第51卷第2期 数学学报中文版 Vol.51, No.2
2008年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Mar., 2008

**文章编号:** 0583-1431(2008)02-0241-12 **文献标识码: A**

# 二元外代数的 $\mathbb{Z}_n$-Galois 覆盖代数的 Hochschild (上) 同调群

侯 波 徐运阁

湖北大学数学与计算机科学学院 武汉 430062
E-mail: xuy@hubu.edu.cn

**摘 要** 设 $\Lambda$ 是特征不整除 $n$ 的域 $k$ 上的二元外代数, $\widetilde{\Lambda}$ 是 $\Lambda$ 的 $\mathbb{Z}_n$-Galois 覆盖代数. 首先构造了 $\widetilde{\Lambda}$ 的极小投射双模分解, 并由此清晰地计算了 $\widetilde{\Lambda}$ 的各阶 Hochschild 同调和上同调群的维数; 并且在域的特征为零时, 计算了 $\widetilde{\Lambda}$ 的循环同调群的维数.

**关键词** $\mathbb{Z}_n$-Galois 覆盖代数; 二元外代数; Hochschild (上) 同调群
**MR(2000) 主题分类** 16E40, 16E10, 16G10
**中图分类** O154.2

**Hochschild (Co)-Homology Groups of $\mathbb{Z}_n$-Galois Coverings of Exterior Algebras in Two Variables**

Bo HOU Yun Ge XU

*Faculty of Mathematics and Computer Science, Hubei University, Wuhan 430062, P. R. China*
*E-mail: xuy@hubu.edu.cn*

**Abstract** Let $\Lambda$ be the exterior algebras in two variables over a field $k$ satisfying $\mathrm{char}k \nmid n$, $\widetilde{\Lambda}$ be the $\mathbb{Z}_n$-Galois covering of $\Lambda$. We construct a minimal projective bimodule resolution of $\widetilde{\Lambda}$, and then we can explicitly calculate the Hochschild homology and co-homology of $\widetilde{\Lambda}$. Moreover, the cyclic homology of $\widetilde{\Lambda}$ can be calculated in case the underlying field is of characteristic zero.

**Keywords** $\mathbb{Z}_n$-Galois covering; exterior algebra in two variables; Hochschild (co)-homology group
**MR(2000) Subject Classification** 16E40, 16E10, 16G10
**Chinese Library Classification** O154.2

## 1 引言

设 $\Lambda$ 是域 $k$ 上的有限维结合代数 (含单位元 1), $\Lambda^e = \Lambda^{\mathrm{op}} \otimes_k \Lambda$ 是 $\Lambda$ 的包络代数. $\Lambda$ 的第 $i$ 阶 Hochschild 同调群与上同调群分别定义为

$$HH_i(\Lambda) = \mathrm{Tor}_i^{\Lambda^e}(\Lambda, \Lambda) \ \text{与}\ HH^i(\Lambda) = \mathrm{Ext}_{\Lambda^e}^i(\Lambda, \Lambda),$$

收稿日期: 2006-05-30; 接受日期: 2007-07-06
基金项目: 国家自然科学青年基金 (10501010) 与湖北省教育厅重点基金 (D200510005) 资助项目
本文通讯作者徐运阁: xuy@hubu.edu.cn

它们在有限维代数的表示理论中起着重要的作用. 例如, Hochschild 上同调群与代数的单连通性、可分性质及形变理论密切相关 [1–3]; 而 Hochschild 同调群与代数的整体维数及定向圈有着紧密的联系 [4–6]. 一般情况下计算代数的 Hochschild 同调群与上同调群是比较困难的, 但对于一些特殊的代数类, 如遗传代数 [1]、关联代数 [7–8]、狭窄箭图代数 [1,9]、根平方零代数 [10]、单项式代数 [11]、截面代数 [12–14]、特殊双列代数及其平凡扩张 [15] 的 Hochschild 上同调群的维数已被算出. 截面代数 [13,16]、拟遗传代数 [17] 及单项式代数 [4] 的 Hochschild 同调群的维数已被计算.

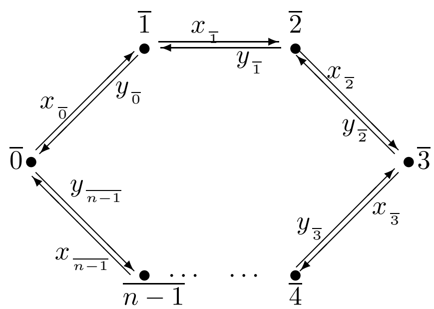
近年来, 代数拓扑中的一些理论与方法如覆盖理论已被广泛地应用于有限维非交换结合代数的表示理论. 文献 [18] 给出了线性范畴的 Galois 覆盖的 Hochschild–Mitchell (上) 同调群的 Cartan–Leray 谱序列. 而且扭群代数、Galois 覆盖及分次代数的 smash 积之间存在着密切的联系. 在此基础上, 韩阳证明了域 $k$ 上的代数 $\Lambda$ 为 Koszul 代数当且仅当它的有限 Galois 覆盖为 Koszul 代数, 其中 Galois 群 $G$ 满足 $\mathrm{char}k \nmid |G|$ (见文献 [19]).

外代数是一类特殊的 Koszul 代数, 它在代数几何、交换代数、微分几何等许多数学分支中都起着十分重要的作用. 文献 [20] 计算了 $n$ 元外代数的 Hochschild 同调群与上同调群的维数, 并决定了它的 Hochschild 上同调环的结构. 文献 [19] 展现了外代数的许多种 Galois 覆盖代数, 文献 [21] 考虑了 $n$ 元外代数的一类 $\mathbb{Z}_2$-Galois 覆盖代数的 Hochschild 同调与上同调群. 本文首先构造了二元外代数的另一类 $\mathbb{Z}_n$-Galois 覆盖代数的极小投射双模分解, 并由此清晰地计算了它的各阶 Hochschild 同调和上同调群的维数; 当基域的特征为零时, 我们也计算了它的各阶循环同调群的维数. 本文的计算有助于理解同一有限维代数的不同 Galois 覆盖代数之间的联系, 也为深入地理解有限维代数与其 Galois 覆盖代数的同调性质提供了一类重要而又有趣的例子.

## 2 极小投射双模分解

我们假设 $k$ 为特征不整除 $n$ 的域, 道路及映射的合成采用从左到右的顺序, 记 $\mathbb{Z}$ 为整数集, $\mathbb{Z}_n=\{\overline{0},\ \overline{1},\dots,\overline{n-1}\}$ 是模 $n$ 的剩余类加群.

设 $Q$ 是由顶点 $\overline{0},\ \overline{1},\dots,\overline{n-1}$ 及箭向 $x_{\overline{i}}:\overline{i}\to\overline{i+1},\ y_{\overline{i}}:\overline{i+1}\to\overline{i}$ 构成的有限箭图, 其中 $\overline{i}=\overline{0},\overline{1},\dots,\overline{n-1}$, 即




以后我们简记 $x_{\overline{i}}$ 为 $x_i$, $y_{\overline{i}}$ 为 $y_i$, 并且假定对任意的正整数 $j,\ k$, 若 $j\equiv k \pmod n$, 则 $x_j=x_k,\ y_j=y_k$. 对任意的路 $\rho\in kQ$, 记 $o(\rho)$ 为 $\rho$ 的起点, $t(\rho)$ 为 $\rho$ 的终点, 若 $\rho$ 由 $l$ 个箭向构成, 则称 $\rho$ 的长度为 $l$. 记 $I$ 是由 $R=\{x_ix_{i+1},\ x_iy_i+y_{i-1}x_{i-1},\ y_iy_{i-1}\mid 0\le i\le n-1\}$ 生成的路代数 $kQ$ 的理想. 则 $\widetilde{\Lambda}=kQ/I$ 是二元外代数 $\Lambda=k\langle x,y\rangle/(x^2,\ xy+yx,\ y^2)$ 的 $\mathbb{Z}_n$-Galois 覆盖代数, 从而是 Koszul 代数 [20]. 设 $\mathscr{B}=\{e_i,\ x_i,\ y_i,\ x_iy_i\mid 0\le i\le n-1\}$ 是 $\widetilde{\Lambda}$ 的一组 $k$- 基, 其中 $\{e_i\mid 0\le i\le n-1\}$ 为 $\widetilde{\Lambda}$ 的本原正交幂等元, 而且我们将 $\mathscr{B}$ 中的元素与它们在 $\widetilde{\Lambda}$ 中的像等同.

从而 $\dim_k\widetilde{\Lambda}=4n$. 若规定

$$e_0\prec e_1\prec\cdots\prec e_{n-1}\prec x_0\prec\cdots\prec x_{n-1}\prec y_0\prec\cdots\prec y_{n-1}\prec x_0y_0\prec\cdots\prec x_{n-1}y_{n-1},$$

则 $\mathscr{B}$ 关于 $\prec$ 构成 $\widetilde{\Lambda}$ 的有序基.

设 $\widetilde{\Lambda}^!$ 是 $\widetilde{\Lambda}$ 的二次对偶, 则 $\widetilde{\Lambda}^!\cong kQ/(R^\perp)$, 其中 $R^\perp=\{x_iy_i-y_{i-1}x_{i-1}\mid 0\le i\le n-1\}$. 并且 $\widetilde{\Lambda}^!$ 具有乘法基. 若令

$$\Gamma^{(l)}=\{\alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}}=x_ix_{i+1}\cdots x_{i+j_1-1}y_{i+j_1-1}y_{i+j_1-2}\cdots y_{i+j_1-j_2}\mid j_1+j_2=l,\ 0\le i\le n-1\},$$

则不难验证 $\Gamma=\bigcup_{l\ge0}\Gamma^{(l)}$ 构成 $\widetilde{\Lambda}^!$ 的一组 $k$- 基.

下面构造 $\widetilde{\Lambda}$ 的极小投射双模分解 $(P_\bullet,\delta_\bullet)$. 设 $\widetilde{\Lambda}^e=\widetilde{\Lambda}^{\rm op}\otimes_k\widetilde{\Lambda}$ 是 $\widetilde{\Lambda}$ 的包络代数, 记 $\otimes:=\otimes_k$. 对任意的 $l\ge0$, $P_l:=\coprod_{\alpha\in\Gamma^{(l)}}\widetilde{\Lambda}o(\alpha)\otimes t(\alpha)\widetilde{\Lambda}$ 是投射 $\widetilde{\Lambda}^e$- 模. 对任意的 $\alpha=\alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}}\in\Gamma^{(l)}$, 定义

$$\begin{aligned}\delta_l(o(\alpha)\otimes t(\alpha))=&\,x_i\otimes t\big(\alpha^{(l-1,i+1)}_{x^{j_1-1}y^{j_2}}\big)+(-1)^lo\big(\alpha^{(l-1,i)}_{x^{j_1-1}y^{j_2}}\big)\otimes x_{i+j_1-j_2-1}\\&+y_{i-1}\otimes t\big(\alpha^{(l-1,i-1)}_{x^{j_1}y^{j_2-1}}\big)+(-1)^lo\big(\alpha^{(l-1,i)}_{x^{j_1}y^{j_2-1}}\big)\otimes y_{i+j_1-j_2}.\end{aligned}$$

**定理 2.1**　设 $\widetilde{\Lambda}=kQ/I$ 为二元外代数 $\Lambda$ 的 $\mathbb{Z}_n$-Galois 覆盖代数, 则复形 $(P_\bullet,\delta_\bullet)$

$$\cdots\longrightarrow P_l\xrightarrow{\delta_l}P_{l-1}\xrightarrow{\delta_{l-1}}\cdots\xrightarrow{\delta_3}P_2\xrightarrow{\delta_2}P_1\xrightarrow{\delta_1}P_0\longrightarrow0$$

是 $\widetilde{\Lambda}^e$- 模 $\widetilde{\Lambda}$ 的极小投射分解.

**证明**　由于 Koszul 代数 $\widetilde{\Lambda}$ 的二次对偶 $\widetilde{\Lambda}^!$ 同构于 $\widetilde{\Lambda}$ 的 Yoneda 代数 $E(\widetilde{\Lambda})$ (详见文献 [22, 定理 2.10.1]), 因此, $\Gamma^{(l)}$ 给出了 $\widetilde{\Lambda}$ 的极大半单子代数 $\widetilde{\Lambda}_0$ 在 $\widetilde{\Lambda}$ 上的 (分次) 线性投射分解

$$\cdots\to P_l'\longrightarrow P_{l-1}'\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_2'\longrightarrow P_1'\longrightarrow P_0'\longrightarrow0,$$

其中 $P_l'=\coprod_{\alpha\in\Gamma^{(l)}}\widetilde{\Lambda}o(\alpha)$, 则由文献 [23, 定理 2.1] 可知该定理成立. 证毕.

## 3　Hochschild 同调群与循环同调群

这一节将计算覆盖代数 $\widetilde{\Lambda}=kQ/I$ 的各阶 Hochschild 同调群与循环同调群的维数. 设 $X$, $Y$ 是由道路组成的集合, 定义 $X\odot Y=\{(p,\ q)\in X\times Y\mid t(p)=o(q)$ 且 $t(q)=o(p)\}$, 记 $k(X\odot Y)$ 为域 $k$ 上以 $X\odot Y$ 为基的向量空间. 同前一节, $\mathscr{B}$ 是 $\widetilde{\Lambda}=kQ/I$ 的有序基, $\Gamma$ 是 $\widetilde{\Lambda}^!$ 的 $k$- 基.

用函子 $\widetilde{\Lambda}\otimes_{\widetilde{\Lambda}^e}-$ 作用于 $\widetilde{\Lambda}$ 的极小投射双模分解 $(P_\bullet,\delta_\bullet)$, 得到

**引理 3.1**　同调复形 $\widetilde{\Lambda}\otimes_{\widetilde{\Lambda}^e}(P_\bullet,\delta_\bullet)=(N_\bullet,\tau_\bullet)$, 其中 $N_l\cong k(\mathscr{B}\odot\Gamma^{(l)})$, 且对任意的 $b\in\mathscr{B}$, $\alpha=\alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}}\in\Gamma^{(l)}$, 有

$$\begin{aligned}\tau_l(b,\ \alpha)=&\big(bx_i,\ \alpha^{(l-1,i+1)}_{x^{j_1-1}y^{j_2}}\big)+(-1)^l\big(x_{i+j_1-j_2-1}b,\ \alpha^{(l-1,i)}_{x^{i_1-1}y^{j_2}}\big)\\&+\big(by_{i-1},\ \alpha^{(l-1,i-1)}_{x^{i_1}y^{j_2-1}}\big)+(-1)^l\big(y_{i+j_l-j_2}b,\ \alpha^{(l-1,i)}_{x^{i_1}y^{j_2-1}}\big).\end{aligned}$$

**证明**　设 $\widetilde{\Lambda}_0$ 为 $\widetilde{\Lambda}$ 的极大半单子代数, 由 $N_l=\widetilde{\Lambda}\otimes_{\widetilde{\Lambda}^e}P_l=\widetilde{\Lambda}\otimes_{\widetilde{\Lambda}_0^e}\coprod_{\alpha\in\Gamma^{(l)}}(o(\alpha)\otimes_k t(\alpha))\cong\coprod_{i,j=0}^{n-1}e_i\widetilde{\Lambda}e_j\otimes_k e_j\Gamma^{(l)}e_i$, 可知 $\mathscr{B}\odot\Gamma^{(l)}$ 构成 $N_l$ 在 $k$ 上的一组基, 且微分 $\tau_l$ 可由 $\widetilde{\Lambda}$ 的极小投射双模分解 $(P_\bullet,\delta_\bullet)$ 中对应的微分得到 [23]. 证毕.

由 $HH_l(\widetilde{\Lambda})={\rm Ker}\tau_l/{\rm Im}\tau_{l+1}$ 知

$$\begin{aligned}\dim_kHH_l(\widetilde{\Lambda})&=\dim_k{\rm Ker}\,\tau_l-\dim_k{\rm Im}\,\tau_{l+1}\\&=\dim_kN_l-\dim_k{\rm Im}\,\tau_l-\dim_k{\rm Im}\,\tau_{l+1}.\end{aligned}$$

要计算 $\widetilde{\Lambda}$ 的 Hochschild 同调群的维数, 只需计算 $\dim_k N_l$, $\dim_k \mathrm{Im}\,\tau_l$ 即可.

**引理 3.2** 设 $\widetilde{\Lambda}=kQ/I$ 是二元外代数 $\Lambda$ 的 $\mathbb{Z}_n$-Galois 覆盖代数, $l=pn+r$, 其中 $p$ 为非负整数, 整数 $r$ 满足 $0\le r<n$, 则有

$$\dim_k N_l=\begin{cases}2n+4pn, & \text{当 } 0\le r<n-1 \text{ 时;}\\ 4n+4pn, & \text{当 } r=n-1 \text{ 时.}\end{cases}$$

**证明** 对任意的 $\alpha^{(l,j)}_{x^{j_1}y^{j_2}}\in\Gamma^{(l)}$, 由 $\mathscr{B}\odot\Gamma^{(l)}$ 的定义可知 $(e_i,\ \alpha^{(l,j)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in\mathscr{B}\odot\Gamma^{(l)}$ 当且仅当 $\alpha^{(l,j)}_{x^{j_1}y^{j_2}}$ 的终点与起点都为点 $i$, 即 $j=i,\ j_1\equiv j_2 \pmod n$. 类似地, $(x_iy_i,\ \alpha^{(l,j)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in\mathscr{B}\odot\Gamma^{(l)}$ 当且仅当 $j=i,\ j_1\equiv j_2 \pmod n$; $(x_i,\ \alpha^{(l,j)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in\mathscr{B}\odot\Gamma^{(l)}$ 当且仅当 $j=i+1,\ j_1\equiv j_2-1 \pmod n$; $(y_i,\ \alpha^{(l,j)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in\mathscr{B}\odot\Gamma^{(l)}$ 当且仅当 $j=i,\ j_1\equiv j_2+1 \pmod n$. 所以, 若记

$$\begin{aligned}M_1^l&=\{(e_i,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\mid j_1\equiv j_2 \pmod n,\ 0\le i\le n-1\},\\ M_2^l&=\{(x_i,\ \alpha^{(l,i+1)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\mid j_1\equiv j_2-1 \pmod n,\ 0\le i\le n-1\},\\ M_3^l&=\{(y_i,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\mid j_1\equiv j_2+1 \pmod n,\ 0\le i\le n-1\},\\ M_4^l&=\{(x_iy_i,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\mid j_1\equiv j_2 \pmod n,\ 0\le i\le n-1\},\end{aligned}$$

则

$$\mathscr{B}\odot\Gamma^{(l)}=M_1^l\cup M_2^l\cup M_3^l\cup M_4^l.$$

**情形 I** $n$ 为偶数.

(1) $l$ 为奇数：若存在 $(e_i,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in M_1^l$ 或 $(x_iy_i,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in M_4^l$, 则 $j_2=kn+j_1,\ l=kn+2j_1$ $(k\in\mathbb{Z})$, 这与 $l$ 为奇数矛盾. 所以此时 $|M_1^l|=|M_4^l|=0$, $\mathscr{B}\odot\Gamma^{(l)}=M_2^l\cup M_3^l$.

当 $0\le r<n-1$ 时, 对任意的 $x_i\in\mathscr{B}$, 若 $(x_i,\ \alpha^{(l,i+1)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in M_2^l$, 则当 $j_1<j_2$ 时, 由 $j_2=kn+j_1+1,\ l=kn+2j_1+1$ 可知 $k$ 可取 $0,1,\dots,p$, 即有 $p+1$ 个 $\alpha^{(l,i+1)}_{x^{j_1}y^{j_2}}$, 使得 $(x_i,\ \alpha^{(l,i+1)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in M_2^l$; 当 $j_1>j_2$ 时, 由 $j_1=kn+j_2-1,\ l=kn+2j_2-1$ 可知 $k$ 可取 $1,2,\dots,p$, 即有 $p$ 个 $\alpha^{(l,i+1)}_{x^{j_1}y^{j_2}}$, 使得 $(x_i,\ \alpha^{(l,i+1)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in M_2^l$. 由 $x_i$ 的任意性, 即得 $|M_2^l|=(2p+1)n$. 同理 $|M_3^l|=(2p+1)n$, 所以 $\dim_k N_l=|\mathscr{B}\odot\Gamma^{(l)}|=|M_2^l|+|M_3^l|=2n+4pn$.

当 $r=n-1$ 时, 类似于上述分析, 但注意到 $j_1>j_2$ 时, $k$ 可取 $1,2,\dots,p,p+1$, 即有 $p+1$ 个 $\alpha^{(l,i+1)}_{x^{j_1}y^{j_2}}$, 使得 $(x_i,\ \alpha^{(l,i+1)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in M_2^l$, 所以 $|M_2^l|=(2p+2)n$. 同理 $|M_3^l|=(2p+2)n$, 所以 $\dim_k N_l=|\mathscr{B}\odot\Gamma^{(l)}|=|M_2^l|+|M_3^l|=4n+4pn$.

(2) $l$ 为偶数：若存在 $(x_i,\ \alpha^{(l,i+1)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in M_2^l$, 则 $j_2=kn+j_1+1,\ l=kn+2j_1+1$ $(k\in\mathbb{Z})$, 这与 $l$ 为偶数矛盾. 所以 $|M_2^l|=0$, 同理 $|M_3^l|=0$, 所以此时 $\mathscr{B}\odot\Gamma^{(l)}=M_1^l\cup M_4^l$.

对任意的 $e_i\in\mathscr{B}$, 若 $(e_i,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in M_1^l$, 则当 $j_1\le j_2$ 时, 由 $j_2=kn+j_1,\ l=kn+2j_1$ 可知 $k$ 可取 $0,1,\dots,p$, 即有 $p+1$ 个 $\alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}}$, 使得 $(e_i,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in M_1^l$; 当 $j_1>j_2$ 时, 由 $j_1=kn+j_2,\ l=kn+2j_2$ 可知 $k$ 可取 $1,2,\dots,p$, 即有 $p$ 个 $\alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}}$, 使得 $(e_i,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in M_1^l$. 由 $e_i$ 的任意性即得 $|M_1^l|=(2p+1)n$. 同理 $|M_4^l|=(2p+1)n$, 所以 $\dim_k N_l=|\mathscr{B}\odot\Gamma^{(l)}|=|M_1^l|+|M_4^l|=2n+4pn$.

**情形 II** $n$ 为奇数.

(1) $l$ 为奇数：对任意的 $k\in\mathbb{Z}$, 记 $k^+$ 为不大于 $k$ 的最大偶数, $k^-$ 为不大于 $k$ 的最大奇数, 则有 $k^++k^-=2k-1$.

当 $0 \le r < n-1$ 时, 对任意的 $x_i \in \mathscr{B}$, 若 $(x_i,\ \alpha^{(l,i+1)}_{x^{j_1}y^{j_2}}) \in M^l_2$, 则当 $j_1 < j_2$ 时, 由 $j_2 = kn + j_1 + 1$, $l = kn + 2j_1 + 1$ 可知 $k$ 可取 $0, 2, \ldots, p^+$, 即有 $\frac{p^+}{2} + 1$ 个 $\alpha^{(l,i+1)}_{x^{j_1}y^{j_2}}$, 使得 $(x_i,\ \alpha^{(l,i+1)}_{x^{j_1}y^{j_2}}) \in M^l_2$; 当 $j_1 > j_2$ 时, 由 $j_1 = kn + j_2 - 1$, $l = kn + 2j_2 - 1$ 可知 $k$ 可取 $2, 4, \ldots, p^+$, 即有 $\frac{p^+}{2}$ 个 $\alpha^{(l,i+1)}_{x^{j_1}y^{j_2}}$, 使得 $(x_i,\ \alpha^{(l,i+1)}_{x^{j_1}y^{j_2}}) \in M^l_2$. 由 $x_i$ 的任意性即得 $|M^l_2| = (p^+ + 1)n$. 同理 $|M^l_3| = (p^+ + 1)n$; $|M^l_1| = (p^- + 1)n$; $|M^l_4| = (p^- + 1)n$, 所以 $\dim_k N_l = |\mathscr{B} \odot \Gamma^{(l)}| = |M^l_1| + |M^l_2| + |M^l_3| + |M^l_4| = 2(p^- + p^+)n + 4n = 2n + 4pn$.

当 $r = n-1$ 时, 类似于上述分析, 但注意到 $j_1 > j_2$ 时, $k$ 可取 $2, 4, \ldots, p^+, p+1$, 即有 $\frac{p^+}{2} + 1$ 个 $\alpha^{(l,i+1)}_{x^{j_1}y^{j_2}}$, 使得 $(x_i,\ \alpha^{(l,i+1)}_{x^{j_1}y^{j_2}}) \in M^l_2$. 所以 $|M^l_2| = (p^+ + 2)n$. 同理 $|M^l_3| = (p^+ + 2)n$, 所以 $\dim_k N_l = |\mathscr{B} \odot \Gamma^{(l)}| = |M^l_1| + |M^l_2| + |M^l_3| + |M^l_4| = 2(p^- + p^+)n + 6n = 4n + 4pn$.

(2) $l$ 为偶数: 类似于 $l$ 为奇数时的分析, 便可得到:

当 $0 \le r < n-1$ 时, $\dim_k N_l = |\mathscr{B} \odot \Gamma^{(l)}| = |M^l_1| + |M^l_2| + |M^l_3| + |M^l_4| = 2(p^- + p^+)n + 4n = 2n + 4pn$.

当 $r = n-1$ 时, $\dim_k N_l = |\mathscr{B} \odot \Gamma^{(l)}| = |M^l_1| + |M^l_2| + |M^l_3| + |M^l_4| = 2(p^- + p^+)n + 6n = 4n + 4pn$. 证毕.

对任意的 $(b,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})$, $(b',\ \alpha^{(l,j)}_{x^{k_1}y^{k_2}}) \in \mathscr{B} \odot \Gamma^{(l)}$, 必存在 $M^l_s$, $M^l_t$ $(1 \le s,\ t \le 4)$, 使得 $(b,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}}) \in M^l_s$, $(b',\ \alpha^{(l,j)}_{x^{k_1}y^{k_2}}) \in M^l_t$. 当 $s \ne t$ 时, 定义 $(b,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}}) \prec (b',\ \alpha^{(l,j)}_{x^{k_1}y^{k_2}})$ 如果 $s < t$; 当 $s = t$ 时, 定义 $(b,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}}) \prec (b',\ \alpha^{(l,j)}_{x^{k_1}y^{k_2}})$ 如果 $j_1 < k_1$, 或 $j_1 = k_1$ 且 $b \prec b'$, 则 $\mathscr{B} \odot \Gamma^{(l)}$ 为 $N_l$ 的一组定序基. $\tau_l$ 在这组定序基下的矩阵仍记作 $\tau_l$, $\mathrm{rank}\tau_l$ 为它的秩.

**引理 3.3**　设 $\widetilde{\Lambda} = kQ/I$ 是二元外代数 $\Lambda$ 的 $\mathbb{Z}_n$-Galois 覆盖代数, $l = pn + r \ne 0$, 其中 $p$ 为非负整数, 整数 $r$ 满足 $0 \le r < n$, 则有

$$\mathrm{rank}\,\tau_l = \begin{cases} (2p+1)(n-1), & \text{当 } n \text{ 为偶数时;} \\ pn + (p+1)(n-1), & \text{当 } n,\ p \text{ 皆为奇数时;} \\ p(n-1) + (p+1)n, & \text{当 } n \text{ 为奇数, } p \text{ 为偶数时.} \end{cases}$$

**证明**　记

$$C_i = \begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{pmatrix}_{i\times i}, \text{其中}\ A = \begin{pmatrix} 1 & & & & (-1)^l \\ (-1)^l & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & (-1)^l & 1 & \\ & & & (-1)^l & 1 \end{pmatrix}_{n\times n};$$

$$D_i = \begin{pmatrix} B & & & \\ & B & & \\ & & \ddots & \\ & & & B \end{pmatrix}_{i\times i}, \text{其中}\ B = \begin{pmatrix} 1 & (-1)^{l+1} & & & \\ & 1 & (-1)^{l+1} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & (-1)^{l+1} \\ (-1)^{l+1} & & & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

则当 $n$ 为偶数时, $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B = n-1$; 当 $n$ 为奇数时, 若 $l$ 为偶数, $\mathrm{rank}A = n$, $\mathrm{rank}B = n-1$, 若 $l$ 为奇数, $\mathrm{rank}A = n-1$, $\mathrm{rank}B = n$.

对任意的矩阵 $X$, 记 $X' = \binom{X}{0}$ 表示矩阵 $X$ 后添加 $n$ 行 0 后得到的矩阵, 记 $X'' = \binom{0}{X}$ 表示矩阵 $X$ 前添加 $n$ 行 0 后得到的矩阵.

**情形 I** $n$ 为偶数.

(1) $0<r<n-1$: 当 $r$ 为奇数时, $l$ 也为奇数, 由 $\tau_l$ 的定义及 $\mathscr{B}\odot\Gamma^{(l)}$ 的结构可知, $\tau_l$ 在 $\mathscr{B}\odot\Gamma^{(l)}$ 下的矩阵为 $2\times 2$ 分块矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & D_{2p+1} \\ 0 & (-1)^l D_{2p+1} \end{pmatrix},$$

所以 $\mathrm{rank}\tau_l=\mathrm{rank}D_{2p+1}=(2p+1)\mathrm{rank}B=(2p+1)(n-1)$. 类似地, 当 $r$ 为偶数时, $l$ 也为偶数, $\tau_l$ 在 $\mathscr{B}\odot\Gamma^{(l)}$ 下的矩阵为 $2\times 2$ 分块矩阵

$$\begin{pmatrix} C_{2p+1} & (-1)^l C_{2p+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $\mathrm{rank}\tau_l=\mathrm{rank}C_{2p+1}=(2p+1)\mathrm{rank}A=(2p+1)(n-1)$.

(2) $r=n-1$: 此时 $l$ 为奇数, $\tau_l$ 在 $\mathscr{B}\odot\Gamma^{(l)}$ 下的矩阵为 $2\times 2$ 分块矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & D''_{2p+1} \\ 0 & (-1)^l D'_{2p+1} \end{pmatrix},$$

所以 $\mathrm{rank}\tau_l=\mathrm{rank}D_{2p+1}=(2p+1)\mathrm{rank}B=(2p+1)(n-1)$.

(3) $r=0$: 此时 $l$ 为偶数, $\tau_l$ 在 $\mathscr{B}\odot\Gamma^{(l)}$ 下的矩阵为 $2\times 2$ 分块矩阵

$$\begin{pmatrix} C'_{2p} & (-1)^l C''_{2p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $\mathrm{rank}\tau_l=\mathrm{rank}C_{2p+1}=(2p+1)\mathrm{rank}A=(2p+1)(n-1)$.

**情形 II** $n$ 为奇数.

(1) $0<r<n-1$: 当 $r$ 为奇数时, $\tau_l$ 在 $\mathscr{B}\odot\Gamma^{(l)}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & C_p & (-1)^l C_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{p+1} \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^l D_{p+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

若 $l$ 为奇数, 则 $p$ 为偶数, 从而 $\mathrm{rank}\tau_l=\mathrm{rank}C_p+\mathrm{rank}D_{p+1}=p\ \mathrm{rank}A+(p+1)\mathrm{rank}B=p(n-1)+(p+1)n$; 若 $l$ 为偶数, 则 $p$ 为奇数, 从而 $\mathrm{rank}\tau_l=\mathrm{rank}C_p+\mathrm{rank}D_{p+1}=p\ \mathrm{rank}A+(p+1)\mathrm{rank}B=pn+(p+1)(n-1)$. 类似地, 当 $r$ 为偶数时, $\tau_l$ 在 $\mathscr{B}\odot\Gamma^{(l)}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & C_{p+1} & (-1)^l C_{p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_p \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^l D_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

若 $l$ 为奇数, 则 $p$ 为奇数, 从而 $\mathrm{rank}\tau_l=\mathrm{rank}C_{p+1}+\mathrm{rank}D_p=(p+1)\mathrm{rank}A+p\ \mathrm{rank}B=(p+1)(n-1)+pn$; 若 $l$ 为偶数, 则 $p$ 为偶数, 从而 $\mathrm{rank}\tau_l=\mathrm{rank}C_{p+1}+\mathrm{rank}D_p=(p+1)\cdot\mathrm{rank}A+p\ \mathrm{rank}B=(p+1)n+p(n-1)$.

(2) $r=n-1$: $\tau_l$ 在 $\mathscr{B}\odot\Gamma^{(l)}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & C_{p+1} & (-1)^l C_{p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D''_p \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^l D'_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

若 $l$ 为奇数, 则 $p$ 为奇数, 从而 $\mathrm{rank}\tau_l=\mathrm{rank}C_{p+1}+\mathrm{rank}D_p=(p+1)\mathrm{rank}A+p\ \mathrm{rank}B=(p+1)(n-1)+pn$; 若 $l$ 为偶数, 则 $p$ 为偶数, 从而

$$\mathrm{rank}\tau_l=\mathrm{rank}C_{p+1}+\mathrm{rank}D_p=(p+1)\mathrm{rank}A+p\ \mathrm{rank}B=(p+1)n+p(n-1).$$

(3) $r=0$: $\tau_l$ 在 $\mathscr{B}\odot\Gamma^{(l)}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & C_p' & (-1)^l C_p'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_p \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^l D_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

若 $l$ 为奇数, 则 $p$ 为奇数, 从而 $\mathrm{rank}\tau_l=\mathrm{rank}C_{p+1}+\mathrm{rank}D_p=(p+1)\mathrm{rank}A+p\ \mathrm{rank}B=(p+1)(n-1)+pn$; 若 $l$ 为偶数, 则 $p$ 为偶数, 从而 $\mathrm{rank}\tau_l=\mathrm{rank}C_{p+1}+\mathrm{rank}D_p=(p+1)\cdot\mathrm{rank}A+p\ \mathrm{rank}B=(p+1)n+p(n-1)$. 证毕.

**定理 3.4** 设 $\widetilde{\Lambda}=kQ/I$ 是二元外代数 $\Lambda$ 的 $\mathbb{Z}_n$-Galois 覆盖代数, $l=pn+r$, 其中 $p$ 为非负整数, 整数 $r$ 满足 $0\le r<n$, 则当 $n$ 为偶数时

$$\dim_k HH_l(\widetilde{\Lambda})=\begin{cases} n+1, & \text{当 } l=0 \text{ 时;}\\ 4p+2, & \text{当 } l>0 \text{ 且 } 0\le r<n-1 \text{ 时;}\\ 4p+4, & \text{当 } l>0 \text{ 且 } r=n-1 \text{ 时.}\end{cases}$$

当 $n$ 为奇数时

$$\dim_k HH_l(\widetilde{\Lambda})=\begin{cases} n, & \text{当 } l=0 \text{ 时;}\\ 2p, & \text{当 } l>0,\ 0\le r<n-1 \text{ 且 } p \text{ 为偶数时;}\\ 2p+2, & \text{其它.}\end{cases}$$

**证明** 当 $l=0$ 时, 若 $n$ 为偶数, $\dim_k HH_0(\widetilde{\Lambda})=\dim_k N_0-\mathrm{rank}\tau_1=2n-(n-1)=n+1$; 若 $n$ 为奇数, $\dim_k HH_0(\widetilde{\Lambda})=\dim_k N_0-\mathrm{rank}\tau_1=2n-n=n$.

当 $l>0$ 时, 由引理 3.2, 引理 3.3 及 $\dim_k HH_l(\widetilde{\Lambda})=\dim_k N_l-\mathrm{rank}\,\tau_l-\mathrm{rank}\,\tau_{l+1}$, 可得到该定理. 证毕.

**推论 3.5**[20] 设 $\Lambda$ 为二元外代数, $\widetilde{\Lambda}=kQ/I$ 是 $\Lambda$ 的 $\mathbb{Z}_n$-Galois 覆盖代数, 则当 $n=2$ 时, 恒有 $\dim_k HH_l(\widetilde{\Lambda})=\dim_k HH_l(\Lambda)$.

记 $HC_l(\widetilde{\Lambda})$ 为 $\widetilde{\Lambda}$ 的第 $l$- 阶循环同调群 [24], 则有

**推论 3.6** 设 $\Lambda$ 为域 $k$ 上的二元外代数且 char$k$=0, $\widetilde{\Lambda}=kQ/I$ 是 $\Lambda$ 的 $\mathbb{Z}_n$-Galois 覆盖代数, $l=pn+r$, 其中 $p$ 为非负整数, 整数 $r$ 满足 $0\le r<n$, 则当 $n$ 为偶数时

$$\dim_k HC_l(\widetilde{\Lambda})=\begin{cases} 2p+1, & \text{当 } l \text{ 为奇数且 } 0\le r<n-1 \text{ 时;}\\ 2p+3, & \text{当 } l \text{ 为奇数且 } r=n-1 \text{ 时;}\\ 2p+n+1, & \text{当 } l \text{ 为偶数时.}\end{cases}$$

当 $n$ 为奇数时

$$\dim_k HC_l(\widetilde{\Lambda})=\begin{cases} p+1, & \text{当 } l \text{ 为奇数 且 } p \text{ 为奇数时;}\\ p, & \text{当 } l \text{ 为奇数 且 } p \text{ 为偶数时;}\\ p+n, & \text{当 } l \text{ 为偶数, } p \text{ 为偶数 且 } 0\le r<n-1 \text{ 时;}\\ p+n+2, & \text{当 } l \text{ 为偶数, } p \text{ 为偶数 且 } r=n-1 \text{ 时;}\\ p+n+1, & \text{当 } l \text{ 为偶数 且 } p \text{ 为奇数时.}\end{cases}$$

**证明** 由文献 [24, 定理 4.1.13] 可知:

$$\begin{aligned}\dim_k HC_l(\widetilde{\Lambda})-\dim_k HC_l(k^n)=&-(\dim_k HC_{l-1}(\widetilde{\Lambda})-\dim_k HC_{l-1}(k^n))\\ &+(\dim_k HH_l(\widetilde{\Lambda})-\dim_k HH_l(k^n)).\end{aligned}$$

即 $\dim_k HC_l(\widetilde{\Lambda}) - \dim_k HC_l(k^n) = \sum_{i=0}^{l}(-1)^{l-i}(\dim_k HH_i(\widetilde{\Lambda}) - \dim_k HH_i(k^n))$.

又因为

$$\dim_k HH_i(k^n) = \begin{cases} n, & \text{当 } i=0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } i>0 \text{ 时.} \end{cases} \quad \dim_k HC_l(k^n) = \begin{cases} n, & \text{当 } l \text{ 为偶数时;} \\ 0, & \text{当 } l \text{ 为奇数时.} \end{cases}$$

所以由定理 3.4 的结果即可得到该推论. 证毕.

## 4 Hochschild 上同调群

这一节, 将计算覆盖代数 $\widetilde{\Lambda} = kQ/I$ 的各阶 Hochschild 上同调群的维数. 设 $S$, $T$ 是由道路组成的集合, 定义 $S/\!/T = \{(p,\ q) \in S \times T \mid o(p) = o(q) \text{ 且 } t(p) = t(q)\}$. 记 $k(S/\!/T)$ 为域 $k$ 上以 $S/\!/T$ 为基的向量空间. 同第二节, $\mathscr{B}$ 是 $\widetilde{\Lambda} = kQ/I$ 的有序基, $\Gamma$ 是 $\widetilde{\Lambda}^!$ 的 $k$- 基.

用函子 $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\Lambda}^e}(-,\widetilde{\Lambda})$ 作用于 $\widetilde{\Lambda}$ 的极小投射双模分解 $(P_\bullet, \delta_\bullet)$, 得到 $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\Lambda}^e}((P_\bullet,\delta_\bullet),\widetilde{\Lambda}) = (P_\bullet^*, \delta_\bullet^*)$, 其中 $P_l^* = \mathrm{Hom}_{\widetilde{\Lambda}^e}(P_l, \widetilde{\Lambda})$, 对于任意的 $f \in P_l^*$, $\delta_{l+1}^*(f) = \delta_{l+1} f$, 且有

**引理 4.1** 上同调复形 $(P_\bullet^*, \delta_\bullet^*) \cong (M^\bullet, \sigma^\bullet)$, 其中 $M^l := k(\mathscr{B}/\!/\Gamma^{(l)})$, $\sigma^{l+1}: M^l \to M^{l+1}$, 且对任意的 $(b,\ \alpha) = (b,\ \alpha_{x^{j_1}y^{j_2}}^{(l,i)}) \in \mathscr{B}/\!/\Gamma^{(l)}$, 有

$$\begin{aligned}\sigma^{l+1}(b,\ \alpha) =& (x_{i-1}b,\ x_{i-1}\alpha) + (-1)^{l+1}(bx_{i+j_1-j_2},\ \alpha x_{i+j_1-j_2}) \\ &+ (y_i b,\ y_i\alpha) + (-1)^{l+1}(by_{i+j_1-j_2-1},\ \alpha y_{i+j_1-j_2-1}).\end{aligned}$$

**证明** 由 $P_l^* = \mathrm{Hom}_{\widetilde{\Lambda}^e}(P_l, \widetilde{\Lambda}) = \mathrm{Hom}_{\widetilde{\Lambda}^e}(\coprod_{\alpha\in\Gamma^{(l)}} \widetilde{\Lambda}o(\alpha)\otimes t(\alpha)\widetilde{\Lambda}, \widetilde{\Lambda}) = \coprod_{\alpha\in\Gamma^{(l)}} \mathrm{Hom}_{\widetilde{\Lambda}^e}(\widetilde{\Lambda}o(\alpha)\otimes t(\alpha)\widetilde{\Lambda}, \widetilde{\Lambda}) \cong \coprod_{\alpha\in\Gamma^{(l)}} o(\alpha)\widetilde{\Lambda}t(\alpha)$, 可知 $P_l^* \cong M^l = k(\mathscr{B}/\!/\Gamma^{(l)})$, 且微分 $\sigma^l$ 可由 $\widetilde{\Lambda}$ 的极小投射双模分解 $(P_\bullet, \delta_\bullet)$ 中对应的微分得到. 证毕.

由 $HH^l(\widetilde{\Lambda}) = \mathrm{Ker}\sigma^{l+1}/\mathrm{Im}\sigma^l$ 知

$$\begin{aligned}\dim_k HH^l(\widetilde{\Lambda}) &= \dim_k \mathrm{Ker}\,\sigma^{l+1} - \dim_k \mathrm{Im}\,\sigma^l \\ &= \dim_k M^l - \dim_k \mathrm{Im}\,\sigma^l - \dim_k \mathrm{Im}\,\sigma^{l+1}.\end{aligned}$$

要计算 $\widetilde{\Lambda}$ 的 Hochschild 上同调群的维数, 只需计算 $\dim_k M^l$, $\dim_k \mathrm{Im}\,\sigma^l$ 即可.

**引理 4.2** 设 $\widetilde{\Lambda} = kQ/I$ 是二元外代数 $\Lambda$ 的 $\mathbb{Z}_n$-Galois 覆盖代数, $l = pn + r$, 其中 $p$ 为非负整数, 整数 $r$ 满足 $0 \le r < n$, 则有

$$\dim_k M^l = \begin{cases} 2n + 4pn, & \text{当 } 0 \le r < n-1 \text{ 时;} \\ 4n + 4pn, & \text{当 } r = n-1 \text{ 时.} \end{cases}$$

**证明** 对任意的 $\alpha_{x^{j_1}y^{j_2}}^{(l,j)} \in \Gamma^{(l)}$, 由 $\mathscr{B}/\!/\Gamma^{(l)}$ 的定义可知 $(e_i,\ \alpha_{x^{j_1}y^{j_2}}^{(l,j)}) \in \mathscr{B}/\!/\Gamma^{(l)}$ 当且仅当 $\alpha_{x^{j_1}y^{j_2}}^{(l,j)}$ 的终点与起点都为点 $i$, 即 $j = i$, $j_1 \equiv j_2 \pmod n$. 类似地, $(x_i y_i,\ \alpha_{x^{j_1}y^{j_2}}^{(l,j)}) \in \mathscr{B}/\!/\Gamma^{(l)}$ 当且仅当 $j = i$, $j_1 \equiv j_2 \pmod n$; $(x_i,\ \alpha_{x^{j_1}y^{j_2}}^{(l,j)}) \in \mathscr{B}/\!/\Gamma^{(l)}$ 当且仅当 $j = i$, $j_1 \equiv j_2 + 1 \pmod n$; $(y_i,\ \alpha_{x^{j_1}y^{j_2}}^{(l,j)}) \in \mathscr{B}/\!/\Gamma^{(l)}$ 当且仅当 $j = i+1$, $j_1 \equiv j_2 - 1 \pmod n$. 所以, 若记

$$\begin{aligned}E_1^l &= \{(e_i,\ \alpha_{x^{j_1}y^{j_2}}^{(l,i)}) \mid j_1 \equiv j_2 \pmod n,\ 0 \le i \le n-1\}, \\ E_2^l &= \{(x_i,\ \alpha_{x^{j_1}y^{j_2}}^{(l,i)}) \mid j_1 \equiv j_2 + 1 \pmod n,\ 0 \le i \le n-1\}, \\ E_3^l &= \{(y_i,\ \alpha_{x^{j_1}y^{j_2}}^{(l,i+1)}) \mid j_1 \equiv j_2 - 1 \pmod n,\ 0 \le i \le n-1\}, \\ E_4^l &= \{(x_i y_i,\ \alpha_{x^{j_1}y^{j_2}}^{(l,i)}) \mid j_1 \equiv j_2 \pmod n,\ 0 \le i \le n-1\},\end{aligned}$$

则

$$\mathscr{B}/\!/\,\Gamma^{(l)}=E_1^l\cup E_2^l\cup E_3^l\cup E_4^l.$$

**情形 I** $n$ 为偶数.

(1) $l$ 为奇数: 若存在 $(e_i,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in E_1^l$ 或 $(x_iy_i,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in E_4^l$, 则 $j_2=kn+j_1,\ l=kn+2j_1\ (k\in\mathbb{Z})$, 这与 $l$ 为奇数矛盾. 所以此时 $|E_1^l|=|E_4^l|=0,\ \mathscr{B}/\!/\,\Gamma^{(l)}=E_2^l\cup E_3^l$.

当 $0\le r<n-1$ 时, 对任意的 $x_i\in\mathscr{B}$, 若 $(x_i,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in E_2^l$, 则当 $j_1<j_2$ 时, 由 $j_2=kn+j_1-1,\ l=kn+2j_1-1$ 可知 $k$ 可取 $1,2,\dots,p$, 即有 $p$ 个 $\alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}}$, 使得 $(x_i,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in E_2^l$; 当 $j_1>j_2$ 时, 由 $j_1=kn+j_2+1,\ l=kn+2j_2+1$ 可知 $k$ 可取 $0,1,\dots,p$, 即有 $p+1$ 个 $\alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}}$, 使得 $(x_i,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in E_2^l$. 由 $x_i$ 的任意性, 即得 $|E_2^l|=(2p+1)n$. 同理 $|E_3^l|=(2p+1)n$, 所以 $\dim_kM^l=|\mathscr{B}/\!/\,\Gamma^{(l)}|=|E_2^l|+|E_3^l|=2n+4pn$.

当 $r=n-1$ 时, 类似于上述分析, 但注意到 $j_1<j_2$ 时, $k$ 可取 $1,2,\dots,p,p+1$, 即有 $p+1$ 个 $\alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}}$, 使得 $(x_i,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in E_2^l$, 所以 $|E_2^l|=(2p+2)n$. 同理 $|E_3^l|=(2p+2)n$, 所以 $\dim_kM^l=|\mathscr{B}/\!/\,\Gamma^{(l)}|=|E_2^l|+|E_3^l|=4n+4pn$.

(2) $l$ 为偶数: 若存在 $(x_i,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in E_2^l$, 则 $j_2=kn+j_1-1,\ l=kn+2j_1-1\ (k\in\mathbb{Z})$. 这与 $l$ 为偶数矛盾, 所以 $|E_2^l|=0$. 同理 $|E_3^l|=0$, 所以此时 $\mathscr{B}/\!/\,\Gamma^{(l)}=E_1^l\cup E_4^l$.

对任意的 $e_i\in\mathscr{B}$, 若 $(e_i,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in E_1^l$, 则当 $j_1\le j_2$ 时, 由 $j_2=kn+j_1,\ l=kn+2j_1$ 可知 $k$ 可取 $0,1,\dots,p$, 即有 $p+1$ 个 $\alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}}$, 使得 $(e_i,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in E_1^l$; 当 $j_1>j_2$ 时, 由 $j_1=kn+j_2,\ l=kn+2j_2$ 可知, $k$ 可取 $1,2,\dots,p$, 即有 $p$ 个 $\alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}}$, 使得 $(e_i,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in E_1^l$. 由 $e_i$ 的任意性, 即得 $|E_1^l|=(2p+1)n$. 同理 $|E_4^l|=(2p+1)n$, 所以 $\dim_kM^l=|\mathscr{B}/\!/\,\Gamma^{(l)}|=|E_1^l|+|E_4^l|=2n+4pn$.

**情形 II** $n$ 为奇数.

(1) $l$ 为奇数: 对任意的 $k\in\mathbb{Z}$, 记 $k^+$ 为不大于 $k$ 的最大偶数, $k^-$ 为不大于 $k$ 的最大奇数, 则有 $k^++k^-=2k-1$.

当 $0\le r<n-1$ 时, 对任意的 $x_i\in\mathscr{B}$, 若 $(x_i,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in E_2^l$, 则当 $j_1<j_2$ 时, 由 $j_2=kn+j_1-1,\ l=kn+2j_1-1$ 可知 $k$ 可取 $2,4,\dots,p^+$, 即有 $\frac{p^+}{2}$ 个 $\alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}}$, 使得 $(x_i,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in E_2^l$; 当 $j_1>j_2$ 时, 由 $j_1=kn+j_2+1,\ l=kn+2j_2+1$ 可知 $k$ 可取 $0,2,\dots,p^+$, 即有 $\frac{p^+}{2}+1$ 个 $\alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}}$, 使得 $(x_i,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in E_2^l$, 由 $x_i$ 的任意性, 即得 $|E_2^l|=(p^++1)n$. 同理 $|E_3^l|=(p^++1)n$; $|E_1^l|=(p^-+1)n$; $|E_4^l|=(p^-+1)n$, 所以 $\dim_kM^l=|\mathscr{B}/\!/\,\Gamma^{(l)}|=|E_1^l|+|E_2^l|+|E_3^l|+|E_4^l|=2(p^-+p^+)n+4n=2n+4pn$.

当 $r=n-1$ 时, 类似于上述分析, 但注意到 $j_1<j_2$ 时, $k$ 可取 $2,4,\dots,p^+,p+1$, 即有 $\frac{p^+}{2}+1$ 个 $\alpha^{(l,i+1)}_{x^{j_1}y^{j_2}}$, 使得 $(x_i,\ \alpha^{(l,i+1)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in E_2^l$. 所以 $|E_2^l|=(p^++2)n$. 同理 $|E_3^l|=(p^++2)n$, 所以 $\dim_kM^l=|\mathscr{B}/\!/\,\Gamma^{(l)}|=|E_1^l|+|E_2^l|+|E_3^l|+|E_4^l|=2(p^-+p^+)n+6n=4n+4pn$.

(2) 若 $l$ 为偶数. 类似于 $l$ 为奇数时的分析, 便可得到: 当 $0\le r<n-1$ 时, $\dim_kM^l=|\mathscr{B}/\!/\,\Gamma^{(l)}|=|E_1^l|+|E_2^l|+|E_3^l|+|E_4^l|=2(p^-+p^+)n+4n=2n+4pn$; 当 $r=n-1$ 时, $\dim_kM^l=|\mathscr{B}/\!/\,\Gamma^{(l)}|=|E_1^l|+|E_2^l|+|E_3^l|+|E_4^l|=2(p^-+p^+)n+6n=4n+4pn$. 证毕.

对任意的 $(b,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}}),\ (b',\ \alpha^{(l,j)}_{x^{k_1}y^{k_2}})\in\mathscr{B}/\!/\,\Gamma^{(l)}$, 必存在 $E_s^l,\ E_t^l\ (1\le s,\ t\le 4)$, 使得 $(b,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\in E_s^l,\ (b',\ \alpha^{(l,j)}_{x^{k_1}y^{k_2}})\in E_t^l$. 当 $s\ne t$ 时, 定义 $(b,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\prec(b',\ \alpha^{(l,j)}_{x^{k_1}y^{k_2}})$ 如果 $s<t$; 当 $s=t$ 时, 定义 $(b,\ \alpha^{(l,i)}_{x^{j_1}y^{j_2}})\prec(b',\ \alpha^{(l,j)}_{x^{k_1}y^{k_2}})$ 如果 $j_1<k_1$, 或 $j_1=k_1$ 且 $b\prec b'$, 则 $\mathscr{B}/\!/\,\Gamma^{(l)}$ 为 $M^l$ 的一组定序基. $\sigma^l$ 在这组定序基下的矩阵仍记为 $\sigma^l$, $\operatorname{rank}\sigma^l$ 为它的秩.

**引理 4.3** 设 $\widetilde{\Lambda} = kQ/I$ 是二元外代数 $\Lambda$ 的 $\mathbb{Z}_n$-Galois 覆盖代数, $l = pn + r \neq 0$, 其中 $p$ 为非负整数, 整数 $r$ 满足 $0 \leq r < n$, 则有

$$\operatorname{rank}\sigma^l = \begin{cases} (2p+1)(n-1), & \text{当 } n \text{ 为偶数时;} \\ pn + (p+1)(n-1), & \text{当 } n,\ p \text{ 皆为奇数时;} \\ p(n-1) + (p+1)n, & \text{当 } n \text{ 为奇数}, \ p \text{ 为偶数时.} \end{cases}$$

**证明** 记

$$S_i = \begin{pmatrix} U & & & \\ & U & & \\ & & \ddots & \\ & & & U \end{pmatrix}_{i\times i}, \text{其中} \quad U = \begin{pmatrix} (-1)^l & & & & 1 \\ 1 & (-1)^l & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & (-1)^l & \\ & & & 1 & (-1)^l \end{pmatrix}_{n\times n};$$

$$T_i = \begin{pmatrix} V & & & \\ & V & & \\ & & \ddots & \\ & & & V \end{pmatrix}_{i\times i}, \text{其中} \quad V = \begin{pmatrix} (-1)^{l+1} & -1 & & & \\ & (-1)^{l+1} & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & (-1)^{l+1} & -1 \\ -1 & & & & (-1)^{l+1} \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

则当 $n$ 为偶数时, $\operatorname{rank}V = \operatorname{rank}U = n-1$; 当 $n$ 为奇数时, 若 $l$ 为偶数, $\operatorname{rank}U = n$, $\operatorname{rank}V = n-1$, 若 $l$ 为奇数, $\operatorname{rank}U = n-1$, $\operatorname{rank}V = n$.

对任意的距阵 $X$, 记 $X^* = (X\ 0)$ 表示矩阵 $X$ 后添加 $n$ 列 0 后得到的矩阵, 记 $X^{**} = (0\ X)$ 表示矩阵 $X$ 前添加 $n$ 列 0 后得到的矩阵.

**情形 I** $n$ 为偶数.

(1) $0 < r < n-1$: 当 $r$ 为奇数时, $l$ 也为奇数, 由 $\sigma^l$ 的定义及 $\mathscr{B}/\!/\,\Gamma^{(l)}$ 的结构可知, $\sigma^l$ 在 $\mathscr{B}/\!/\,\Gamma^{(l)}$ 下的矩阵为 $2\times 2$ 分块矩阵

$$\begin{pmatrix} S_{2p+1} & (-1)^l S_{2p+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $\operatorname{rank}\sigma^l = \operatorname{rank}S_{2p+1} = (2p+1)\operatorname{rank}U = (2p+1)(n-1)$. 类似地, 当 $r$ 为偶数时, $l$ 也为偶数, $\sigma^l$ 在 $\mathscr{B}/\!/\,\Gamma^{(l)}$ 下的矩阵为 $2\times 2$ 分块矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & T_{2p+1} \\ 0 & (-1)^l T_{2p+1} \end{pmatrix},$$

所以 $\operatorname{rank}\sigma^l = \operatorname{rank}T_{2p+1} = (2p+1)\operatorname{rank}V = (2p+1)(n-1)$.

(2) $r = n-1$: 此时 $l$ 为奇数, $\sigma^l$ 在 $\mathscr{B}/\!/\,\Gamma^{(l)}$ 下的矩阵为 $2\times 2$ 分块矩阵

$$\begin{pmatrix} S^*_{2p+1} & (-1)^l S^{**}_{2p+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $\operatorname{rank}\sigma^l = \operatorname{rank}S_{2p+1} = (2p+1)\operatorname{rank}U = (2p+1)(n-1)$.

(3) $r = 0$: 此时 $l$ 为偶数, $\sigma^l$ 在 $\mathscr{B}/\!/\,\Gamma^{(l)}$ 下的矩阵为 $2\times 2$ 分块矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & T^{**}_{2p} \\ 0 & (-1)^l T^*_{2p} \end{pmatrix},$$

所以 $\operatorname{rank}\sigma^l = (2p+1)\operatorname{rank}V = (2p+1)(n-1)$.

**情形 II** $n$ 为奇数.

(1) $0<r<n-1$: 当 $r$ 为奇数时, $\sigma^l$ 在 $\mathscr{B}//\Gamma^{(l)}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & S_{p+1} & (-1)^l S_{p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_p \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^l T_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

若 $l$ 为奇数, 则 $p$ 为偶数, 从而 $\mathrm{rank}\sigma^l=\mathrm{rank}S_{p+1}+\mathrm{rank}T_p=(p+1)\mathrm{rank}U+p\ \mathrm{rank}V=(p+1)(n-1)+pn$; 若 $l$ 为偶数, 则 $p$ 为奇数, 从而 $\mathrm{rank}\sigma^l=\mathrm{rank}S_{p+1}+\mathrm{rank}T_p=(p+1)\mathrm{rank}U+p\ \mathrm{rank}V=(p+1)n+p(n-1)$. 类似地, 当 $r$ 为偶数时, $\sigma^l$ 在 $\mathscr{B}//\Gamma^{(l)}$ 下的矩阵为 $4\times 4$ 分块矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & S_p & (-1)^l S_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{p+1} \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^l T_{p+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

若 $l$ 为奇数, 则 $p$ 为奇数, 从而 $\mathrm{rank}\sigma^l=\mathrm{rank}S_p+\mathrm{rank}T_{p+1}=p\ \mathrm{rank}U+(p+1)\mathrm{rank}V=p(n-1)+(p+1)n$; 若 $l$ 为偶数, 则 $p$ 为偶数, 从而 $\mathrm{rank}\sigma^l=\mathrm{rank}S_p+\mathrm{rank}T_{p+1}=p\ \mathrm{rank}U+(p+1)\mathrm{rank}V=pn+(p+1)(n-1)$.

(2) $r=n-1$: $\sigma^l$ 在 $\mathscr{B}//\Gamma^{(l)}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & S_p^* & (-1)^l S_p^{**} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{p+1} \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^l T_{p+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

若 $l$ 为奇数, 则 $p$ 为奇数, 从而 $\mathrm{rank}\sigma^l=\mathrm{rank}S_p+\mathrm{rank}T_{p+1}=p\ \mathrm{rank}U+(p+1)\mathrm{rank}V=p(n-1)+(p+1)n$; 若 $l$ 为偶数, 则 $p$ 为偶数, 从而 $\mathrm{rank}\sigma^l=\mathrm{rank}S_p+\mathrm{rank}T_{p+1}=p\ \mathrm{rank}U+(p+1)\mathrm{rank}V=pn+(p+1)(n-1)$.

(3) $r=0$: $\sigma^l$ 在 $\mathscr{B}//\Gamma^{(l)}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & S_p & (-1)^l S_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_p^{**} \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^l T_p^{*} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

若 $l$ 为奇数, 则 $p$ 为奇数, 从而 $\mathrm{rank}\sigma^l=\mathrm{rank}S_p+\mathrm{rank}T_{p+1}=p\ \mathrm{rank}U+(p+1)\mathrm{rank}V=p(n-1)+(p+1)n$; 若 $l$ 为偶数, 则 $p$ 为偶数, 从而 $\mathrm{rank}\sigma^l=\mathrm{rank}S_p+\mathrm{rank}T_{p+1}=p\ \mathrm{rank}U+(p+1)\mathrm{rank}V=pn+(p+1)(n-1)$. 证毕.

**定理 4.4** 设 $\widetilde{\Lambda}=kQ/I$ 是二元外代数 $\Lambda$ 的 $\mathbb{Z}_n$-Galois 覆盖代数, $l=pn+r$, 其中 $p$ 为非负整数, 整数 $r$ 满足 $0\le r<n$, 则当 $n$ 为偶数时

$$\dim_k HH^l(\widetilde{\Lambda})=\begin{cases} n+1, & \text{当 } l=0 \text{ 时;} \\ 4p+2, & \text{当 } l>0 \text{ 且 } 0\le r<n-1 \text{ 时;} \\ 4p+4, & \text{当 } l>0 \text{ 且 } r=n-1 \text{ 时.} \end{cases}$$

当 $n$ 为奇数时

$$\dim_k HH^l(\widetilde{\Lambda})=\begin{cases} n, & \text{当 } l=0 \text{ 时;} \\ 2p, & \text{当 } l>0,\ 0\le r<n-1 \text{ 且 } p \text{ 为偶数时;} \\ 2p+2, & \text{其它.} \end{cases}$$

**证明** 当 $l=0$ 时, 若 $n$ 为偶数, $\dim_k HH^0(\widetilde{\Lambda}) = \dim_k M^0 - \operatorname{rank}\sigma^1 = 2n-(n-1) = n+1$; 若 $n$ 为奇数

$$\dim_k HH^0(\widetilde{\Lambda}) = \dim_k M^0 - \operatorname{rank}\sigma^1 = 2n - n = n.$$

当 $l>0$ 时, 由引理 4.2, 引理 4.3 及 $\dim_k HH^l(\widetilde{\Lambda}) = \dim_k M^l - \operatorname{rank}\sigma^l - \operatorname{rank}\sigma^{l+1}$ 可得到该定理. 证毕.

**推论 4.5** 设 $\Lambda$ 为二元外代数, $\widetilde{\Lambda} = kQ/I$ 是 $\Lambda$ 的 $\mathbb{Z}_n$-Galois 覆盖代数, 则 $\dim_k HH_l(\widetilde{\Lambda}) = \dim_k HH^l(\widetilde{\Lambda})$.

**推论 4.6**[20] 设 $\Lambda$ 为二元外代数, $\widetilde{\Lambda} = kQ/I$ 是 $\Lambda$ 的 $\mathbb{Z}_n$-Galois 覆盖代数, 则当 $n=2$ 时, 对任意的 $l>0$, 恒有 $\dim_k HH^l(\widetilde{\Lambda}) = \dim_k HH^l(\Lambda)$.

## 参 考 文 献


[1] Happel D., Hochschild co-Homology of finite-dimensional algebras, Lecture Notes in Math., 1404, Berlin: Springer, 1989, 108–126.
[2] Gerstenhaber M., On the deformation of rings and algebras, *Ann. Math.*, 1964, **79**: 59–103.
[3] Skowroński A., Simply connected algebras and Hochschild co-Homology, Proc. ICRA IV (Ottawa, 1992), *Can. Math. Soc. Proc.*, 1993, **14**: 431–447.
[4] Han Y., Hochschild (co)-Homology dimension, *J. Loudon Math. Soc.*, 2006, **73**(2): 657–668.
[5] Igusa K., Notes on the no loop conjecture, *J. Pure Appl. Algebra*, 1990, **69**: 161–176.
[6] Avramov L. L., Vigueé-Poirrier M., Hochschild Homology criteria for smoothness, *Internat. Math. Research Notices*, 1992, **1**: 17–25.
[7] Cibils C., Co Homology of incidence algebras and simplicial complexes, *J. Pure Appl. Algebra*, 1989, **56**: 221–232.
[8] Gerstenhaber M., Schack S. P., Simplicial Homology is Hochschild co-Homology, *J. Pure Appl. Algebra*, 1983, **30**: 143–156.
[9] Keller B., Invariance and localization for cyclic Homology of *DG* algebras, *J. Pure Appl. Algebra*, 1998, **123**: 223–273.
[10] Cibils C., 2-nilpotent and rigid finite-dimensional algebras, *J. London Math. Soc.*, 1987, **36**: 211–218.
[11] Cibils C., Rigid monomial algebras, *Math. Ann.*, 1991, **289**: 95–109.
[12] Cibils C., Rigidity of truncated quiver algebras, *Adv. Math.*, 1990, **79**: 18–42.
[13] Liu S. X., Zhang P., Hochschild Homology of truncated algebras, *Bull. London Math. Soc.*, 1994, **26**: 427–430.
[14] Locateli A. C., Hochschild co-Homology of truncated quiver algebras, *Comm. Algebra*, 1999, **27**: 645–664.
[15] Xu Y. G., On the first Hochschild co-Homology of trivial extensions of special biserial algebras, *Sci. China Ser. A*, 2004, **47**: 578–592.
[16] Zhang P., The Hochschild Homology of a truncated basic cycle, *Algebra Colloq.*, 1998, **5**: 77–84.
[17] Zacharia D., Hochschild Homology of quasi-hereditary algebras, *Canad. Math. Soc. Conf. Proc.*, 1996, **19**: 681–684.
[18] Cibils C., Redondo M. J., Cartan-Leray spectral sequence for Galois coverings of a category over a ring, *J. of Algebra*, 2005, **284**: 310–325.
[19] Han Y., Zhao D. E., Construction of Koszul algebras by finite Galois covering, ArXiv. Math. RA/0605773.
[20] Xu Y. G., Han Y., Hochschild (co)-Homology of exterior algebras, *Commnu. Algebra.*, 2007, **35**(1): 115–131.
[21] Xu Y. G., Tang X., Hochschild (co)-Homology of Galois covering of Grassmann algebras, Preprint.
[22] Beilinson A., Ginsburg V., Soergel W., Koszul duality patterns in representation theory, *J. Amer. Math. Soc.*, 1996, **9**: 473–527.
[23] Green E. L., Hartaman G., Marcos E. N. et al., Resolutions over Koszul algebras, *Archiv der Mathematik.*, 2005, **5**: 118–127.
[24] Loday J. L., Cyclic Homology, Grundlehren 301, Berlin: Springer, 1992.