第16卷 第2期 强 激 光 与 粒 子 束 Vol. 16, No. 2
2004年2月 HIGH POWER LASER AND PARTICLE BEAMS Feb., 2004

文章编号： 1001-4322(2004)02-0219-04

束流物理学的量子方法初探*

夏国兴[1,2]， 夏佳文[3]， 武军霞[3]， 殷学军[3]， 刘 伟[3]， 杨建成[3]

(1. 北京大学 重离子物理研究所,北京 100871；2. 重离子物理教育部重点实验室,北京 100871；
3. 中国科学院 近代物理研究所,甘肃 兰州 730000)

摘 要： 量子束流物理学是近年来发展起来的处理束流传输的全新方法,它是经典束流物理学的有益补充。介绍了量子束流物理学的热波模型和基于狄拉克方程的相对论电子束磁透镜量子理论,并与经典束流物理学方法进行了比较。

关键词： 量子束流物理学； 经典束流物理学； 量子效应

中图分类号： O413； TL56 **文献标识码：** A

束流物理是研究带电粒子束流在特定电磁场中的传输特性的一门学科,具体涉及束流的聚焦、成形、与外界电磁场或其它粒子间的相互作用等,它是加速器物理中极为重要的组成部分。随着加速器束流粒子能量的提高和束亮度的增加,粒子的一些量子特性开始显现出来。这主要体现在束流传输中的量子效应,强场作用下的束流现象等。目前,一些加速器物理学家已经开始将目光落在这一激动人心的新领域,他们把研究这一新领域的学科称为"量子束流物理学",就是采用量子力学的方法来研究束流传输现象。

当一个由大量粒子组成的物理体系开始呈现波动性时,或者当波开始呈现粒子性时,我们称其具有量子效应。在加速器中,粒子束的 De Broglie 波长可以表为[1]

$$\lambda_{\mathrm{db}} = h/2\pi p = h/2\pi\gamma m_0 c_0 \tag{1}$$

式中:$h/2\pi$ 为 Planck 常数;p 为粒子的动量大小;γ 为粒子的相对论能量因子;m_0 为粒子的静止质量;c_0 为真空中的光速。

通常,De Broglie 波长的数值远小于加速管腔体或加速器磁铁的孔径,并且在同步辐射中,产生的辐射波也具有低能和长波长的特点,所以束流粒子的波动性并不明显,因此,利用经典物理学方法便可以成功解决束流动力学问题。但是随着粒子束能量的提高,亮度的增加,要求加速器具有更高的加速梯度,更小的束流孔径和相空间,束流中的量子效应就变得越来越明显[2],如强场作用下电子的自旋等。同时,在强流束的传输中,存在许多经典力学难以解决的问题,如束内散射效应、空间电荷效应、粒子的强场聚焦等等,这些现象通常被认为是产生束晕效应(halo)的主要原因,而束晕的产生,使得加速器束流大量损失。为了更清楚地了解这种效应,需要探索和发展一套全新的方法,即量子束流物理学,而传统的经典束流物理学是量子束流物理学在低速,弱场情况下的近似。

从微观上说,任何一个物理体系都是量子化的。在量子力学中,对一个物理体系的研究通常使用波函数,即用 Schrödinger 方程来描述,它可以表征物理体系的状态。与此相对应,在束流光学研究中,也可以采用波函数描述带电粒子束流的状态。因此传统的粒子与电磁场间的相互作用可以用"粒子-波"间的相互作用来处理。Schrödinger 方程中的 Planck 常数 $h/2\pi$ 在量子束流物理中可以用束流归一化发射度 ε_{n} 来代替,根据费曼理论[3],从而得到束流波函数,即类 Schrödinger 方程为

$$\mathrm{i}\varepsilon_{\mathrm{n}}\partial_t\psi = -\frac{\varepsilon_{\mathrm{n}}^2}{2m}\partial_x^2\psi + U(x,t)\psi \tag{2}$$

线性情况下,$U(x,t)$ 与束流密度 $|\psi|^2$ 无关。这里 ε_{n} 为束流在横向的归一化发射度,由下式决定

$$\varepsilon_{\mathrm{n}} = m_0 c_0 \gamma\beta\tilde{\varepsilon} \tag{3}$$

式中 $\tilde{\varepsilon}$ 为通常考虑的发射度。因此粒子的 De Broglie 波长为

$$\lambda = \varepsilon_{\mathrm{n}}/p \tag{4}$$

* 收稿日期 2003-06-25； 修订日期 2003-09-20
作者简介 :夏国兴(1973—),男,博士后,主要从事加速器束流物理和自由电子激光研究。

以下介绍量子束流物理学的最新进展，主要是以 R. Fedele 为代表的热波模型和以 R. Jangannath 为代表的基于 Dirac 方程的磁透镜量子理论，并与经典的束流物理学进行了比较。

1 热波模型的描述

R. Fedele 认为带电粒子束与外界电磁场之间的相互作用类似于量子光学中的粒子与外界热源间的相互作用，且其相互作用可以用波函数来描述[4,5]。因此，R. Fedele 等人建立了一个类似于量子力学中 Schrodinger 方程的类束流动力学方程，用以讨论束流的传输特性，这种模型认为发射度是粒子束热运动的必然结果。

具有一定发射度的相对论带电粒子束与周围介质之间相互作用的横向动力学方程可以描述为

$$\mathrm{i}\varepsilon_{\mathrm{n}}\frac{\partial\psi}{\partial z}=-\frac{\varepsilon_{\mathrm{n}}^2}{2}\nabla_{\perp}^2\psi+U\psi \tag{5}$$

式中：z 为束流粒子的传输方向，在柱坐标系(r,z,ϕ)下，二维横向梯度 $\nabla_{\perp}$ 表示为

$$\nabla_{\perp}^2\psi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \tag{6}$$

且有

$$U(r,z,\phi)=u(r,z,\phi)/m_0\gamma\beta^2c_0^2 \tag{7}$$

式中：m_0 和 $\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}$ 分别为粒子的静止质量与相对论因子；$\beta=v/c_0$ 为粒子的相对速度；u 为粒子与外场的相互作用势能。

在上述波函数的描述下，束流横截面密度分布满足

$$\sigma(r,z,\phi)=N|\psi(r,z,\phi)|^2 \tag{8}$$

式中 N 为横截面上粒子的总数目。波函数的归一化条件为

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\infty}|\psi|^2r\mathrm{d}r=1 \tag{9}$$

(8)式描述了粒子横向密度分布。与方程(5)相耦合的横向力场方程为

$$F_{\perp}=-m_0\gamma\beta^2c_0^2\nabla_{\perp}U=-\nabla_{\perp}u \tag{10}$$

(5)式与(10)式联立描述了粒子束的变化情况，即为旁轴近似下带电粒子束流光学的波函数描述。为了描述束流在加速器中的传输情况，定义束流半径为

$$R_{\mathrm{b}}(z)=\left|\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\infty}r^2|\psi|^2r\mathrm{d}r\right|^{1/2} \tag{11}$$

动量的平均值为

$$p(z)=\left|\frac{\varepsilon_{\mathrm{n}}^3}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\infty}|\nabla_{\perp}\psi|^2r\mathrm{d}r\right|^{1/2} \tag{12}$$

由此得到一个类似于量子力学测不准原理的公式

$$pR_{\mathrm{b}}\geqslant\varepsilon_{\mathrm{n}} \tag{13}$$

对于对撞机中的束流，在作用点 z^* 处的局部亮度，即单位截面、单位时间内发生的事件个数为

$$\Lambda^*=\frac{2\chi N_1N_2}{4}|\psi(r,\phi,z^*)|^2 \tag{14}$$

式中：χ 为重复率；N_1 和 N_2 分别为两束对撞束流的粒子数目；$\psi(r,\phi,z^*)$为在相互作用点处的总的波函数。

对于稳定束团的纵向运动，忽略辐射阻尼与量子激发，纵向运动波函数的类 Schrödinger 方程可以写成

$$\mathrm{i}\varepsilon_{\mathrm{n}}\frac{\partial\psi}{\partial s}=-\frac{1}{2}\varepsilon_{\mathrm{n}}^2\eta\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+U\psi \tag{15}$$

式中：$s=c_0t$，t 为粒子的运动时间；$\eta=(\Delta\omega/\omega_0)/(\Delta E/E_0)$；$\omega_0=c_0/R_0$；$R_0$ 为束流在同步加速器中的回旋半径；$(\Delta\omega/\omega_0)$为回旋频率的相对变化量；$\Delta E/E_0$ 为能量散度；E_0为同步粒子的能量。并且有

$$U=\frac{1}{c_0T_0E_0}\int_0^{\infty}q\Delta V\mathrm{d}x \tag{16}$$

式中 ΔV 为粒子在环中转过一圈后的电压变化。因此，束流的纵向密度可以表示为

$$\lambda(x,s)=\lambda_0|\psi(x,s)|^2 \tag{17}$$

且 $\lambda_0=N_t/R_0$，N_t 为束团中总粒子数。波函数 ψ 的解满足条件

$$\psi(-\pi R_0,s)=\psi(\pi R_0,s) \tag{18}$$

$$\partial_x\psi(-\pi R_0,s)=\partial_x\psi(\pi R_0,s) \tag{19}$$

且有

$$N_t^2 = \int_{-\pi R_0}^{\pi R_0} |\psi(x,s)|^2 \mathrm{d}x \tag{20}$$

束流的平均能量为

$$\bar{E} = \frac{\varepsilon_n^2 \eta^2}{2N_t^2}\int_{-\pi R_0}^{\pi R_0} \left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|^2 \mathrm{d}x + \frac{\eta}{N_t^2}\int_{-\pi R_0}^{\pi R_0} |\psi|^2 U \mathrm{d}x \tag{21}$$

束团的有效长度为

$$\sigma_e(s) = \left(\frac{1}{N_t^2}\int_{-\pi R_0}^{\pi R_0} x^2 |\psi|^2 \mathrm{d}x\right)^2 \tag{22}$$

动量的期待值为

$$\sigma_p(s) = \frac{\varepsilon_n^2}{N_t}\int_{-\pi R_0}^{\pi R_0} |\psi|^2 \mathrm{d}x \tag{23}$$

且有类似于量子力学的测不准原理

$$\sigma_e \sigma_p \geqslant \varepsilon_n^2/2 \tag{24}$$

由此可见，采用类 Schrödinger 方程，也同样能得到束流物理中的测不准关系。另外，热波模型还成功地计算出了对撞机的球形偏差，但对于束流的包络等经典参量并没有给出令人满意的结果，因此还需要进一步的发展和完善。

2　基于 Dirac 方程的相对论电子束磁透镜量子理论

R. Jagannathan 等人将 Dirac 方程应用到电子光学的束流传输中，然后将其应用到实际的束流传输器件中，得到了在单粒子动力学基础上，基于 Dirac 方程的电子束在电磁透镜中的四分量自旋波函数方程[6~8]。一般情况下，在处理电子显微镜束流光学时，电子的自旋被看成一个次要的量而不予考虑，采用半经典非相对论 Glaser 理论来处理。这主要是因为电子显微镜中的电磁场不是很强，因而对电子自旋产生的影响可以忽略。但是在强场的作用下，就必须考虑电子的自旋。此外，对于低能的电子束，由于 De Broglie 波长变大，其波动性开始显示出来，因此考虑自旋的 Dirac 方程为我们讨论束流传输提供了一种新的思路。

对于带电量为 q，静止质量为 m，在静态电磁场 $(\phi(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}))$ 中运动的带电粒子，其四分量自旋波函数的 Dirac 方程为

$$\frac{\mathrm{i}h}{2\pi}\frac{\partial \psi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = (mc_0^2\beta - e\,\phi + c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}})\psi(\boldsymbol{x},t) = \hat{H}_D \psi(\boldsymbol{x},t) \tag{25}$$

式中，$\hat{H}_D$ 为

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\pi}} = \hat{\boldsymbol{p}} + (e/c)\boldsymbol{A} \tag{26}$$

式中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$；$\boldsymbol{\sigma}$ 为量子力学中的 Pauli 矩阵，其三个分量分别为

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

考虑具有平均动量 p_0 的准单能电子束平行入射，由于电磁透镜的作用，方程(25)的解为

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = \int_{p_0-\Delta p}^{p_0+\Delta p} \mathrm{d}p \exp[-(\mathrm{i}2\pi/h)E(p)t]\,\varphi(\boldsymbol{x},p) \tag{28}$$

其中 $\varphi(\boldsymbol{x},p)$ 为电子束波函数 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ 的 Fourier 分量，且 $p = |\boldsymbol{p}|$，$\Delta p \ll p$，$E(p) = (m^2c^4 + c^2p^2)^{1/2}$。为了得到电子束波函数 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ 随 z 轴的变化情况，引入一个传播因子 $\hat{G}(z'', z'; p)$，对 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ 进行 Fourier 变换，经过一系列复杂的数学处理，得到了所需要的束流光学形式的方程，即

$$\frac{\mathrm{i}h}{2\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \hat{H}\varphi \tag{29}$$

式中 $\hat{H}$ 为含自旋项的 Hamilton 函数，此方程与 Schrödinger 方程相类似。R. Jagannathan 将相对论电子束在电磁场中的四分量自旋波函数的 Dirac 方程通过适当变形，得到了以束流纵向位置 z 为独立变量的束流动力学方程。将这一结论应用到轴对称的螺线管磁透镜中，能够计算出束流的输出流强和透镜的焦距等物理参量。

3 与经典束流物理的比较及结论

量子束流物理学是经典束流物理学的进一步发展和深化。在经典束流物理中，横向发射度和纵向动量散度是极为重要的物理量。在强流束的传输中，束流的发射度不能无限的被压缩下去。因为一旦相空间内束流粒子密度增大，许多非线性因素就会突出，引起束流发射度和动量散度的增长。目前还没有一套成熟的理论来解释这一非线性效应。一般的，在经典束流光学中，处理束流传输时有两种方法：其一，忽略粒子间的相互作用，采用单粒子模型，得到束流动力学方程，进而得到粒子束的几何参量，如发射度和动量散度等；其二，利用统计物理学的处理方法，根据 Boltzmann 方程和 Vlasov 方程，得到粒子束的电流强度、电流密度分布和动量分布等物理参量。

R. Fedele 等人则利用多粒子运动的 Vlasov 方程得到了类量子力学的 Schrödinger 方程，用来描述具有发射度的相对论带电粒子束与周围介质之间的相互作用，用类 Schrödinger 方程得到的波函数来描述相对论粒子束的状态，其中的发射度是由于束流粒子的热运动而产生的。因此，方程中的 Planck 常数 $h/2\pi$ 由归一化发射度 ε_n 所代替。热波模型还得到了类似量子力学测不准原理的数学表述，用于表征束流的尺寸和动量散度不能无限制地压缩，而是受到束流发射度的制约。R. Fedele 等人提出的热波模型，不仅可以成功描述相对论束流传输的一般结果，而且还能够描述加速器中亮度的估算以及束流与周围环境之间的非线性相互作用[3]。R. Jagannathan 等人基于单粒子动力学，根据束流光学中的 Dirac-Pauli 方程发展了一整套量子力学公式，并将其应用到实际的传输器件如磁四极透镜和斜四极透镜中，得到了束流的传输矩阵和束流动力学方程，其中包含了自旋量的贡献。在束流动力学方程中，波函数能够最直接的反映出束流的演变情况。

参考文献：

[1] Chen P. Overview of quantum beam physics[A]. ICFA Beam Dynamics Newsletter[C]. 1996, (12):46.

[2] Chen P. Quantum aspects of beam physics[A]. Proceedings of Advanced ICFA Beam Dynamics Workshop[C]. Monterey, California, USA, 1998.

[3] Fedele R, Miele G. Spherical aberration in the thermal-wave model for luminosity estimates in particle accelerators[J]. *Phys Rev A*, 1992, **46**(10): 6634—6639.

[4] Fedele R, Miele G. Thermal-wave model: a Schrodinger-like equation for charged-particle beam dynamic[J]. *Phys Lett*, 1993, **A179**:407.

[5] Fedele R, Galluccio F, Miele G, et al. Aberrations in the thermal wave-model: comparison with a numerical tracking code[J]. *Phys Lett*, 1994, **A185**:93.

[6] Khan S A, Jagannathan R. Quantum mechanics of charged-particle beam transport through magnetic lenses[J]. *Phys Rev E*, 1995, **51**(3):2510—2515.

[7] Jagannathan R. Quantum theory of electron lenses based on the Dirac equation[J]. *Phys Rev*, 1990, **A42**:6674.

[8] Jagannathan R, Simon R, Sudarshan E C G, et al. Quantum theory of magnetic electron lenses based on the Dirac equation[J]. *Phys Lett*, 1989, **A134**(8):457—464.

Preliminary investigation of quantum methodology in beam physics

XIA Guo-xing[1,2], XIA Jia-wen[3], WU Jun-xia[3], YIN Xue-jun[3], LIU Wei[3], YANG Jian-cheng[3]

(1. *Institute of Heavy Ion Physics, Peking University, Beijing* 100871, *China*;

2. *Key Laboratory of Heavy Ion Physics, Ministry of Education, Beijing* 100871, *China*;

3. *Institute of Modern Physics, The Chinese Academy of Sciences, P. O. Box* 31, *Lanzhou* 730000, *China*)

Abstract: Beam physics is a subject which studies the features of the beam particles transmission in electromagnetic field. It includes beam focusing, shaping and interaction with other particles. With the upgrade of beam energy and luminosity, some quantum aspects of beam particles, such as quantum effect of beam halo and spin effect on beam transport etc., seem important. Recently some accelerator physicists paid more attention on this field and named it as Quantum Beam Physics. In this paper, two different quantun methods are introduced and compared with the classical physical method.

Key words: Quantum beam physics; Classical beam physics; Quantum effect