

文章编号: 1000-0364(2000)04-0653-06

无旋转波近似下单个超冷离子与一束驻波型激光相互作用的动力学*

蒋玉蓉, 冯 芒, 高克林, 朱熙文

(中国科学院武汉物理与数学研究所, 武汉 430071)

摘要: 在相互作用表象中, 研究了 Lamb-Dicke 区内单个超冷囚禁离子与一束驻波型激光相互作用的动力学行为。由于没有引入旋转波近似, 离子的运动随着 Lamb-Dicke 参数 η 和 Rabi 频率 Ω 的增大趋向于混沌。所得结果与旋转波近似下的结果作了比较。

关键词: 无旋转波近似; 超冷离子; 动力学

中图分类号: O413.3 文献标识码: A

Jaynes-Cummings(JC)模型^[1]是量子光学领域中用来处理物质与光场作用的最常用模型, 已经成功地解决了许多腔 QED 问题^[2]。它的核心是旋转波近似, 即在外场频率与原子共振频率近共振, 且耦合强度不太大时, 忽略去反共振项(也称反旋转项)。近年来, JC 模型被运用来研究超冷囚禁离子与激光的相互作用^[3~5], 其中离子被简化为二能级结构, 并且被限定在比有效激光波长小得多的空间区域内运动, 即所谓的 Lamb-Dicke 近似, 离子阱的振动能级量子化为谐振子, 照射在离子上的激光通常假定为经典的驻波或行波形式。与腔 QED 的情况不同的是由于离子阱内处于近乎真空状态, 所以代表阱的振动态的谐振子衰减很慢, 与此同时, 离子与谐振子之间的耦合强度可简单地通过增加激光的强度来增强, 因而旋转波近似在很多情况下对囚禁离子体系不再有效, 模型中的反旋转项在实验观测中将有所反映。

对于处于驻波型激光照射下的超冷囚禁离子, 在 $\hbar = 1$ 的单位制下其典型的哈密顿量为

$$H_0 = \frac{1}{2} \omega_0 \sigma_z + \nu a^\dagger a + \frac{\Omega}{2} \cos[\eta(a^\dagger + a) + \phi] [\sigma_+ e^{-i\omega_l t} + \sigma_- e^{i\omega_l t}] \quad (1)$$

其中 ω_0 是离子两能级的跃迁频率, ν 和 ω_l 分别是阱频和激光频率, Ω 是代表激光-离子耦合

* 收稿日期 2000-01-04

作者简介: 蒋玉蓉(1973-), 女, 江西人, 中科院武汉物理与数学研究所, 博士生, 从事原子分子物理研究。

的 Rabi 频率, η 是 Lamb-Dicke 参数, ϕ 表示驻波波腹相对阱心的位置, σ_i ($i = \pm, z$) 是泡利算子, a^+ 和 a 分别是声子的产生与湮灭算符. ν 假定远大于原子衰减速率(强囚禁极限), 这可以使我们的模型中不需要考虑耗散项. 通常的处理是在相互作用表象中运用旋转波近似, 可得到以下三种情形: ① 载频激发, $\omega_0 = \omega_l$, $H' \cong (\sigma_+ + \sigma_-)$; ② 红失谐情况, $\omega_0 = \omega_l + \nu$, $H' \cong (\sigma_+ a^- + \sigma_- a^+)$; ③ 蓝失谐情况, $\omega_0 = \omega_l - \nu$, $H' \cong (\sigma_+ a^+ + \sigma_- a)$. 因而, 用 JC 模型的方法问题可以很方便地求解. 但在频率较大, 或 $\omega_0 - \omega_l \neq 0, \pm \nu$ 等情况下, 我们就不能这样做. 文献 [6] 中为处理这类问题提出一套相干态级数展开的方法, 即选择以激光频率旋转的框架. 此时的哈密顿量为

$$H_i = \frac{\Delta}{2} \sigma_z + \nu a^+ a + \frac{\Omega}{2} \cos[\eta(a^+ + a) + \phi] (\sigma_+ + \sigma_-) \quad (2)$$

其中 $\Delta = \omega_0 - \omega_l$, 由于体系满足 Lamb-Dicke 极限 ($\eta \ll 1$) 和弱激发区 ($\Omega < \nu$) 的要求, 我们可将 $\eta(a^+ + a)$ 项仅展开到二次项, 方程 (2) 可简化为

$$H_i = \frac{\Delta}{2} \sigma_z + \nu a^+ a - \xi (a^+ + a) (\sigma_+ + \sigma_-) + \epsilon (\sigma_+ + \sigma_-) + g(a^{+2} + a^2) (\sigma_+ + \sigma_-) + 2ga^+ a (\sigma_+ + \sigma_-) \quad (3)$$

其中 $g = -\frac{\Omega}{4} \eta^2 \cos \phi$, $\xi = \frac{\Omega}{2} \eta \sin \phi$ 和 $\epsilon = \frac{\Omega}{2} \cos \phi + g$. 文献 [6] 解决的是一个静态模型, 得到了系统的本征能量和本征态, 讨论了系统的能级简并特性, 发现了许多与旋转波近似下完全不同的性质. 本文将以 (3) 式为出发点, 讨论这个体系的动力学特性, 并将以此与 JC 模型的结果作比较.

借助海森堡方程, 方程 (3) 可写成无衰减的 Bloch-Maxwell 方程

$$\dot{\sigma}_x = -\frac{\Delta}{\Omega} \sigma_y \quad (4a)$$

$$\dot{\sigma}_y = \frac{\Delta}{\Omega} \sigma_x + \sin(\phi) x \sigma_z + \frac{1}{2} \cos(\phi) x^2 \sigma_z - \cos(\phi) \sigma_z \quad (4b)$$

$$\dot{\sigma}_z = -\sin(\phi) x \sigma_y - \frac{1}{2} \cos(\phi) x^2 \sigma_y + \cos(\phi) \sigma_y \quad (4c)$$

$$\ddot{x} = -\frac{\nu^2}{\Omega^2} x + \eta^2 \sin(\phi) \frac{\nu}{\Omega} \sigma_x + \frac{\nu}{\Omega} \eta^2 \cos(\phi) x \sigma_x \quad (4d)$$

其中 $x = \eta(a^+ + a)$, 圆点表示对无量纲时间的微分 $\frac{\partial}{\partial \tau}$, 其中 $\tau = \Omega t$. 显然解决方程组 (4a) ~ (4d) 必须用数值计算的方法. 由于 (2) 式是通过么正变换获得的, 所以 (4) 式是在相互作用表象中的方程式, 因而以下我们必须选择一个可观察量来研究, 这是因为只有可观察量的本征值在任何么正变换下才保持不变. 我们选择离子的布居数反转的期望值 $\sigma_z(\tau)$ 来研究, 它在实验上反映离子荧光强度随时间的变化. 假定离子初始制备在其内态的激发态 $|e\rangle$, 即 $\sigma_x(0) = \sigma_y(0) = 0$ 和 $\sigma_z(0) = 1$, 我们对运动方程组 (4a) ~ (4d) 用四阶 Runge-Kutta 程序进行积分, 通过调节参数 $\eta, \Omega, \phi, \Delta$, 研究了离子布居数的反转随时间的演化及相应的功率谱图(图 1 ~ 8). 这些图表明, 囚禁离子的动力学行为随着 η 与 Ω 的增大而趋向于复杂, 即从单一频率向多种频率过渡. 在 η 很小时, 尽管耦合常数 Ω 较大 ($\Omega = 0.5$), 离子的运动仍然趋于单频运动, 而当 Ω 很小时, η 的增大对离子的运动影响也不大. 由此可

见 η 和 Ω 对离子的动力学行为起着几乎同样关键的作用。另外,从 (d) 也可看出:当 $\eta \rightarrow 0$ 时 $x \rightarrow \cos(\frac{\nu}{\Omega}t)$ 或 $\sin(\frac{\nu}{\Omega}t)$, 无论 Ω 如何增强, 离子的运动都趋于严格的周期振荡。从这些图中还能得知 Δ 和 Φ 对离子运动的影响并不显著, 随着 Δ 和 Φ 的改变, 离子的动力学行为只是稍有不同。

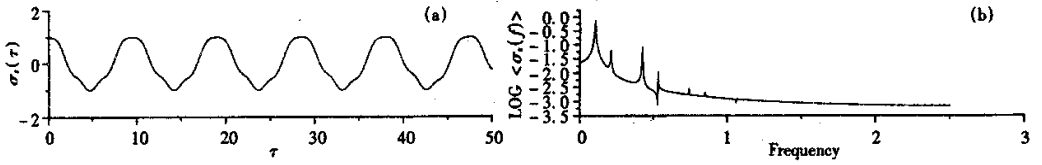


图 1 (a) 粒子数反转的期望值 $\sigma_x(\tau)$ 相对于时间 τ 的演化, (b) 相应的功率谱, 其中 $\frac{\Delta}{\Omega} = 0.01, \frac{\Omega}{\nu} = 0.5, \Phi = \frac{\pi}{4}, \eta = 0.5, \langle \sigma_x(0) \rangle = 0, \langle \sigma_y(0) \rangle = 0, \langle \sigma_z(0) \rangle = 1$

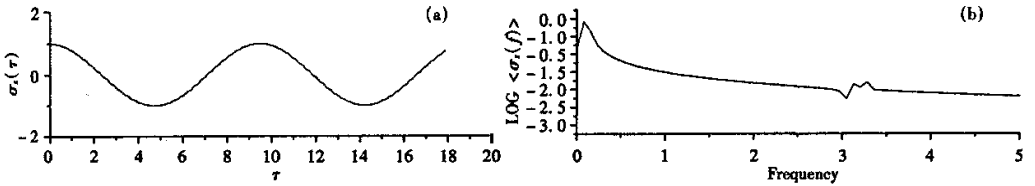


图 2 $\frac{\Delta}{\Omega} = 0.01, \frac{\Omega}{\nu} = 0.05, \Phi = \frac{\pi}{4}, \eta = 0.5$, 其余与图 1 说明一样

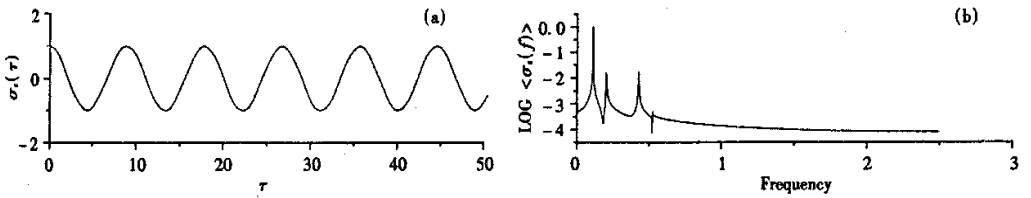


图 3 $\frac{\Delta}{\Omega} = 0.01, \frac{\Omega}{\nu} = 0.5, \Phi = \frac{\pi}{4}, \eta = 0.1$, 其余与图 1 说明一样

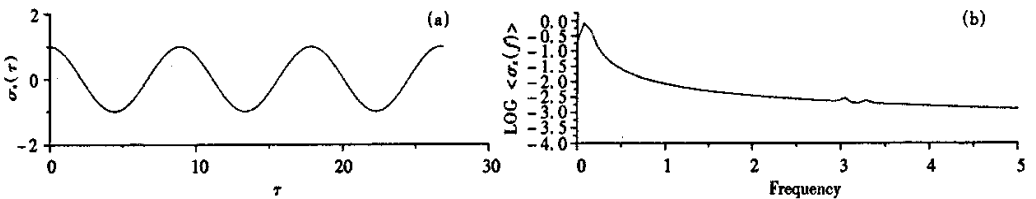


图 4 $\frac{\Delta}{\Omega} = 0.01, \frac{\Omega}{\nu} = 0.05, \Phi = \frac{\pi}{4}, \eta = 0.1$, 其余与图 1 说明一样

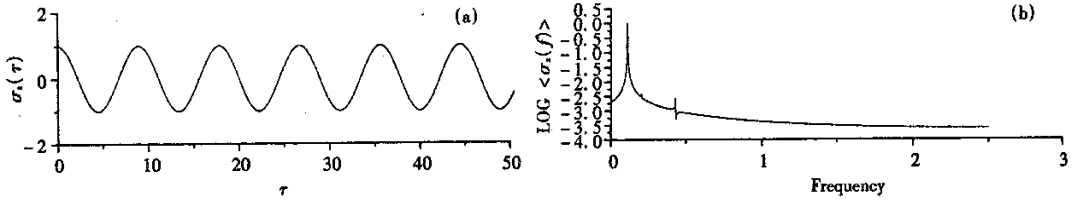


图5 $\frac{\Delta}{\Omega} = 0.01$, $\frac{\Omega}{\nu} = 0.5$, $\Phi = \frac{\pi}{4}$, $\eta = 0.01$, 其余与图1说明一样

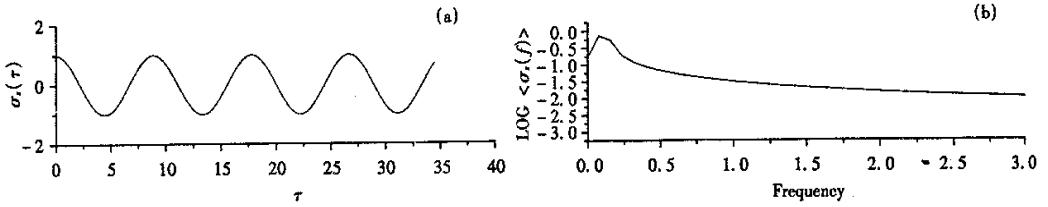


图6 $\frac{\Delta}{\Omega} = 0.01$, $\frac{\Omega}{\nu} = 0.05$, $\Phi = \frac{\pi}{4}$, $\eta = 0.01$, 其余与图1说明一样

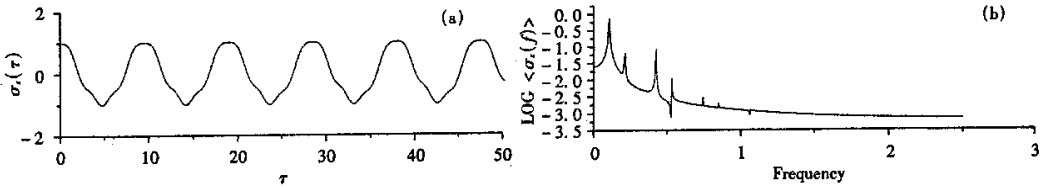


图7 $\frac{\Delta}{\Omega} = 1.0$, $\frac{\Omega}{\nu} = 0.5$, $\Phi = \frac{\pi}{4}$, $\eta = 0.5$, 其余与图1说明一样

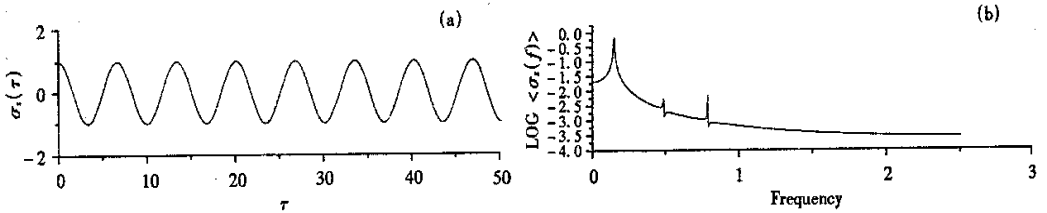


图8 $\frac{\Delta}{\Omega} = 0.01$, $\frac{\Omega}{\nu} = 0.5$, $\Phi = \pi$, $\eta = 0.5$, 其余与图1说明一样

我们以上用的是半经典的方法,即离子的内部运动仍然是量子处理,而外部运动则是用经典量 x 表示,这样做是为了处理问题的方便,因为不引入旋转波近似(3)式的时间演化很难精确地表达出来。而采用半经典的方法,体系的动力学能通过大家都熟悉的 Bloch-Maxwell 方程来研究。由于我们的模型中,离子的内部自由度是量子处理,因而,可与 JC 模型下的结果作比较。用了 JC 模型来讨论超冷离子与激光的相互作用所得的都是严格的周期解^[7],这是因为运用了旋转波近似的结果。我们的求解表明,在 η 和 Ω 并不太大时,即仍满足 Lamb-Dicke 区和弱激发区的要求时,离子的运动中就出现了许多非周期因素,这些非周期因素与离子阱的非谐振势^[8] 环境的干扰等都没有关系,是离子-激光体系中的反旋转项导致,即体系中固有的非线性特性,这些非线性特性的影响将随 Ω 和 η 的增大不断增大,

最终导致系统走向混沌。不过,由于我们模型的限制, η 和 Ω 都不能取太大的值,所以这些混沌特征不能在此深入研究。我们的工作也清楚地显示出, η 和 Ω 对体系的复杂变化起着几乎同样关键的作用,它们的作用在本模型中和在 JC 模型中都无法清楚地区分开。在经典处理中^[9],由于不考虑离子的内部自由度,因而单个离子在激光照射下是严格的周期运动,只有两个以上的离子在库仑排斥作用下才有混沌出现。本文中由于考虑了离子的内部自由度,单个离子的外部运动实质上也是混沌的,这点从(4d)式中可以明显地得知。

我们注意到,文献[10]曾对与本文相似的体系作过半经典研究,但这一工作限定于激光频率与离子跃迁频率共振的情形,且假定离子的内部量子跃迁为常量,所以,此工作中讨论的离子的外部运动实质上与离子的内部运动无关,我们认为这只是一种极为特殊的情况。本文考虑了失谐的情况,且在离子的内、外自由度相关联的情况下求解体系的时间演化,因而更能反映出真实、普遍的体系特征。众所周知,Lyapunov 指数是表征体系动力学的一个严格指标,遗憾的是,由于 Lyapunov 指数是一个不可观测量,我们认为在本文所取的相互作用表象中它无法正确地显示出体系的动力学行为特征,所以,本文采用粒子数反转的功率谱来表征体系的动力学行为。另外,离子的粒子数反转在实验上可以用电子搁置放大技术来有效验证^[11],因此,我们的工作对于超冷离子的实验工作将有一定的意义。更为重要的是,目前离子阱被认为是最有希望的量子计算设施,且已有几种“热”囚禁离子的量子计算方案提出^[12~14]。在这些方案中,离子无须处于量子运动基态,即 η 可以相对大一些,个别方案还要求 Ω 值较大,由于它们的数学基础都是 JC 模型,因此,本文的研究与这些工作也有一定联系。本文的工作是一种半经典处理,并非纯量子方法,但目前的量子体系中的混沌现象都是通过寻找相应的经典对应来作研究。因而,本文反映的混沌现象至少能提醒我们,离子阱量子计算方案中仍有许多问题有待我们深入细致的探讨。

参考文献

- [1] Jaynes E T, Cummings F M. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser[J]. Proc. IEEE, 1963, 51(1): 89~109.
- [2] Berman P. Cavity quantum electrodynamics, Advance in atomic, molecular and optical physics[C]. Supplement 2, Academic, San Diego, 1994.
- [3] Blockley C A, Walls D F, Risken H. Quantum collapses and revivals in a quantized trap[J]. Europhys. Lett., 1992, 17(6): 509~514.
- [4] Cirac J I, Blatt R, Parkins A S, Zoller P. Preparation of fock states by observation of quantum jumps in an ion trap[J]. Phys. Rev. Lett., 1993, 70(6): 762~765.
- [5] Vogel W, R. L. DE Mtos Filho. Nonlinear jaynes-cummings dynamics of a trapped ion[J]. Physical Review A., 1995, 52(5): 214~217.
- [6] Mang Feng, Xiwen Zhu, Ximing Fang, et al. Exact solution of a trapped ultracold ion interacting with a standing wave laser without rotating wave approximation[J]. J. Phys. B., 1999, 32(3): 701~709.
- [7] Cirac J I, Parkins A S, Blatt R, Zoller P. Nonclassical states of motion in ion traps[J]. Adv. at. Mol. Opt. Phys., 1996, 37(1): 237~296.

- [8] Kelin Gao , Xueli Luo , Xiwen Zhu , *et al.* . Observation of hysteresis of the ion cloud motion in an rf trap[J] . Chin. Phys. Lett. , 1997 , 14(8) 581 ~ 584 .
- [9] 施磊 , 段宜武 , 冯芒等 . Paul 阱中共线三离子体系的经典动力学[J] . 物理学报 , 1998 , 47(8) : 1 248 ~ 1 257 .
- [10] Chacón R , Cirac J I . Chaotic and regular behavior of a trapped ion interacting with a laser field[J] . Phys. Rev. A , 1995 , 51(6) : 4 900 ~ 4 905 .
- [11] Nagourney W , Sandberg J , Dehmelt H . Shelved optical electron amplifier : observation of quantum jumps [J] . Phys. Rev. Lett. , 1986 , 56(26) : 2 797 ~ 2 799 .
- [12] Poyatos J F , Cirac J I , Zoller P . Quantum gates with “ hot ” trapped ions[J] . Phys. Rev. Lett. , 1998 , 81(6) : 1 322 ~ 1 325 .
- [13] Schneider S , James D F V , Milburn G J . Method of quantum computation with “ hot ” trapped ion[J] . Eprint , Quant-ph/980801X submitted to phys. rev. lett.).
- [14] Anders SøRensen , Klaus Mølmer . Quantum computation with ions in thermal motion[J] . Phys. Rev. Lett. , 1999 , 82(9) : 1 971 ~ 1 978 .

Dynamics of the interaction between a trapped ultracold ion and a standing wave laser without rotating wave approximation

JIANG Yu-rong , FENG Mang , GAO Ke-lin , ZHU Xi-wen

(Laboratory of Magnetic Resonance and Atomic and Molecular Physics , Wuhan Institute of Physics and Mathematics , Academia Sinica , Wuhan 430071 , P. R. China)

Abstract : In an interaction representation , we study the dynamics of the interaction between a trapped ultracold ion and a standing wave laser within the Lamb-Dicke limit. As the rotating wave approximation is not introduced the ion's motion becomes more and more chaotic with the increase of the Lamb-Dicke parameter and Rabi frequency. Finally , we make a comparison of our results with those under the rotating wave approximation.

Keywords : without rotating wave approximation ; ultracold ion ; dynamics