

# 三线摆法测量复杂构件转动惯量的误差分析

张代胜 胡玺良 袁玲

**【摘要】** 阐述了三线摆法测量复杂构件转动惯量的原理及步骤,提出了利用转动惯量方程组来求解惯性积的方法。分析得出,对三线摆测试系统测量转动惯量的算式推导过程中的简化误差可达0.28%,使用三线摆法测量复杂构件的转动惯量,测量上下圆盘的半径、物体的质量、摆动周期等参数所引起的误差较大,累积各参数的测量误差可达5%。在详细分析论证的基础上,提出了减小误差的具体措施。

**关键词:** 复杂构件 三线摆 转动惯量 误差分析

**中图分类号:** TH113.2<sup>+1</sup>

**文献标识码:** A

## Error Analysis on Measuring the Moment of Inertia of Complex Shaped Components with Trilinear Pendulum

Zhang Daisheng Hu Xiliang Yuan Ling  
(Hefei University of Technology)

### Abstract

The principle and procedures of trilinear pendulum which is used to test the moment of inertia of complex components are elaborated. The equations of moment of inertia are presented to obtain the product of inertia. By analyzing the equations deduction of trilinear pendulum, the simplified error can be 0.28%. The parameters of the radius of upper and down round plates, the mass of objects, the cycle of swinging can be calculated through the method of trilinear pendulum, but the errors are greater and the aggregated measuring errors of the parameters can reach 5% or above. Based on the detailed analysis and provement, the methods of decreasing errors are proposed.

**Key words** Complex shaped components, Trilinear pendulum, Moment of inertia, Error analysis

### 引言

发动机之类的汽车零部件形状各异且极不规则,对于这类构件的转动惯量以及惯性积,没有现成的公式直接应用,多采用三线摆悬挂法测量。有关测量方法已有许多<sup>[1~3]</sup>,但是针对这种测量法的误差控制却探讨较少,为了获得较精确测量结果,需系统分析影响测量结果误差的因素,并提出控制措施。

### 1 三线摆法测量转动惯量的基本原理

三线摆原理如图1所示:摆线AB的长度 $l$ , $H$ 是上下圆盘的垂直距离, $R$ 是下圆盘悬挂点到盘中

心的距离, $r$ 是上圆盘悬挂点到盘中心的距离;匀质圆盘用等长的三条线悬挂在一个水平固定的小圆盘下面,固定上圆盘,让质量为 $m$ 的下圆盘绕 $OO'$ 轴转动,设下圆盘转动周期为 $T_0$ ,则下圆盘的转动惯量为

$$J_0 = \frac{mgRr}{4\pi^2 H} T_0^2 \quad (1)$$

将质量为 $M_1$ 的刚体放置在下圆盘上, $T_1$ 是刚体与下圆盘的摆动周期。由式(1)可计算刚体和下圆盘绕轴线 $OO'$ 的转动惯量为

$$J = \frac{(m + M_1)gRr}{4\pi^2 H} T_1^2 \quad (2)$$

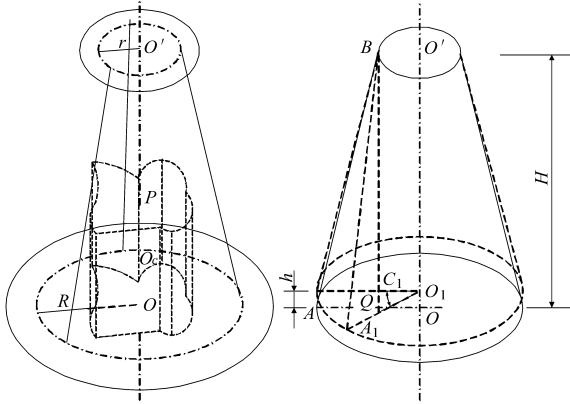


图1 三线摆几何示意图

Fig.1 Schematic diagram of trilinear pendulum

则刚体绕  $OO'$  轴的转动惯量为  $J_1 = J - J_0$ , 利用该方法可以测定形状不规则、质量分布不均匀的刚体绕特定轴线的转动惯量<sup>[1]</sup>。

测量时将复杂构件置于下圆盘面上, 且使其质心  $O_c$  投影点落在圆盘中心  $O$  上, 轴线  $OO'$  与复杂构件上表面的交点为  $P$ , 使复杂构件被测量的轴线  $O_cP$  与三线摆轴线  $OO'$  重合<sup>[2]</sup>。在复杂构件上设定坐标系  $O_cXYZ$ , 可以求出复杂构件绕  $O_cP$  的转动惯量<sup>[3]</sup>为

$$J = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta \quad (3)$$

式中  $J_x, J_y, J_z$ ——复杂构件对坐标系  $O_cXYZ$  的  $X, Y, Z$  轴的转动惯量

$J_{yz}, J_{xz}, J_{xy}$ ——复杂构件对坐标系  $O_cXYZ$  的对应下标平面的惯性积

$\alpha, \beta, \gamma$ —— $O_cP$  轴与坐标系  $O_cXYZ$  的  $X, Y, Z$  轴的夹角

## 2 误差分析

### 2.1 三线摆系统误差

在图1中, 下圆盘在转动过程中的角速度为  $\omega$ ,  $h$  为下圆盘因悬线扭转而上升的高度,  $\theta_0$  为角振幅,  $T$  为振动周期,  $J_0$  为下圆盘对上下盘中心轴线的转动惯量,  $\omega_0$  为回到平衡位置时的角速度。

则下圆盘回到平衡位置时, 动能  $E_1 = \frac{1}{2} J_0 \omega_0^2$ , 最高点时增加的势能  $E_2 = mgh$ 。忽略空气阻力和摩擦阻力, 根据机械能守恒定律<sup>[4]</sup>有  $\frac{1}{2} J_0 \omega_0^2 = mgh$ 。

从下圆盘角位移  $\theta$  与时间  $t$  的关系可推导出角速度  $\omega$  与时间  $t$  的关系为

$$\theta = \theta_0 \sin \frac{2\pi}{T} t \Rightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi\theta_0}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t$$

当  $t = 0, \frac{T}{2}, T, \frac{3T}{2}, \dots$  时, 下圆盘通过平衡位置,  $\omega_0 = \omega_{\max} = \frac{2\pi\theta_0}{T}$ , 因此

$$mgh = \frac{1}{2} J_0 \left( \frac{2\pi\theta_0}{T} \right)^2 \quad (4)$$

当摆角振幅为  $\theta_0$  时, 下圆盘上某悬点  $A$  移动到位置  $A_1$ , 圆盘轴的上升高度为

$$h = l_{OO_1} = l_{BC} - l_{BC_1} = \frac{l_{BC}^2 - l_{BC_1}^2}{l_{BC} + l_{BC_1}}$$

式中  $l_{OO_1}, l_{BC}, l_{BC_1}$ —— $O$  与  $O_1, B$  与  $C, B$  与  $C_1$  之间的距离

分析可得

$$h = \frac{2Rr(1 - \cos\theta_0)}{l_{BC}} = \frac{4Rr \sin^2 \frac{\theta_0}{2}}{2H - h} \quad (5)$$

由于  $H \gg h$ , 所以  $2H - h \approx 2H$ , 摆角  $\theta_0$  很小时,  $\sin^2 \frac{\theta_0}{2} \approx \left( \frac{\theta_0}{2} \right)^2 \approx \frac{\theta_0^2}{4}$ , 故

$$h = \frac{Rr\theta_0^2}{2H} \quad (6)$$

将式(6)代入式(4)可得

$$J_0 = \frac{mgRr}{4\pi^2 H} T_0^2$$

推导过程中, 影响测量结果精度的部分有:

(1) 忽略圆盘平动动能的影响

当三线摆的下圆盘在某一确定的平衡位置作扭摆运动时, 下圆盘的质心也在作上下运动, 其升降速度为  $v = \frac{dh}{dt}$ , 将式(5)代入得

$$v = \frac{d\left(\frac{4Rr \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2H}\right)}{dt} = \frac{2Rr \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{H} \frac{d\theta}{dt} = \frac{Rr \sin \theta}{H} \omega$$

则升降运动动能为

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{mR^2 r^2}{2H^2} \omega^2 \sin^2 \theta$$

在最大角位移处,  $\omega = 0, E_k = 0$ ; 在平衡位置,  $\omega$  最大, 但是  $\theta = 0, E_k = 0$ 。所以升降运动最大动能在最大角位移与平衡位置之间某一点。

三线摆转动过程中, 下圆盘转动动能与平动动能之比为

$$\frac{m v^2}{J_0 \omega^2} = \frac{mR^2 r^2 \omega^2 \sin^2 \theta}{2H^2 \omega^2} = \frac{2r^2}{H^2} \sin^2 \theta$$

取不同  $H$  和  $\theta$  来分析  $\frac{m v^2}{J_0 \omega^2} \times 100\%$  的变化情况, 令  $r = 0.10 \text{ m}, R = 0.80 \text{ m}, H = 4.20 \text{ m}$ 。如表1所示,

平动动能在总机械能中的比例与圆盘的转角以及上下盘之间的距离都有密切关系。

表 1 角度对平动动能的影响

Tab.1 Effect of angle on translation kinetic energy %

H/cm	$\theta/(^\circ)$			
	5	10	15	20
210	0.003 4	0.013 7	0.030 4	0.053 1
420	0.000 9	0.003 4	0.007 6	0.013 3

(2)  $2H - h \approx 2H$  的影响

$$\text{上升高度 } h = \frac{2Rr(1 - \cos\theta)}{l_{BC}} \approx \frac{4Rr \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2H}, \text{ 通}$$

过  $\frac{h}{H}$  分析误差

$$\frac{h}{H} = \frac{4Rr \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2H^2} = \frac{2Rr \sin^2 \frac{\theta}{2}}{H^2}$$

取  $r = 0.10 \text{ m}$ ,  $R = 0.80 \text{ m}$ ,  $H = 4.20 \text{ m}$ , 从表 2 中可以看出  $\theta$  越大时, 近似的误差越大。须注意, 当转角超过  $15^\circ$  时, 由此带来的误差达到  $0.01\%$  以上。

表 2 角度对下圆盘高度的影响

Tab.2 Effect of angle to disk height

$\theta/(^\circ)$	5	10	15	20
$\frac{h}{H}/\%$	0.001 7	0.006 9	0.015 5	0.027 4

(3)  $\sin \frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2}$  引起的误差

在转动惯量的推导中, 为简化计算, 取  $\sin^2 \frac{\theta}{2} \approx$

$(\frac{\theta}{2})^2 = \frac{\theta^2}{4}$ , 但是会带来误差, 而且随着角度的增大而增大, 当转角超过  $10^\circ$  时, 由此带来的误差  $E_r$  达到  $0.2\%$  以上, 分析结果见表 3。  $E_r$  为

$$E_r = \frac{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \times 100\% \quad (7)$$

表 3 角度对正弦函数的影响

Tab.3 Effect of angle on sine function

$\theta/(^\circ)$	5	10	15	20
$E_r/\%$	0.063	0.251	0.534	0.992

从表 1、3 中得出, 当下圆盘转角达到  $10^\circ$  时, 由三线摆系统带来的误差之和超过  $0.28\%$ , 且误差随着转角的增加急剧增大。增加上下盘间的距离可以有效地减小系统误差。

## 2.2 测量过程中的误差影响

三线摆调校至水平状态后, 给转动圆盘小于  $5^\circ$  的角位移, 释放后使其转动, 测量转动周期  $T$ , 应用式(1)求圆盘和复杂构件的转动惯量, 将复杂构件放置不同角度, 通过式(3)联立方程可求复杂构件的惯性积。在测量过程中, 测量误差来源于对各个参数的测量以及  $O_cP$  与坐标轴夹角的测量。

对式(2), 通过求导可以求得转动惯量  $J$  对各个测量值  $T$ 、 $m$ 、 $M$ 、 $R$ 、 $r$ 、 $H$  的一阶偏导数, 即各参数的灵敏度

$$\Delta J = \frac{\partial J}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial J}{\partial m} \Delta m + \frac{\partial J}{\partial M} \Delta M + \frac{\partial J}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial J}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial J}{\partial H} \Delta H$$

误差上限为

$$|\Delta J| = \left| \frac{\partial J}{\partial T} \Delta T \right| + \left| \frac{\partial J}{\partial m} \Delta m \right| + \left| \frac{\partial J}{\partial M} \Delta M \right| + \left| \frac{\partial J}{\partial R} \Delta R \right| + \left| \frac{\partial J}{\partial r} \Delta r \right| + \left| \frac{\partial J}{\partial H} \Delta H \right|$$

利用 Matlab 的符号运算模块求得  $J$  的各个偏导表达式。代入测量数值可以得  $J$  对各个测量变量的灵敏度。取测量参数  $M = 212 \text{ kg}$ ,  $m = 57 \text{ kg}$ ,  $r = 0.10 \text{ m}$ ,  $R = 0.80 \text{ m}$ ,  $H = 4.20 \text{ m}$ ,  $T \approx 4.5 \text{ s}$ , 代入各表达式, 结果如表 4<sup>[5]</sup>所示。

表 4 灵敏度法误差分析

Tab.4 Error analysis based on sensitivity method

	$\frac{\partial J}{\partial m}$	$\frac{\partial J}{\partial M}$	$\frac{\partial J}{\partial r}$	$\frac{\partial J}{\partial R}$	$\frac{\partial J}{\partial T}$	$\frac{\partial J}{\partial H}$	$\Delta J_{\max}$
灵敏度	0.096	0.096	257.564	32.219	11.447	-6.130	
测量误差	0.5	0.5	0.001	0.001	0.001	0.001	
$J$ 误差	0.048	0.048	0.258	0.032	0.011	-0.006	0.391

由表 4 知, 使用三线摆法测量复杂构件的转动惯量, 测量上下圆盘半径、物体的质量、周期所引起的误差对结果的影响较大。累积各参数的测量误差, 可得  $\delta_{\max} = (\Delta J_{\max} / J) \times 100\% = 5.43\%$ 。

因此对复杂构件质量、质心位置、圆盘半径、圆盘质量、上下盘距离测量的过程中遵守操作规程, 将以上参数的误差控制在表 4 范围时, 测量结果误差可控制在  $5.43\%$  左右。

应特别注意以下几组参数的测量:

(1) 转动周期的测量

在测量过程中, 计时误差对实验数据影响非常大。对某复杂构件转动惯量的测量中, 设构件处于圆盘上某一固定位置, 取  $r = 0.10 \text{ m}$ 、 $R = 0.80 \text{ m}$ 、 $H = 4.20 \text{ m}$ ,  $m_{\text{disk}} = 57 \text{ kg}$ ,  $m_{\text{engine}} = 212 \text{ kg}$ , 周期的测量结果对复杂构件转动惯量  $J$  的影响如表 5 所

示。表中  $E_J$  为相对误差,其值为

$$E_J = \frac{J - J_0}{J_0} \times 100\% \quad (8)$$

当每组数据相差 0.5 s 以上(即每个周期相差 0.025 s)时,将会对结果产生较大影响。如果秒表的精度为 0.1 s,三线摆转动 20 次计时一次,即 20 个周期的误差是 0.01 s,则每个周期的误差为 0.000 5 s,可改进实验的精度。

表 5 测量时间误差对结果的影响

Tab.5 Effect of measurement time errors on result

参数	真值	实测值 1	实测值 2
$t/s$ (20 个周期)	74.4	73.8	75.0
$T/s$	3.720	3.690	3.750
$J/kg \cdot m^{-2}$	7.199 8	6.889 4	7.512 7
$E_J/\%$	0	4.31	4.35

### (2) $O_cP$ 与坐标轴的夹角对惯性积的影响

从式(3)知,将复杂构件放置在圆盘上的特殊位置(如让  $O_cP$  与某一坐标轴重合),能够解出  $J_x$ 、 $J_y$ 、 $J_z$ ,但是为了能够得出惯性积  $J_{yz}$ 、 $J_{xz}$ 、 $J_{xy}$ ,则必须将复杂构件在圆盘上倾斜一定的角度以取得多组数据,就涉及对  $O_cP$  与坐标轴夹角的测量。测量夹角对惯性积的影响为

$$E_{J_{yz}} = \frac{J_{yz} - J_{yz0}}{J_{yz0}} \times 100\% \quad (9)$$

### 参 考 文 献

- 温千宏,尹安东,孙骏,等.汽车复杂旋转部件转动惯量测试方法的研究[J].安徽工学院学报,1997,16(4):44~46.
- 朱明,邓兆祥,方子帆.复杂构件质量参数的测试方法[J].农业机械学报,2005,36(4):34~38.
- 李杰,张宝生,毛佳.柴油机惯性参数的测试研究[J].农业机械学报,1999,30(3):16~18.
- 程守洙,江之永.普通物理[M].北京:高等教育出版社,2003.
- 张志涌.精通 MATLAB6[M].北京:北京航空航天大学出版社,2002.
- 王霞,郭鲁家.影响转动惯量测量过程质量的主要因素分析[J].机械制造业研究,2005,34(3):29~31.

计算结果如表 6 所示,由表 6 知,角度测量的误差对惯性积的影响较大。

在测量复杂构件倾斜的角度时,限于复杂构件的外形,通常采用多种测量手段与多点测量相结合的方法,选取误差不超过  $0.2^\circ$  的几组数据,求平均值。

表 6 夹角测量误差对结果的影响

Tab.6 Effect of measurement angle errors on result

参数	真值	实测值 1	实测值 2	
角度 $\angle(^{\circ})$	$\alpha$	4.6	5.0	5.5
	$\beta$	90	90	90
	$\gamma$	94.6	95.0	95.5
$J_{yz}/kg \cdot m^{-2}$	-2.397 9	-2.241 0	-2.129 7	
$E_{J_{yz}}/\%$	0	6.5	11.1	

### 3 措施

测量复杂构件转动惯量的误差应小于  $\sum \delta = \delta_c + \delta_s^{[6]}$ 。可采取以下措施来控制误差:①增加三线摆长、控制下圆盘的摆幅,减小因近似而产生的误差。②保证下圆盘为定轴摆动,限制因测量产生的误差。③在同一摆上测量与复杂构件高度相仿、质量相同,且形状规则(可以利用理论公式求得其转动惯量)、质量分布均匀砝码的转动惯量,与理论结果进行比较,对测量结果进行标定、修正<sup>[3]</sup>。

(上接第 27 页)

- 王小凡.依维柯轻型汽车维修手册[M].南宁:广西科学技术出版社,2002.
- 稀薄均质混合气压燃着火和燃起反应速度的基础研究课题组.稀薄均质混合气压燃着火和燃起反应速度的基础研究中期报告[R].北京:北京工业大学,2005.
- 周龙保,刘巽俊,高宗英.内燃机学[M].北京:机械工业出版社,1999.
- 尧命发,张波,郑尊清.废气再循环与燃料辛烷值对均质压燃燃烧特性影响的试验研究[J].内燃机学报,2005,23(6):506~507.