_k}t_k \cdot o(\alpha_k^{-1})\right\} \to e^{-t_k^2/2}, \quad (\alpha_k \to +\infty)$$

所以

$$\lim_{\substack{\alpha_k \to +\infty \\ k=1,\cdots,n}} \Phi_Y(t;\alpha_1,\cdots,\alpha_n) = e^{-(t_1^2+\cdots+t_n^2)/2} = e^{-t't/2},$$

但 $e^{-t't/2}$恰好是 $N_n(0,I_n)$的特征函数,因此(3.3)成立. 这个结果表明:当 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 都充分大时,多元 Γ 分布 $\Gamma_n(\alpha_1,\cdots,\alpha_n;\beta)$近似于多元正态分布 $N_n(B^{-1}\alpha,B^{-1}(B^{-1})')$.

致谢 对审稿人细致的审阅表示诚挚的谢意.

参 考 文 献

1 Muirhead,Robb,J.,Aspects of Multivariate Statistical Theory,John Wiley & Sons,Inc.,1982.
2 高道德,广义多元 Γ 分布,数理统计与应用概率,1995,10(2):1～13.
3 方开泰,许健伦,统计分布,科学出版社,北京,1987,347～360.
4 王松桂,线性模型的理论及其应用,安徽教育出版社,合肥,1994,87～97.

ANOTHER FORM OF MULTIVARIATE Γ DISTRIBUTION

Zhang Guangyuan

(*Dept. of Math.*,*Xinjiang University*,*Urumqi* 830046)

Abstract Another form of multivariate Γ distribution is proposed in view of thinking of altering shape parameter, but not scale parameter. In addition, its properties and the relation between it and multivariate normal distribution are given.

Keywords Density Function, Multivariate Γ Distribution, Characteristic Function.
Subject Classification (CL)O211;(1991MR)60E05.