

文章编号: 1001-4322(2001)05-0641-05

# 有限磁场作用下等离子体圆柱波导中的线性理论\*

李 伟, 魏彦玉, 刘盛纲

(电子科技大学 高能电子学研究所, 四川 成都 610054)

**摘 要:** 考虑了有限磁场的作用, 利用“匹配场法”推导出填充环形等离子体时圆柱波导的色散方程, 并较详细地讨论了等离子体的厚度、密度, 以及所加磁场强度对色散特性的影响, 尤其讨论了等离子体厚度对增长率的影响并得出: 对应最大的增长率有一最佳的等离子体厚度。

**关键词:** 环形等离子体; 色散方程; 有限磁场; 波增长率

**中图分类号:** TN 24 **文献标识码:** A

近年的研究表明, 在相对论返波管<sup>[1]</sup>、介质切伦可夫脉塞<sup>[2]</sup>等相对论器件的慢波作用区中充填适当密度的背景等离子体, 可以有效地提高器件的相互作用效率、工作频率和输出功率<sup>[2,3]</sup>。但等离子体的填充尤其是磁化等离子体的填充将使 TE 模和 TM 模耦合在一起不能单独存在, 而产生 HE 和 EH 模, 磁化等离子体的填充与在真空中或虽有等离子体填充但无磁场相比, 情况大不一样<sup>[4]</sup>。磁化等离子体填充情况下有各种各样的传输波, 这些因素极大地影响注波的相互作用<sup>[5]</sup>, 而且使得问题变得非常复杂。本文在考虑等离子体厚度效应的情况下<sup>[6]</sup>, 推导出了有限磁场下填充圆环状等离子体的圆柱波导的色散方程, 通过数值计算得出对实际有用的分析结果。

## 1 磁化等离子体填充波导中的色散方程

### 1.1 有电子注时的色散方程

图1是填充环形等离子体和加载环形电子注的圆柱波导截面示意图, 其中 Region I 是指环形等离子体与波导壁之间(即  $R_{p2} < r < R_c$ ) 的区域; Region II 是指环形等离子体里面(即  $R_{p1} < r < R_{p2}$ ) 的区域; Region III 是指环形等离子体包围的内部(即  $0 < r < R_{p1}$ ) 的区域。图2是无环形电子注, 只有环形等离子体的波导截面示意图。

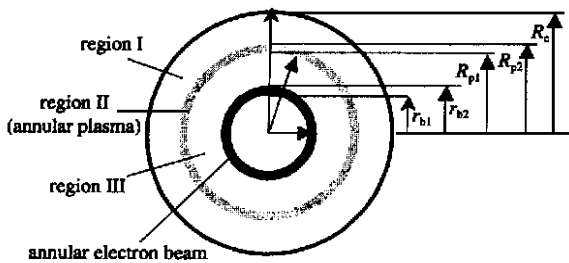


Fig. 1 Diagram of waveguide filled with annular plasma

图1 填充环形等离子体波导截面示意图

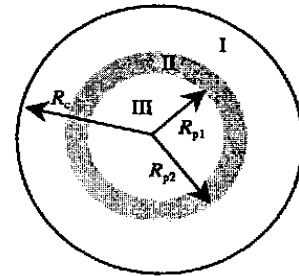


Fig. 2 Diagram of waveguide with no annular electron beam

图2 无环形电子注时波导的截面示意图

磁化等离子体的电介质张量为<sup>[5]</sup>

$$\epsilon = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_1 & -\epsilon_2 & 0 \\ \epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

\* 收稿日期: 2001-04-13; 修订日期: 2001-06-07

基金项目: 国家自然科学基金资助课题(69493500)

作者简介: 李 伟(1966-), 男, 在读博士, 主要从事微波等离子体电子学和高功率微波的研究; E-mail: 2000liwei@263.net

式中:  $\epsilon_1 = 1 - \frac{\xi^2(1-i\delta)}{(1-i\delta)^2 - \tau^2}$ ;  $\epsilon_2 = \frac{i\tau\xi^2}{(1-i\delta)^2 - \tau^2}$ ;  $\epsilon_3 = 1 - \frac{\xi^2}{1-i\delta}$ ;  $\tau = \frac{\omega_c}{\omega}$ ;  $\delta = \frac{\gamma_{\text{eff}}}{\omega}$ ;  $\xi = \frac{\omega_p}{\omega}$ ;  $\omega_p$ ,  $\omega_c$ ,  $\gamma_{\text{eff}}$  分别为等离子体频率、电子回旋频率和电子有效碰撞频率;  $i$  为单位虚数。假定等离子体波导中波的传播因子为  $\exp\{i\omega z - \gamma z + im\theta\}$ , 将电磁波在等离子体介质中的传播的麦克斯韦方程在圆柱坐标系中分解, 并且用纵向场分量  $E_z$  和  $H_z$  表示横向场分量,  $J_z$  是  $z$  方向的电流密度,  $\rho$  表示电荷密度, 可得下面注-波相互作用方程

$$\nabla^2 E_z + aE_z = bH_z + i\omega\mu_0 J_z - \frac{ik_z}{\epsilon_1} \rho \quad (1)$$

$$\nabla^2 H_z + cH_z = dE_z - (\nabla \times \mathbf{J})_z - \frac{\omega\epsilon_2}{\epsilon_1} \rho \quad (2)$$

式中:  $a = (\gamma^2 + k^2\epsilon_1)\epsilon_3/\epsilon_1$ ;  $b = i\omega\mu_0\gamma\epsilon_3/\epsilon_1$ ;  $c = \gamma^2 + k^2(\epsilon_2 + \epsilon_3)/\epsilon_1$ ;  $d = -i\omega\epsilon_2\gamma\epsilon_3/\epsilon_1$ ;  $k^2 = \omega^2\epsilon_0\mu_0 = \omega^2/c^2$ ;  $\nabla^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 。

在此种波导中电磁波不能独立的分为 TE 波和 TM 波, 而是互相耦合的混杂电磁波模式。

当  $J_z = 0$ , 而  $\rho = 0$ , 即无电子注时, 此时  $\tau = 0$ ;  $\epsilon_2 = 0$ ;  $\epsilon_3 = \epsilon_1 = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ ;  $a, b, c, d$  变为  $a_0, b_0, c_0, d_0$ 。我们得到

$$\nabla^2 E_{z0} + a_0 E_{z0} = b_0 H_{z0} \quad (3)$$

$$\nabla^2 H_{z0} + c_0 H_{z0} = d_0 E_{z0} \quad (4)$$

(1) 式和 (3) 式分别乘  $E_{z0}^*$  (即  $E_{z0}$  的共轭) 并进行积分相减简化后得

$$\epsilon_3(k_z^2 - k_{z0}^2)P_E - \omega\mu_0(k_z - k_{z0})\epsilon_2 P_{HE} = i\omega\mu_0 \iint E_{z0}^* ds - \frac{ik_z}{\epsilon_1} \iint E_{z0}^* ds \quad (5)$$

其中有参数

$$P_E = \iint E_z E_{z0}^* ds \cong \iint E_{z0} E_{z0}^* ds \quad (6)$$

$$P_{HE} = \iint H_z E_{z0}^* ds \cong \iint H_{z0} E_{z0}^* ds \quad (7)$$

又利用电流连续性方程:  $\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0$ , 可求得

$$J_z = i \frac{\omega\epsilon_0\omega_p^2}{(\omega - k_z v_0)^2} E_z \quad (8)$$

式中:  $\omega_p^2 = \rho_0 e/m_0 \gamma_0^3 \epsilon_0$ ,  $\rho_0$  是电子注平衡状态时的电荷密度;  $\gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$ ;  $\beta_0 = v_0 \sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ ;  $v_0$  是平衡状态时的电子注速度。

利用 (5) 式和 (8) 式可得有电子注时的色散方程为

$$\epsilon_3(k_z^2 - k_{z0}^2)P_E + i\omega\mu_0\epsilon_2(k_z - k_{z0})P_{HE} = \frac{\omega_p^2(\epsilon_3 k^2 - k_z^2)}{(\omega - k_z v_0)^2} P_E \quad (9)$$

当电子注在不同位置时有不同的参数  $P_E$  和  $P_{HE}$  (即 (6) 和 (7) 式) 以及  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 。

## 1.2 无电子注时的色散方程

为了求解有电子注时的色散方程 (9), 得先求解出无电子注时的参量  $k_{z0}, P_E$  和  $P_{HE}$ , 因此考虑在无电子注情况下的“冷”色散方程, 图2是无电子注时的圆柱光滑波导截面示意图, 那么各区域的场表达式可如下写出:

在环形等离子体与波导壁的区域 I: ( $R_{p2} < r < R_c$ )

$$E_z^I = A_1 J_m(k_c r) + A_2 N_m(k_c r) \quad (10)$$

$$H_z^I = A_9 J_m(k_c r) + A_{10} N_m(k_c r) \quad (11)$$

式中:  $k_c^2 = k^2 - k_{z0}^2$

在环形等离子体内部即区域 II: ( $R_{p1} < r < R_{p2}$ )

$$E_z^{II} = A_3 J_m(p_1 r) + A_4 N_m(p_1 r) + A_5 J_m(p_2 r) + A_6 N_m(p_2 r) \quad (12)$$

$$H_z^{II} = A_3 h_1 J_m(p_1 r) + A_4 h_1 N_m(p_1 r) + A_5 h_2 J_m(p_2 r) + A_6 h_2 N_m(p_2 r) \tag{13}$$

式中:  $h_{1,2} = \frac{(\mathcal{Y} + k^2 \epsilon_1) \epsilon_1 / \epsilon_1 - p_{1,2}^2}{i \omega \mu_0 \mathcal{Y} \epsilon_1 / \epsilon_1}$ ;  $p_{1,2}^2 = \frac{1}{2 \epsilon_1} [\mathcal{Y} (\epsilon_1 + \epsilon_2) + k^2 (\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)] \pm \frac{1}{2 \epsilon_1} \{ [\mathcal{Y} (\epsilon_1 - \epsilon_2) + k^2 (\epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)]^2 + 4k^2 \mathcal{Y}^2 \epsilon_1^2 \epsilon_2 \}^{1/2}$ 。

在环形等离子体包围区域III内: ( $0 < r < R_{p1}$ )

$$E_z^{III} = A_7 J_m(k_c r) \tag{14}$$

$$H_z^{III} = A_8 J_m(k_c r) \tag{15}$$

为简便起见, 我们省去了  $E_r, H_r, E_\theta, H_\theta$  分量, 它们可以由  $E_z$  和  $H_z$  导出。

根据边界条件, 在  $r = R_c$  界面:  $E_z^I = 0, E_\theta^I = 0$ ; 在  $r = R_{p2}$  处:  $E_z^I = E_z^{II}, E_\theta^I = E_\theta^{II}, H_z^I = H_z^{II}, H_\theta^I = H_\theta^{II}$ ; 在  $r = R_{p1}$  处:  $E_z^{II} = E_z^{III}, E_\theta^{II} = E_\theta^{III}, H_z^{II} = H_z^{III}, H_\theta^{II} = H_\theta^{III}$ 。

把各场分量(10)~(15)式代入上面的边界条件, 进行数学简化后可用矩阵形式表示为一系数矩阵和  $A_1, A_2, \dots, A_{10}$  矩阵乘形式, 即如下的表示:

$$[D] \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{10} \end{bmatrix} = 0, \quad [D] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & \dots & a_{1,10} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & \dots & \dots & a_{2,10} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{10,1} & a_{10,2} & \dots & \dots & \dots & a_{10,10} \end{bmatrix}$$

[D]为一系数矩阵, 要使方程组有非零解, 须系数行列式为零, 而系数中每项包含有频率  $\omega$  和波数  $k_{z0}$ , 由此可得无电子注时的色散方程为

$$|D| = 0 \tag{16}$$

利用上式(16)可求得  $k_{z0}, H_{z0}, E_{z0}, P_E, P_{HE_0}$  从而利用(9)式可得有电子注时的色散方程, 以及增长率。

## 2 数值计算

首先讨论等离子体密度对注波互作用的影响, 为方便起见, 用下面的参数进行了计算,  $R_{p1}/R_c = 0.42, R_{p2}/R_c = 0.472$ , 等离子体密度分别为  $n_p = 2 \times 10^{13}/\text{cm}^3; n_p = 4 \times 10^{13}/\text{cm}^3; n_p = 6 \times 10^{13}/\text{cm}^3; n_p = 8 \times 10^{13}/\text{cm}^3; n_p = 1 \times 10^{14}/\text{cm}^3$ , 磁场为  $B_0 = 2\text{T}$ 。图3是无电子注时利用(16)式的色散方程画出的不同等离子体密度的色散曲线, 由于归一化坐标, 图中是  $k_{z0}R_c$  和  $\omega R_c/c$  的关系, 由图可见, 随着等离子体密度的提高, 其频率也随之提高。

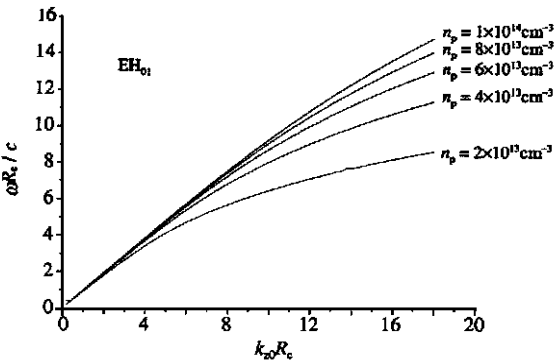


Fig 3 Dispersion relation without electron beam  
图3 无电子注时不同等离子体密度的色散关系

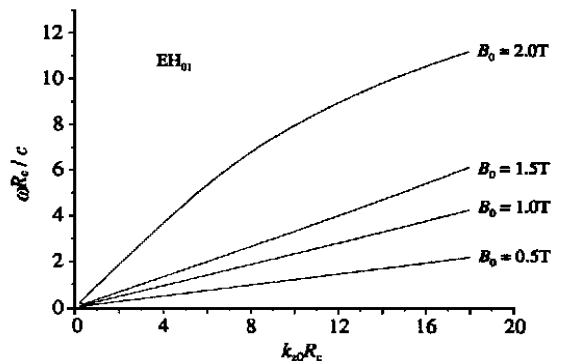


Fig 4 Dispersion curve in different fields  
图4 不同磁场情况下的色散曲线

其次, 讨论了不同引导磁场强度对相互作用的影响, 图4是不同磁场强度下的色散关系。从中清楚地看到磁场强度增大, 其频率也随着提高。

接着讨论了等离子体的厚度对波增长率的影响, 图5是环形等离子体不同厚度时的色散关系, 从中可以看出在相同条件下, 随着等离子体厚度增大, 等离子体的频率逐渐增大到某一最大值然后减小。图6

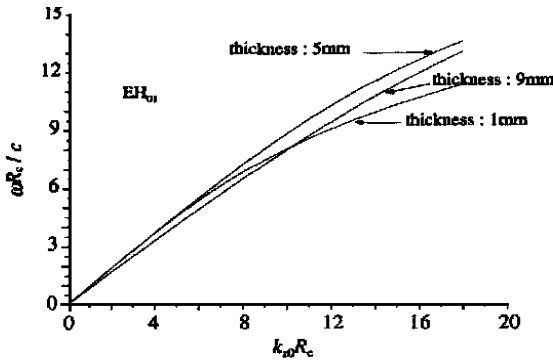


Fig 5 Dispersion relation with different thickness of annular plasma

图5 环形等离子体厚度不同时的色散关系

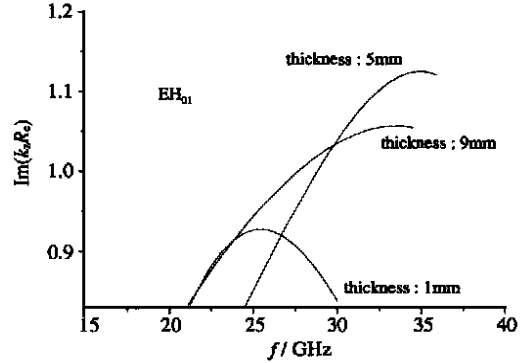


Fig 6 Growth rate with different thickness of annular plasma

图6 环形等离子体厚度不同时的增长率

显示环形等离子体厚度对增长率的影响,可以看出,增长率与等离子体厚度有密切关系,图中是当等离子体密度  $n_p = 4 \times 10^{13}$ ,  $B_0 = 2.0\text{T}$ ,且环形电子注处于等离子体包围区域内,即环形电子注的内外半径小于环形等离子体的内半径,环形等离子体的内半径  $R_{p1} = 7.5\text{mm}$ ,外半径  $R_{p2}$ 逐渐增大,导致等离子体厚度从1mm 逐渐增大到10mm 时的增长率变化曲线。从中可以看到在本实验的条件下,对应等离子体厚度为5mm 时得到最大增长率。(图中为了区分出最大的增长率,因比例关系未画出等离子体厚度为: 6, 7, 4, 3, 8, 2, 10mm 对应的增长率,但它们对应的增长率依次减小)。因此,当等离子体厚度较小时,随厚度增大,增长率升高到一最大值,当等离子体厚度继续增大时,增长率却随厚度增大而减小。这一结论与文献[6]中的结论相一致。

### 3 结 论

通过本文分析讨论得出,等离子体的频率与等离子体密度、厚度、引导磁场的大小等有密切的关系。等离子体密度愈大,磁场愈强对应频率也愈高。对应最大增长率有一最佳等离子体厚度(本例中为: 环形等离子体内半径与波导半径之比为:  $R_{p1}/R_c = 0.42$ , 环形等离子体外半径与波导半径之比为:  $R_{p2}/R_c = 0.7$ )。本文的分析对开展的实验有一定的指导作用。

### 参考文献:

[1] Abe D K, Camel Y, Miller S M, et al Experimental studies of overmoded relativistic backward-wave oscillators[J]. *IEEE Trans on Plasma Sci*, 1998, **26**(3): 591—603

[2] Wu J Q. Cherenkov radiation excited by a thin annular relativistic electron beam in a slow-wave structure consisting of an annular-plasma-filled cylindrical waveguide with a dielectric lining[J]. *Int J Electronics*, 1998, **84**(5): 539—548

[3] 吴坚强, 刘盛纲 填充环形等离子体的介质切伦可夫脉塞[J]. *电子科学学刊*, 1998, **20**(5): 682—688 (Wu J Q, Liu S G Dielectric Cherenkov maser with an annular plasma *Journal of Electronics*, 1998, **20**(5): 682—688)

[4] Shokri B, Ghom i H, Latifi H. Dielectric Cherenkov maser with a magnetically confined plasma column in a dielectric lined slow-wave waveguide[J]. *Physics of Plasmas*, 2000, **7**(6): 2671—2676

[5] 刘盛纲, Lee J K, 祝大军, 等 等离子体波导中电磁波传输理论[J]. *中国科学*, 1996, **E26**(4): 348—363 (Liu S G, Lee J K, Zhu D J, et al Theory of wave propagation along waveguide filled with plasma *Science in China*, 1996, **E26**(4): 348—363)

[6] 宫玉彬, 王文祥 等离子体圆柱波导慢电磁波的激励[J]. *电子科学学刊*, 1996, **18**(3): 298—303 (Gong Y B, Wang W X. Excitation of slow wave in a plasma cylindrical waveguide *Journal of Electronics*, 1996, **18**(3): 298—303)

[7] 陈 希, 谢文楷, 刘盛纲 电子注在等离子体中的运动及传输特性[J]. *强激光与粒子束*, 1998, **10**(1): 145—149. (Chen X, Xie W K, Liu S G electron beam motion and transmission properties in plasma *High power laser and particle beams*, 1998, **10**(1): 145—149)

[8] 刘濮鲲, 熊彩东, 刘盛纲 一种新的等离子体脉塞系统[J]. *物理学报*, 1997, **46**(5): 892—896 (Liu P K, Xiong C D, Liu S G A new plasma maser scheme *China Phys Soc*, 1997, **46**(5): 892—896)

## Linear theory of plasma cylindrical waveguide in a finite magnetic field

L I Wei, WEI Yan-yu, L U Sheng-gang

(Institute of High Energy Electronics, University of Electronic Science and Technology, Chengdu 610054, China)

**Abstract** The dispersion equation on a cylindrical waveguide having an annular plasma sheet is derived under the condition of limited magnetic field. The different plasma density, thickness, and field intensity influence to the plasma frequency, especially the influences of plasma thickness on depressive characteristics and interaction growth rate are discussed, and the conclusion is obtained that there is a perfect thickness to get the biggest interaction rate.

**Key words** annular plasma; dispersion equation; finite magnetic field; growth rate of the wave

### 第 13 届脉冲功率会议暨第 28 届等离子体科学会议在美国召开

第 13 届脉冲功率会议(The 13<sup>th</sup> IEEE International Pulse Power Conference)和第 28 届等离子体科学会议(The 8<sup>th</sup> International Conference on Plasma Science)合成一个国际会议: 脉冲功率等离子体科学 2001 会议(PPPS-2001), 于 2001 年 6 月 18~22 日在美国 Las Vegas 举行。这是一次空前盛大的会议, 提交会议的摘要来自 29 个国家, 共有 907 篇。会议注册人数达 812 人。美国提交论文 415 篇, 遥遥领先其它国家; 俄罗斯 168 篇居第二; 日本 60 篇居第三; 中国提交论文 30 篇(包括台湾、香港在内), 居第五。会议讨论的题目分八大类: “基础研究和诊断”; “微波发生器和相互作用”; “带电粒子源和束”; “高能密度物理”; “脉冲功率开关与器件”; “在商业和工业上的应用”; “脉冲功率源”; “脉冲功率系统”。在八大类 40 个专题中, “快速 Z-pinch 及辐射源”提交的摘要有 83 篇, 居各专题之首; 其次是“高功率微波”、“爆炸功率发生器”、“在医学、生物、环境领域中的应用”, 各专题投稿都在 50 篇左右。上述几个专题是此次会议讨论的热点。

美国 Sandia 国家实验室介绍了在 Z 机上进行的高能光子 K 层 X 射线辐射标定; 研究 K 层 X 射线产额和原子序数的关系; 进行了在 5MA 电流驱动下氩气双层 Puff-Gas Z-pinch K 层 X 射线辐射实验等。他们还进行了金属丝负载从固体-液体-蒸汽、等离子体演变过程的计算机模拟研究。美国 Los Alamos 国家实验室研制的 Atlas 装置于 2000 年 8 月完成, 24 个单元初步实验放电电流达 28.6MA。俄罗斯充氢气的气体火花开关, 重复频率达 3.5kHz, 并成功用于紧凑型高重复率脉冲功率发生器。光导体开关、全固体重复脉冲功率装置等都得到了进一步的发展。(清华大学 韩 旻, 王新新)

### 《强激光与粒子束》1999 年的总被引频次及其在全国科技期刊中的位置

据中国科技信息研究所 2001 年 1 月出版的《中国科技期刊引证报告》(扩刊版)上公布的数据表明:《强激光与粒子束》自 1989 年创刊以来所发表的论文中, 被 1999 年 2804 种自然科学学术和技术类刊物(约占当年这两类刊物的 90%)共引用了 117 次, 在当年这些科技期刊中名列第 860 位, 而在其中的 41 种“物理”类专业期刊中名列第 17 位。

一种刊物的总被引频次能够说明该刊被科技工作者使用和重视的程度以及在科技交流中的地位和作用。此值越大, 表明该刊能频繁地被其他刊物所引用, 从而也表明刊物具有较高的学术价值、使用价值和实际价值。因此, 它与刊物的影响因子, 都是测度刊物的实际使用量、评价刊物学术质量和水平、选择核心期刊与文献数据库来源期刊等两个最重要的指标。(西南交大 范文田)