

文章编号: 1001-4322(2002)01-0156-05

有限积分理论(FIT)及其在腔体计算中的应用*

李智慧, 唐靖宇, 张 伦

(中国科学院 近代物理研究所, 甘肃 兰州 730000)

摘 要: 通过介绍麦克斯韦方程的离散过程, 简单介绍了有限积分理论(Finite Integration Theory)。该理论直接以电场强度和磁感应强度为未知量, 采用两套互相正交的网格, 将场矢量离散为不同网格点上的一系列分量, 将矢量积分方程转化为一组线性方程组。通过对 SFC 高频腔体模拟的实例, 可以看出, 此方法在腔体本征频率、 Q 值及腔体并联阻抗等腔体参数计算中具有叫高的精度, 说明了基于 FIT 的 MAFIA 程序在腔体模拟中的可靠性。

关键词: FIT; 模拟; SFC; 高频腔体

中图分类号: TL 503

文献标识码: A

自 1865 年麦克斯韦奠定了经典电磁理论以来, 电磁场理论及其应用取得了长足的发展。但是, 由于实际电磁问题的复杂性, 相当长时期以来, 从解析方法着手进行的分析进展不大, 难以获得满意的解析结果。六十年代开始, 计算机和计算技术的飞速发展, 为电磁场数值分析的广泛应用奠定了基础, 相继发展了有限差分法、有限元法、矩量法和模拟电荷法等算法^[1]。但对真正简单而有效的三维模拟算法却并不多。八十年代初由 THOMAS WELAND 等人提出的 FIT^[2]理论在电磁场的三维模拟方面有着其独到之处, 为电磁场数值分析提供了一有力的工具。下面就 FIT 理论及其在腔体模拟中的应用作一介绍。

1 FIT 简介

对于数值分析, 我们知道应包括场域离散化和描写物理问题的数学方程的离散化两个方面。场域离散化应包括网格的划分、编号及不同介质交界面的处理; 方程离散化就是如何将连续的微分或积分方程化为用网格点上的场值表示的离散方程。FIT 在这两发面都有其独到之处, 下面分别作简要说明。

1.1 场域离散化

由于 FIT 在网格划分及编号与其它算法并无多大差别, 所以在此仅对不同介质交界面的处理作一简单说明。FIT 最显著的特点就是引入了亚网格^[3]概念。我们以图 1 为例来说明其优越性。图示为用矩形网格来模拟弧形边界。图 1(a)所示为通常的阶梯近似, 我们可以看到其精度很差。图 1(b)所示为定步长矩形网格结合三角网格的模拟, 其精度明显好于图 1(a)。图 1(c)为变步长矩形网格结合三角亚元

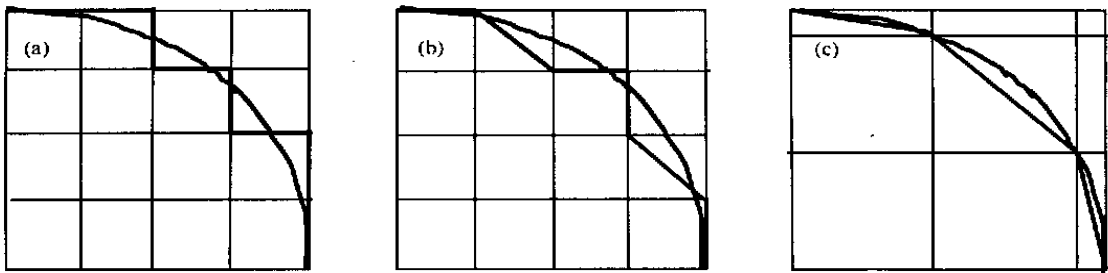


Fig 1 Three possible approximation to circular shape in a mesh (a) usual "stair-step" approximation, (b) extended triangular sub cell approximation, (c) extended triangular sub cell combined with irregular mesh steps

图 1 圆边界的三种可能近似。(a) 台阶近似, (b) 引入三角亚元的近似, (c) 三角亚元结合变步长网格的近似

* 收稿日期: 2000-10-19; 修订日期: 2001-07-18
基金项目: 国家大科学工程 H RFL-CSR 冷却储存环资助课题
作者简介: 李智慧(1971-), 男, 博士, 主要从事腔体理论及电磁场计算方面的研究, 兰州市 31 信箱 18 分箱。

的模拟, 由图可见它用更少的网格数就可获得比前两种方法更高的精度。FIT 就是采用第三种方法以尽可能减小几何形状模拟上的误差。

1.2 方程离散化

麦克斯韦方程组有微分和积分两种形式, FIT 是从以下的积分方程出发的

$$\oint_{(A)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_{(A)} \frac{\partial B}{\partial t} dA \tag{1}$$

$$\oint_{(A)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{(A)} \left(\frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{J} + \rho_v \right) dA \tag{2}$$

$$\iint_{(V)} \nabla \cdot \mathbf{E} dV = 0 \tag{3}$$

$$\iint_{(V)} \left(\frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{J} + \rho_v \right) dV = 0 \tag{4}$$

先看方程(1), 它包含沿一闭合曲线的线积分及以此曲线为边界的面积分; 对于线积分, 我们采用数值积分中常用的方法(见图 2)

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta} f(x) dx = \Delta f \left(x_0 + \frac{\Delta}{2} \right) + O(\Delta)^2 \tag{5}$$

为了将(5)式应用于方程(1)的左边, 我们必须定义出积分区域, 最明显的选择是取网格单元作为积分的最小单元, 这样积分元 $d\mathbf{l}$ 的方向将平行于网格线。为了使问题进一步简化, 我们发现如果以平行与网格线的电场强度分量来表示, 则方程中的矢量点积将完全化为两代数值的乘积, 而并不影响方程的适用性, 因为与积分线垂直的分量对积分无贡献, 如图 3 所示。这样方程(1)的左边可表示为

$$\oint_{(cell)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_1 \cdot \Delta + E_2 \cdot \Delta - E_3 \cdot \Delta - E_4 \cdot \Delta + O(\Delta)^2 \tag{6}$$

注意这种由麦克斯韦积分方程本身决定的场量分布形式表明在网格的不同地方得到不同的场分量。在此为了讨论的方便, 我们一律采用固定步长。

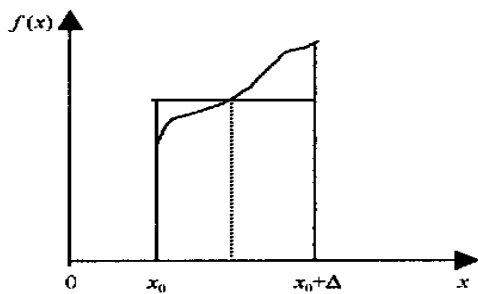


Fig 2 Numerical approximation for line integral
图 2 一维线积分数值近似

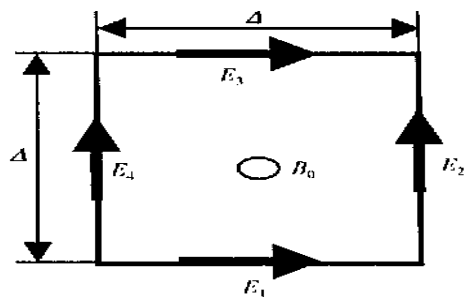


Fig 3 Single mesh cell with fields component allocation
图 3 单一网格单元及场量分布

现在来看方程(1)右端的面积分, 我们还是应用最常用数值积分公式

$$\iint_{(A)} f(x, y) dx dy = \Delta^2 f \left(x_0 + \frac{\Delta}{2}; y_0 + \frac{\Delta}{2} \right) + O(\Delta)^4 \tag{7}$$

由于方程(1)右端也包含有矢量点积, 同处理左端一样, 我们也用与面元平行的 B 的分量来表示它(见图 4), 将(7)式应用于右端, 得

$$\iint_{(A)} \frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} = \Delta^2 \cdot \dot{B}_0 + O(\Delta)^4 \tag{8}$$

由(6)和(8)式得

$$\Delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) = - \Delta^2 \dot{B}_0 + O(\Delta)^2 \tag{9}$$

这样,我们就在一个网格上完成了对方程(1)的离散。将上述过程作用于所有的网格,就会得到一组离散的、位于网格一定位置的E和B的不同分量,也就是说连续的场E和B被一很大维数的包含场分量的列矢量所代替。

图3所示为一个二维网格的网格单元,磁感应强度位于网格中心。如图4所示连接磁场强度矢量,其连线构成一组网格,称其为 \tilde{G} 网格。容易看出,在新网格中,磁场强度矢量B的地位和电场强度矢量在原网格中的地位完全一样。我们称原网格为电网格,用G表示, \tilde{G} 为磁网格。

由于我们只是保证在一个网格单元内材料特性一致,那么在网格的交界面上场矢量的边界条件就必须予以考虑。这里我们就可以看出以上划分网格及离散场矢量的优点。如图5所示,在网格的交界面上,电场强度矢量的切向分量和磁场强度的法向分量自动连续,这样边界条件将不需要专门考虑。

这样我们就完全处理了方程(1),方程(2)与方程(1)非常类似,只不过E和B互换了。既然B分量在磁网格中的地位与E分量在电网格中的地位完全相同,显然可采用与处理方程(1)类似的方法在磁网格中对方程(2)进行离散化。唯一不同的是这里是磁场强度矢量H和电位移矢量D,如图6所示,因而有

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta}{\mu_1} + \frac{\Delta}{\mu_2}\right)B_1 + \left(\frac{\Delta}{\mu_2} + \frac{\Delta}{\mu_4}\right)B_2 - \left(\frac{\Delta}{\mu_3} + \frac{\Delta}{\mu_4}\right)B_3 - \left(\frac{\Delta}{\mu_3} + \frac{\Delta}{\mu_1}\right)B_4 = \\ & \frac{\Delta^2}{4}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)E_0 + \frac{\Delta^2}{4}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)E_0 + \Delta^2\nu_0\rho + 0(\Delta)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

这样方程(1)和(2)就被离散为方程(9)和(10)。对于方程(3)和(4),我们发现在上述网格和场量处理方式下,它们是自动满足的^[3],这也可被用来检验计算结果的正确性。

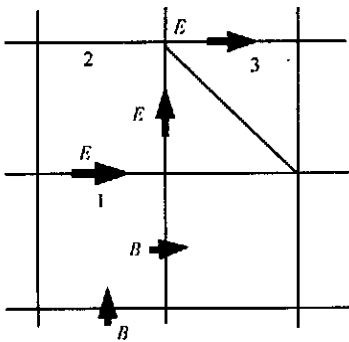


Fig 5 2D-mesh demonstrating that only continuous components of E and B occur

图5 二维网格表示只有E和B的连续分量存在于网格边界

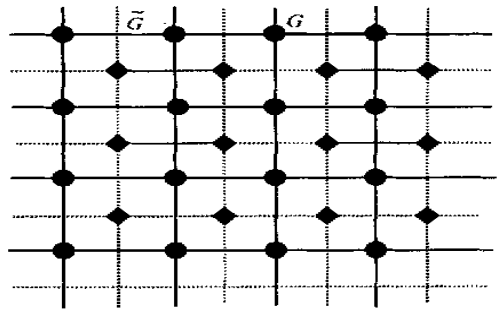


Fig 4 Examples for dual "electric" and "magnetic" grids G and \tilde{G}

图4 电网格和磁网格示例

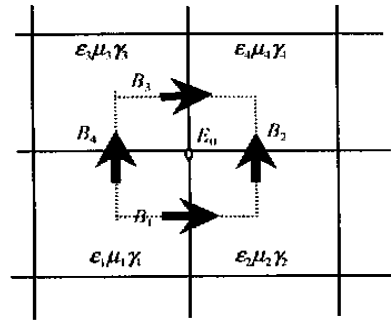


Fig 6 Cell \tilde{G} for demonstration of the solution of Maxwell's second equation

图6 在网格 \tilde{G} 求解Maxwell第二方程

现在对单个网格的解已经获得,我们可用任何方式来对网格进行编号,把所有的场分量装配成一多维矢量,得到

$$b = (B_{x1}, B_{x2}, \dots, B_{xN}, B_{y1}, \dots, B_{yN})^t \quad (11)$$

$$e = (E_{x1}, E_{x2}, \dots, E_{xN}, E_{y1}, \dots, E_{yN})^t \quad (12)$$

$$j = (J_{dx1} + \rho_{v,x1}, \dots)^t \quad (13)$$

麦克斯韦方程现在可表示为矩阵形式

$$R e = - b \quad (14)$$

$$\tilde{R} b = D e + D e + j \quad (15)$$

式中: R 和 \tilde{R} 是四带宽的稀疏矩阵; D_ϵ 是对角矩阵, 其对角元是式(10)中形式的介电常数; D_γ 是式(10)中形式的平均电导率。

2 FIT 在腔体计算中的应用

以 FIT 为理论基础, 德国 CST 公司开发了专门用于电磁场模拟的软件包 MAFIA。下面简要介绍一下用 MAFIA 对兰州重离子加速器注入器 SFC 高频腔体的计算。

SFC 高频腔体的形状如图 7(a) 所示, 它是 $\lambda/4$ 腔体, 采用短路片调频, 工作频率范围为 6~ 18MHz, 短路片与 Dee 盒的连接处形状较为复杂。以前只能通过传输线方式来近似计算, 但计算结果不够理想。从 MAFIA 计算的结果来看, 与实际测量值符合很好。在计算中, 我们采用 MAFIA 的自动划分网格的功能, 取 20 万个网格点。网格划分如图 7(b) 所示。

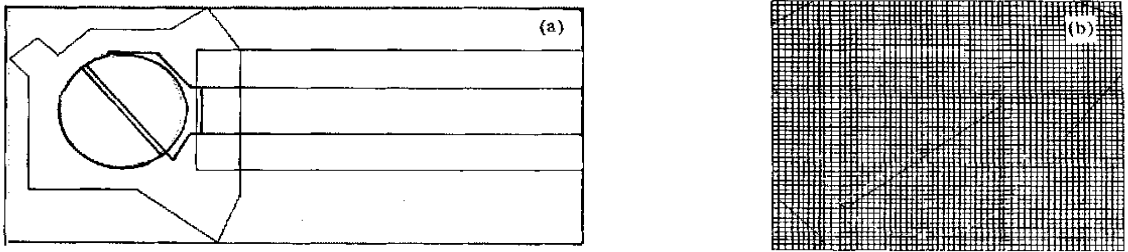


Fig 7 Diagram of the resonate cavity of SFC (a) and the mesh discrete of Dee (b)

图 7 SFC 谐振腔简图(a)及 Dee 盒区域网格划分(b)

2.1 频率范围的计算

MAFIA 在腔体计算中计算得最准确的就是频率范围。由图 8 可见, 最大误差不超过 0.2MHz, 相对误差最大不超过 2%。而我们知道频率范围是腔体计算的最关键参数之一。所以 MAFIA 在腔体设计中是一个可以信赖的工具。

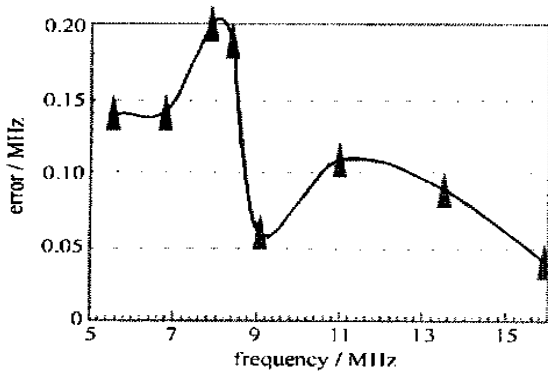


Fig 8 Curve of length of the short panel vs compute errors of frequency

图 8 短路片位置与频率计算误差曲线

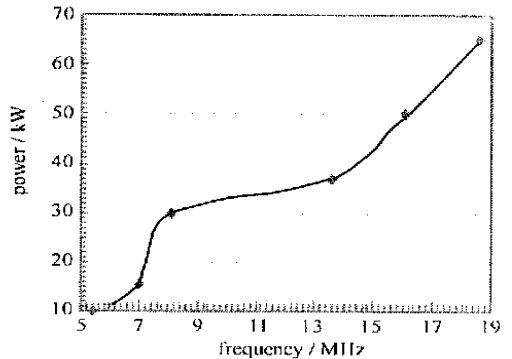


Fig 9 Curve of power vs frequency

图 9 频率功率曲线

2.2 损耗功率的计算

功率损耗是腔体的又一重要参数, 但是由于影响其大小的因素多且复杂, 对它的计算一般只是数量级的估算。MAFIA 在计算功耗时, 采用场量积分的方法, 虽然它对场分布的计算相对很准确, 但是由于腔壁表面电阻受很多因素的影响, 很难做一个合理的简化考虑, 所以 MAFIA 的计算是以理想的铜表面来计算, 计算结果偏小。但是结合实际应用的经验^[4], 经简单的修正, 仍可很好的和实际相符。图 9 即为修正后的结果, 对应的加速电压为 70kV。

2.3 Q 值计算

Q 值是反应腔体性能的一个重要参数, 我们知道, Q 值在数值上为腔体储能和单位时间耗能的比值。由于在计算耗能上有困难, 对此问题的处理, MAFIA 采取和功率计算相同的方法, 采用同样的修正

方法, 结果还是比较令人满意的。图 10 是 SFC 腔体 Q 值计算值和测量值的比较。可以看出, 计算结果与测量值符合得很好。但是, 从趋势看, 在频率低端, 计算值小于测量值, 而在频率高端, 计算值大于测量值。这种不一致性是由于我们在考虑腔体损耗时, 在计算中对腔体表面的简化处理, 所以结果统统取为计算值的一半。而我们知道, 理想导体和实际导体的区别就在于实际导体的电导率是有限的, 有高频功率加载时有功率损耗, 而这个损耗与频率有关, 频率越高, 损耗越大, 所以我们在整个频段内, 都去计算值的一半, 显然是不严格的, 而这也正是 Q 值趋势不对的原因所在。

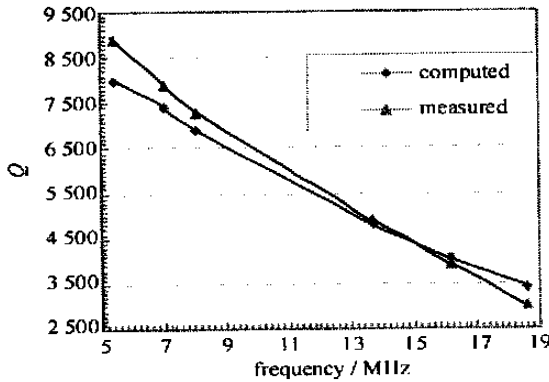


Fig 10 Curve of Q factor (computed and measured) vs frequency

图 10 不同频率下 Q 值计算值和测量值曲线

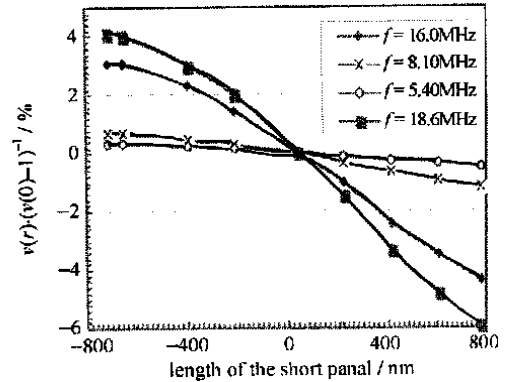


Fig 11 Voltage distribution along the accelerating gap

图 11 加速间隙电压分布曲线

2.4 加速间隙电压分布的计算

由于历史的原因, SFC 高频腔加速间隙两端对短路片并不是对称的(见图 7), 由传输线理论的简单分析就可看出, 其两端电压有一定的差别, 这个差别对束流会产生偏心作用。所以加速间隙的电压分布对束流行为影响很大。我们利用 MAFIA 对 SFC 高频腔加速间隙的电场分布的计算结果见图 11, 两端的最大偏差约为 10%, 与根据束流行为由束流动力学分析得出的结果基本一致。

3 结 论

通过以上的分析, 我们不难发现基于 FIT 的 MAFIA 程序在腔体计算中的表现非常好, 对频率范围, 功率损耗, Q 值及场量分布的计算都相当准确, 完全可以达到工程设计所需要的精度。因此其计算结果完全可以取代模型实验。

参考文献:

- [1] 盛剑霓 电磁场数值分析[M]. 北京: 科学出版社, 1984 (Sheng J.N. Numerical analysis of electromagnetic field Beijing: Science Publishing Company, 1984)
- [2] Weiland T. On the numerical solution of Maxwell's equations and applications in the field of accelerator physics[J]. *Partical Accelerator*, 1984, 15: 245—292
- [3] Weiland T. Computer modelling of two-and three-dimensional cavities[J]. *IEEE Trans Nucl Sci*, 1985, NS-32(5): 2738—2742
- [4] Kamigaito O, Goto A, et al Beam matching section in the new injector for RLAC[J]. *RIKEN Accel Prog Rep*, 1997, 30: 191—192

Finite integral theory and its application on cavity simulation

LI Zhihui, TANG Jing-yu, ZHANG Lun

(Institute of Modern Physics, the Chinese Academy Sciences, P. O. Box 31-18, Lanzhou 730000, China)

Abstract Through the discretization of the Maxwell's equations, the general finite integration theory has been introduced. This theory makes direct use of the electric and magnetic field as unknowns, thus yielding uniquely defined vectors in combination with a suitable grid definition. Finally through its reliability on the SFC (Injector Accelerator of HRFEL) resonant cavity, its reliability on cavity simulation has been discussed also.

Key words FIT; simulation; SFC; high frequency resonant cavity