

文章编号: 100124322 (2004) 1021331203

带电粒子束传输中横向发散的类 ABCD 定律^x

陈宝信¹, 张爱菊¹, 孙别和²

(1. 浙江科技学院 理学系, 浙江 杭州 310023; 2. 兰州大学 现代物理系, 甘肃 兰州 730000)

摘 要: 傍轴近似下带电粒子束传输可完全类比于近轴光线椭圆高斯光束的传播。基于这种类比, 建立了带电粒子束传输中横向发散的复曲率半径的类 ABCD 定律, 引入了带电粒子在横向的复曲率半径的概念, 并以复曲率半径的实部表征带电粒子束的敛散特性, 虚部表征带电粒子束的束斑大小。由此提出: 带电粒子束整体可被看作类椭圆高斯光束, 其发射度与光束波长的作用相同。通过这种类比可知, 在适宜的加速器环境下, 理论上可能产生相干带电粒子束。

关键词: 类 ABCD 定律; 带电粒子束传输; 横向发散

中图分类号: TL501 **文献标识码:** A

众所周知, 电子光学是在带电粒子运动与光线传播行为相似的基础上建立起来的, 这种类比表明: 椭圆高斯光束的传播与带电粒子传输是相似的, 我们可以把已经成功运用于带电粒子束传输的一些重要概念, 如相空间椭圆、2 矩阵扩展到椭圆高斯光束的传播中, 这样椭圆高斯光束的传播就可用 2 矩阵变换来描述^[1]。而近轴近似下椭圆高斯光束传播的传统表述方法, 是基于波动方程慢包络近似的关于椭圆高斯光束复曲率半径的 ABCD 定律^[2]。椭圆高斯光束传播的这两种表述方法的等效性意味着对于带电粒子束传输中的横向发散也能够建立类 ABCD 定律, 其作用和 2 矩阵变换等效。在本文中, 我们建立了带电粒子束传输中横向发散的类 ABCD 定律, 并通过带电粒子束横向传输与椭圆高斯光束传播的类比, 提出了在适宜的加速器环境中可能产生相干带电粒子束的猜想。

1 高斯光束传输的基本理论分析

首先考虑椭圆高斯光束传输的相空间模型, 对于真空中沿光轴传播的 2 维椭圆高斯光束, 在与光轴垂直的两个方向的传播行为是互相独立的, 因此, 我们仅考虑其中一个方向的传播, 另一个方向的传播可按相同的方法处理。采用直角坐标系, z 代表光轴方向, x 代表光线沿垂直于光轴方向的位移, x 方向的椭圆高斯光束可用相平面 (x, x) 的相椭圆来表示^[1]

$$2_2 x^2 - 2_{12} x x + 1_1 x^2 = \frac{2}{x} \quad (1)$$

或写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_1 & 1_2 \\ 1_2 & 2_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = 1 \quad (2)$$

其中 $1_1 > 0$, $2_2 > 0$ 且满足

$$1_1 2_2 - 1_2^2 = \frac{2}{x} > 0 \quad (3)$$

式(2)还可简写为

$$X^T \begin{bmatrix} 1_1 & 1_2 \\ 1_2 & 2_2 \end{bmatrix}^{-1} X = 1 \quad (4)$$

式中: $X = \begin{bmatrix} x & x \end{bmatrix}^T$, $x = dx/dz$; $\begin{bmatrix} 1_1 & 1_2 \\ 1_2 & 2_2 \end{bmatrix}$ 为椭圆高斯光束 x 方向的特性矩阵, 其物理意义为: $\sqrt{1_1}$ 表示光束在 x 方向的光斑半径, $\sqrt{2_2}$ 表示光束在 x 方向的半张角。当 $1_2 = 0$ 时, 相椭圆在相平面 (x, x) 为正椭圆, 对应光束光斑半径为极小, 即在 x 方向是束腰; 当 $1_2 < 0$ 时, 相椭圆在相平面 (x, x) 为斜椭圆, 对应光束在 x 方向是收敛的; 当 $1_2 > 0$ 时, 相椭圆在相平面 (x, x) 为斜椭圆, 对应光束在 x 方向发散的。对于给定的椭圆高斯光束, 束矩阵可用该方向的光斑半径 w_x 和波前曲率半径 R_x 来表示: $1_1 = \frac{2}{x}$, $1_2 = \frac{2}{x} \frac{x}{R_x}$, $2_2 = (\frac{x}{w_x})^2 + (\frac{x}{R_x})^2$ 。因此, 束矩阵可写为

^x 收稿日期: 2003203225; 修订日期: 2004205212

作者简介: 陈宝信(1966—), 男, 甘肃天水人, 博士, 主要从事物理教学及带电粒子束光学的研究; E2mail: chenbx @zust. edu. cn.

$$x = \begin{bmatrix} w_x^2 & w_x^2/R_x \\ w_x^2/R_x & (x/w_x)^2 + (w_x/R_x)^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

当通过光学系统时,椭圆高斯光束沿 x 方向的相空间变换为

$$x = M_x x_0 M_x^T \quad (6)$$

式中: x_0 和 x 分别为在光学系统入口处和出口处的椭圆高斯光束的束矩阵; M_x 是光学系统在 x 方向的传输矩阵。

在激光光学的波动模型中,用波前复曲率半径 q_x 和半张角 x 来表征椭圆高斯光束

$$1/q_x = 1/R_x - i/w_x^2 \quad (7)$$

$$x^2 = (w_x/R_x)^2 + (x/w_x)^2 \quad (8)$$

式中: λ 为椭圆高斯光束的波长。由式(8)可看出:如果将高斯光束看成球面波,则每一位置的张角都可以用几何张角来代替,而在这个位置的衍射可看成是光斑半径 w_x 的有限扩展。通过光学系统后 x 方向的椭圆高斯光束变换由 $ABCD$ 定理给出

$$q_x = \frac{Aq_{x0} + B}{Cq_{x0} + D} \quad (9)$$

式中: q_{x0} 和 q_x 分别为在光学传输系统入口处和出口处椭圆高斯光束沿 x 方向的复曲率半径; A, B, C, D 为光学系统沿 x 方向传输矩阵 M_x 的矩阵元。联立式(8)和式(5)有

$$(x/w_x)^2 + (w_x/R_x)^2 = (w_x/R_x)^2 + (x/w_x)^2$$

即椭圆高斯光束的传播 2 矩阵变换和 $ABCD$ 定律的等价条件为, $x = x$, x 为相椭圆面积。

2 带电粒子束的传输理论分析

下面考虑傍轴带电粒子束传输,我们假设带电粒子束足够稀疏以致于空间电荷效应可以不予考虑, z 为束轴方向,仅讨论带电粒子束沿 x 方向的传输, y 方向的情形可同样处理。类比椭圆高斯光束,用 x 代替 w_x , x 为带电粒子束的发射度,同样引入带电粒子束的波前复曲率半径 P_x 和半张角 x 来表征带电粒子束

$$1/P_x = 1/R_x - i/x/w_x^2 \quad (10)$$

$$x^2 = (w_x/R_x)^2 + (x/w_x)^2 \quad (11)$$

式中: w_x 为带电粒子束斑半径; R_x 为带电粒子束的波前曲率半径。在这种新的描述方法中带电粒子束整体被看作是一类椭圆高斯光束,类衍射效应使带电粒子束横向发射,导致束斑半径有限扩展,因此带电粒子束的发射度 x 与波长 λ 的作用相同。当 R_x 趋于无穷时,带电粒子束束斑为极小,即在 x 方向为束腰,张角为 x/w_x ; 当 $R_x < 0$ ($R_x > 0$) 时,带电粒子束在 x 方向收敛(发散)。因此,复曲率半径 P_x 的物理意义为:实部表征带电粒子束的敛散特性,虚部表征带电粒子束的束斑大小。光学传输系统对带电粒子束的变换就表现为对其复曲率半径的变换,类比于椭圆高斯光束传输的复曲率半径变换关系,通过光学传输系统后带电粒子束在 x 方向的复曲率半径的变换为

$$P_x = \frac{AP_{x0} + B}{CP_{x0} + D} \quad (12)$$

式中: P_{x0} 和 P_x 分别为在传输系统入口处和出口处带电粒子束沿 x 方向的复曲率半径; A, B, C, D 为传输系统在 x 方向的传输矩阵的矩阵元。式(12)就是带电粒子束传输的类 $ABCD$ 定律。

作为验证类 $ABCD$ 定律和应用举例,我们考虑带电粒子束在传输系统中沿 x 方向的腰 2 腰传输,在传输系统入口处带电粒子束 x 方向的复曲率半径和张角分别为

$$1/P_{x0} = -i/x/w_{x0}^2 \quad (13)$$

$$x_0 = x/w_{x0} \quad (14)$$

式中: w_{x0} 为带电粒子束在传输系统入口处沿 x 方向的束斑半径。由式(12)可得到带电粒子束在传输系统出口处沿 x 方向复曲率半径的实部和虚部分别为

$$\frac{1}{R_x} \quad \text{Re}\left(\frac{1}{P_x}\right) = \frac{ACw_{x0}^4 + BD^2}{(Aw_{x0}^2)^2 + (B/x)^2} \quad (15)$$

$$\frac{-x}{w_x^2} \quad \text{Im}\left(\frac{1}{P_x}\right) = \frac{(BC - AD) x w_{x0}^2}{(A w_{x0}^2)^2 + (B/x)^2} \quad (16)$$

考虑到传输系统的传输矩阵的行列式为 1, 即 $AD - BC = 1$, 则带电粒子束在传输系统中沿 x 方向腰腰传输方程为

$$AC w_{x0}^4 + BD \frac{2}{x} = 0 \quad (17)$$

$$w_x^2 = A^2 w_{x0}^2 + B^2 \left(\frac{x}{w_{x0}}\right)^2 \quad (18)$$

同时由式(11)可得在出口处沿 x 方向的带电粒子束的半张角

$$\alpha_x = \frac{x}{w_x} (A^2 w_{x0}^2 + B^2 \frac{2}{x})^{-1/2} \quad (19)$$

上述结论与带电粒子束传输的相空间模型的结论完全一致^[3]。

3 讨论和应用前景

在 高能带电粒子束传输系统中, 高密度的束核周围会出现低密度的束晕, 束晕具有再生性和稳定性, 不仅降低了带电粒子束的光学品质, 而且会导致放射剂量超标影响对机器的手工操作。我们提出的带电粒子束的类高斯光束模型认为: 传输系统对带电粒子束的复曲率半径进行变换, 相当于改变了带电粒子束波前的形状, 会出现类衍射现象。因此, 用类衍射效应讨论束晕的形成是一种很有希望的新途径。

带电粒子束具有热运动温度, 因此带电粒子束一般具有有限发射度。通过对带电粒子束的冷却^[4~5], 可使粒子热运动温度降低, 能量和动量分散减少, 发射度减小; 而且, 粒子的德布罗意波长会 λ_{DB} 增长, 当 λ_{DB} 增大到使相邻粒子的德布罗意波叠加在一起时, 则有可能实现带电粒子的玻色-爱因斯坦凝聚, 从而产生相干带电粒子束。类椭圆高斯带电粒子束是具有最小发射度的相干束, 可以肯定相干带电粒子束具有很高的亮度, 很小的能量和动量分散, 因此具有很好的单色性和准直性, 应用前景十分广阔。当然, 带电粒子束一般是费米子, 但实现玻色-爱因斯坦凝聚的可能性并不能被排除, 毕竟在极低温下 He^3 出现长程相互作用并形成超流; 其次, 带电粒子之间还有很强的电磁相互作用, 因此相干带电粒子束的产生依赖于创造性设计的冷却技术、离子源结构和传输系统。

参考文献:

- [1] Fu S N. Phase space model for transmission of light beam[J]. *Chin J Nucl Phys*, 1989, **11**(3): 79~90.
- [2] 魏光辉, 朱宝亮. 激光束光学[M]. 北京: 北京工业学院出版社, 1988. 160—162. (Wei G H, Zhu B L. Optics of laser beam. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1988. 160—162)
- [3] 魏开煜. 带电束流传输理论[M]. 北京: 科学出版社, 1986. 104—107. (Wei K Y. Theory of charged particle beam transport. Beijing: Science Press, 1986. 104—107)
- [4] Reiser M. Theory and design of charged particle beams[M]. New York: John Wiley & Sons, 1994.
- [5] Besser J. Electron cooling[A]. Turner S. CERN95206[C]. Geneva: CERN, 1995, **2**: 673—730.

Analysis of ABCD-like law for charged-particle beam transport with transversal divergence

CHEN Baoxin¹, ZHANG Aiju¹, SUN Biehe²

1. Department of Basic Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China;

2. Department of Modern Physics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

Abstract: It is shown that the propagation of charged-particle beam can be made in complete analogy with the transmission of ellipse-Gaussian light beam in paraxial approximation. Based on this similarity, the ABCD-like law for charged-particle beam transport with transversal divergence is developed by means of a complex curvature radius of charged-particle beam in which its real part shows the beam characteristics of convergent and divergent and its imaginary part shows the beam radius. From this, charged-particle beam as a whole is thought of as a single ellipse-Gaussian light-like beam whose emittance plays the role of wavelength. In particular, this analogy gives an insight that it is hopeful to attain possible coherent charged-particle beam in favorable accelerator environment.

Key words: ABCD-like law; Charged-particle beam transport; Transversal divergence