系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
**13** (3) (1993), 211—217

# 多目标规划的 Lagrange 对偶与标量化定理*

李仲飞
（内蒙古大学数学系，呼和浩特 010021）
汪寿阳
（中国科学院系统科学研究所，北京 100080）

## 一、 定义与问题

设 $K\subset R^p$ 为内部非空的点锥，则 $K$ 在 $R^p$ 上确定了如下偏序：

$$x \leqq_K y \Leftrightarrow y - x \in K,$$
$$x <_K y \Leftrightarrow y - x \in \text{int } K.$$

设 $Y\subset R^p$，则 $Y$ 的弱 $K$-最小点集和弱 $K$-最大点集分别定义为

$$W - \min_K Y = \{\bar{y} \in Y : (\nexists\, y \in Y) y <_K \bar{y}\},$$
$$W - \max_K Y = \{\bar{y} \in Y : (\nexists\, y \in Y) y >_K \bar{y}\}.$$

而 $Y$ 的正对偶锥记为

$$Y^0 = \{x^* \in R^p : x^T x^* \geqslant 0, \forall\, x \in Y\}.$$

**命题1.1.** (a)若 $0\in S\subset R^p$，$0\in T\subset R^m$，则 $(S\times T)^0=S^0\times T^0$；

(b)对任意 $S\subset R^p$ 和 $T\subset R^m$，有 $\text{int}(S\times T)=\text{int } S\times \text{int } T$.

**命题1.2.** 设 $S\subset R^p$ 是内部非空的点锥.

(a)若 $x^*\in S^0\backslash\{0\}$，$x\in \text{int } S$，则 $x^T x^*>0$；

(b)若 $S$ 是闭凸锥，则 $S+\text{int } S\subset \text{int } S$.

**命题1.3**[5]. 若 $S\subset R^p$ 为非空凸锥，则 $(S^0)^0=clS$.

设 $\Gamma\subset R^n$ 非空，$K\subset R^p$ 为内部非空的凸锥，$f:\Gamma\to R^p$ 为给定的向量函数.

**定义1.1.** 称 $f$ 在 $\Gamma$ 上是 $K$-次类凸的，如果 $\exists\, \theta\in \text{int } K$，对于 $\forall\, x^1, x^2\in\Gamma$，$\forall\, \lambda\in(0,1)$，$\forall\, \varepsilon>0$，$\exists\, x^3\in\Gamma$，

$$\varepsilon\theta + \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2) - f(x^3) \in K.$$

**引理1.1**(广义 Gordan 择一定理)[1]. 设 $f$ 在 $\Gamma$ 上是 $K$-次类凸的，则下列两个系统恰有一个成立

i) $\exists\, x\in\Gamma$，$-f(x)\in \text{int } K$；

ii) $\exists\, \mu\in K^0\backslash\{0\}$，$\forall\, x\in\Gamma$，$\mu^T f(x)\geqslant 0$.

---

* 国家自然科学基金资助课题.
1991年4月16日收到，1992年7月10日收到修改稿.

引理1.2[1]. 若 $f$ 在 $\Gamma$ 上是 $K$-次类凸的，则对任意给定的 $c\in R^p$，$f(\cdot)+c$ 在 $\Gamma$ 上也是 $K$-次类凸的.

现令 $S\subset R^p$ 和 $T\subset R^m$ 均是内部非空的凸锥，则 $S\times T$ 为 $P^p\times R^m$ 中的凸锥，且 $\operatorname{int}(S\times T)\neq\varnothing$(根据命题1.1(b)). 令 $\Gamma\subset R^n$ 非空，$f:\Gamma\to R^p$，$g:\Gamma\to R^m$. 令

$$h(x)=(f(x),g(x)),\forall\ x\in\Gamma.$$

如果 $h:\Gamma\to R^p\times R^m$ 在 $\Gamma$ 上是 $S\times T$-次类凸的，则称$(f,g)$在 $\Gamma$ 上是 $S\times T$-次类凸的.

本文考虑如下多目标非线性规划问题

$$(\mathrm{PVP})\ \begin{cases}D-\min f(x),\\ \mathrm{s.t.}\quad x\in X:=\{x\in X':\quad g(x)\leqq_Q 0\}.\end{cases}$$

其中 $X'\subset R^n$ 非空，$D\subset R^p$ 和 $Q\subset R^m$ 均为内部非空的点闭凸锥，$f:\ X'\to R^p$，$g:\ X'\to R^m$.

定义1.2. $\bar{x}\in X$ 称为是(PVP)的弱有效解，如果不存在 $x\in X$ 使 $f(x)<_D f(\bar{x})$.

定义1.3 称(PVP)满足 Slater 约束规格，如果存在 $x'\in X$，使 $g(x')<_Q 0$.

用 $R^{p\times m}$表示 $p\times m$ 矩阵全体，记

$$\mathscr{L}=\{\Lambda\in R^{p\times m};\Lambda Q\subset D\}.$$

引理1.3. 对任意 $\mu\in D^0\backslash\{0\}$，$\lambda\in Q^0$，存在 $\Lambda\in\mathscr{L}$ 使 $\Lambda^T\mu=\lambda$.

定义1.4. 称映射 $L:X'\times\mathscr{L}\to R^P$：

$$L(x,\Lambda)=f(x)+\Lambda g(x)$$

为(PVP)的向量值 Lagrange 函数.

定义1.5. $(\bar{x},\bar{\Lambda})\in X'\times\mathscr{L}$ 称为是 $L$ 的弱鞍点，如果

$$L(\bar{x},\bar{\Lambda})\in W-\min{}_D\{L(x,\bar{\Lambda});x\in X'\}\cap W-\max{}_D\{L(\bar{x},\Lambda);\Lambda\in\mathscr{L}\}.$$

引理1.4. $(\bar{x},\bar{\Lambda})\in X'\times\mathscr{L}$ 是 $L$ 的弱鞍点，当且仅当下列条件成立：

i) $L(\bar{x},\bar{\Lambda})\in W-\min_D\{L(x,\bar{\Lambda});x\in X'\}$，

ii) $g(\bar{x})\leqq_Q 0$，

iii) $\bar{\Lambda}g(\bar{x})\not<0$.

定义1.6. 点到集映射 $\Phi:\mathscr{L}\to 2^{R^p}$：

$$\Phi(\Lambda)=W-\min{}_D\{L(x,\Lambda);x\in X'\}$$

称为是弱对偶映射.

## 二、 Lagrange 乘子和弱鞍点定理

定理2.1. 设 $\bar{x}$ 是(PVP)的一个弱有效解并且(PVP)满足 Slater 约束规格，则存在 $\bar{\Lambda}\in\mathscr{L}$ 使

$$f(\bar{x})\in W-\min{}_D\{f(x)+\bar{\Lambda}g(x);x\in X'\},$$
$$\bar{\Lambda}g(\bar{x})=0.$$

证. 因 $\bar{x}$ 是(PVP)的弱有效解，故不存在 $x\in X$ 使 $f(x)<_D f(\bar{x})$. 令

$$H(x)=(f(x)-f(\bar{x}),g(x)),x\in X',$$

则系统

$$H(x)<_{D\times Q}0,\ x\in X'$$

无解. 因$(f,g)$在$X'$上是$D\times Q$-次类凸的，由引理1.2，$H$在$X'$上是$D\times Q$-次类凸的. 再由引理1.1，存在$(\bar{\mu},\bar{\lambda})\in(D\times Q)^0=D^0\times Q^0$(注意到命题1.1(a))，$(\bar{\mu},\bar{\lambda})\neq(0,0)$，使

$$\bar{\mu}^T f(x)+\bar{\lambda}^T g(x)\geqslant\bar{\mu}^T f(\bar{x}),\ \forall\ x\in X'. \tag{2.1}$$

因$g(\bar{x})\leqq_Q 0$，$\bar{\lambda}\in Q^0$，故$\bar{\lambda}^T g(\bar{x})\leqslant 0$. 又由(2.1)有$\bar{\lambda}^T g(\bar{x})\geqslant 0$，因此

$$\bar{\lambda}^T g(\bar{x})=0. \tag{2.2}$$

假如$\bar{\mu}=0$，则$\bar{\lambda}\in Q^0\backslash\{0\}$. 由于(PVP)满足 Slater 约束规格，故存在$x'\in X'$使$g(x')<_Q 0$，从而由命题1.2(a)有$\bar{\lambda}^T g(x')<0$. 但将$\bar{\mu}=0$和$x=x'$代入(2.1)式有$\bar{\lambda}^T g(x')\geqslant 0$. 此矛盾说明$\bar{\mu}\neq 0$，从而$\bar{\mu}\in D^0\backslash\{0\}$. 现取$e\in D$使$\bar{\mu}^T e=1$，令$\bar{\Lambda}=e\bar{\lambda}^T$，则显然$\bar{\Lambda}\in\mathscr{L}$，$\bar{\mu}^T\bar{\Lambda}=\bar{\mu}^T e\bar{\lambda}^T=\bar{\lambda}^T$，且由(2.2)式有

$$\bar{\Lambda}g(\bar{x})=e\bar{\lambda}^T g(\bar{x})=0.$$

假如$f(\bar{x})\notin W-\min_D\{f(x)+\bar{\Lambda}g(x):x\in X'\}$，则存在$x^0\in X'$，使

$$f(\bar{x})-f(x^0)-\bar{\Lambda}g(x^0)>_D 0.$$

因$\bar{\mu}\in D^0\backslash\{0\}$，由上式及命题1.2 (a)有

$$\bar{\mu}^T f(\bar{x})>\bar{\mu}^T f(x^0)+\bar{\mu}^T\bar{\Lambda}g(x^0)=\bar{\mu}^T f(x^0)+\bar{\lambda}^T g(x^0),$$

这与(2.1)式矛盾. 因此

$$f(\bar{x})\in W-\min_D\{f(x)+\bar{\Lambda}g(x):x\in X'\}.$$

证毕.

定理2.1可看作 Lagrange 乘子定理，下面给出弱鞍点定理.

**定理2.2.** 如果$(\bar{x},\bar{\Lambda})\in X'\times\mathscr{L}$是$L$的弱鞍点，且$\bar{\Lambda}g(\bar{x})=0$，则$\bar{x}$是(PVP)的弱有效解.

证. 因$(\bar{x},\bar{\Lambda})$是$L$的弱鞍点，由引理1.4知$\bar{x}\in X$. 假如$\bar{x}$不是(PVP)的弱有效解，则存在$x^0\in X$使$f(x^0)<_D f(\bar{x})$. 由$g(x^0)\leqq_Q 0$，$\bar{\Lambda}\in\mathscr{L}$可知，$\bar{\Lambda}g(x^0)\leqq_D 0$. 又由$\bar{\Lambda}g(\bar{x})=0$及命题1.2 (b)有

$$f(x^0)+\bar{\Lambda}g(x^0)<_D f(\bar{x})+\bar{\Lambda}g(\bar{x}),$$

这与$L(\bar{x},\bar{\Lambda})\in W-\min_D\{L(x,\bar{\Lambda}):x\in X'\}$矛盾. 因此，$\bar{x}$是(PVP)的弱有效解. 证毕.

**定理2.3.** 设$\bar{x}$是(PVP)的弱有效解. 若$(f,g)$在$X'$上是$D\times Q$-次类凸的，且(PVP)满足 Slater 约束规格，则存在$\bar{\Lambda}\in\mathscr{L}$使$(\bar{x},\bar{\Lambda})$是$L$的弱鞍点，且$\bar{\Lambda}g(\bar{x})=0$.

证明由定理2.1和引理1.4立即可得.

## 三、 Lagrange 对偶

考虑(PVP)的如下 Lagrange 型对偶问题：

$$\text{(DVP)}\quad D\text{-}\max\bigcup_{\Lambda\in\mathscr{L}}\Phi(\Lambda).$$

**定理3.1**(弱对偶定理). 设$\bar{x}\in X$，$\bar{y}\in\bigcup_{\Lambda\in\mathscr{L}}\Phi(\Lambda)$，则

$$\bar{y}\not>_D f(\bar{x}).$$

证. 因$\bar{y}\in\bigcup_{\Lambda\in\mathscr{L}}\Phi(\Lambda)$，故存在$\bar{\Lambda}\in\mathscr{L}$使$\bar{y}\in\Phi(\bar{\Lambda})$，从而

$$\bar{y} \not>_D f(x) + \bar{\Lambda}\, g(x), \quad \forall\, x \in X'. \tag{3.1}$$

因 $\bar{x}\in X, \bar{\Lambda}\in\mathscr{L}$,有

$$\bar{\Lambda}\, g(\bar{x}) \leqq_D 0. \tag{3.2}$$

假若 $\bar{y}>_D f(\bar{x})$,则由(3.2)及命题1.2 (b)有

$$\bar{y} >_D f(\bar{x}) + \bar{\Lambda}\, g(\bar{x}),$$

这与(3.1)矛盾.因此,$\bar{y}\not>_D f(\bar{x})$.证毕.

**定理3.2.** 若 $\bar{x}\in X, f(\bar{x})\in \bigcup_{\Lambda\in\mathscr{L}}\Phi(\Lambda)$,则 $\bar{x}$ 是(PVP)的弱有效解,$f(\bar{x})$是(DVP)的弱有效点.

证. 因 $f(\bar{x})\in \bigcup_{\Lambda\in\mathscr{L}}\Phi(\Lambda)$,故存在 $\bar{\Lambda}\in\mathscr{L}$ 使 $f(\bar{x})\in\Phi(\bar{\Lambda})$.假若 $\bar{x}$ 不是(PVP)的弱有效解,则存在 $x^0\in X$ 使 $f(x^0)<_D f(\bar{x})$.由 $g(x^0)\leqq_D 0, \bar{\Lambda}\in\mathscr{L}$,可得 $\bar{\Lambda}g(x^0)\leqq_D 0$,因此根据命题1.2 (b)有

$$f(x^0) + \bar{\Lambda}g(x^0) <_D f(\bar{x}).$$

这与 $f(\bar{x})\in\Phi(\bar{\Lambda})$矛盾.因此,$\bar{x}$ 是(PVP)的弱有效解.最后,假如 $f(\bar{x})$不是(DVP)的弱有效点,则存在 $y'\in \bigcup_{\Lambda\in\mathscr{L}}\Phi(\Lambda)$使 $f(\bar{x})<_D y'$.令 $\Lambda'\in\mathscr{L}$,使 $y'\in\Phi(\Lambda')$,则因 $\Lambda' g(\bar{x})\leqq_D 0$,有

$$f(\bar{x}) + \Lambda' g(\bar{x}) <_D y'.$$

这与 $y'\in\Phi(\Lambda')$矛盾.因此,$f(\bar{x})$是(PVP)的弱有效点.证毕.

**定理3.3**(强对偶定理). 设 $\bar{x}$ 是(PVP)的弱有效解.如果$(f,g)$在 $X'$ 上是 $D\times Q$-次类凸的,且(PVP)满足 Slater 约束规格,则 $f(\bar{x})$是(DVP)的弱有效点.

证. 根据定理2.3,存在 $\bar{\Lambda}\in\mathscr{L}$ 使

$$f(\bar{x}) \in \Phi(\bar{\Lambda}) \subset \bigcup_{\Lambda\in\mathscr{L}}\Phi(\Lambda).$$

由定理3.2,$f(\bar{x})$是(DVP)的弱有效点.证毕.

## 四、 标量化与一阶最优性必要条件

首先给出(PVP)与如下标量化优化问题之间的关系

$$(\mathrm{P}_\mu) \quad \begin{cases} \min & \mu^T f(x), \\ s.t. & x\in X. \end{cases}$$

其中 $\mu\in D^0\setminus\{0\}$.

**定理4.1** 设 $\bar{x}$ 是(PVP)的弱有效解.如果 $f$ 在 $X$ 上是 $D$-次类凸的,则存在 $\bar{\mu}\in D^0\setminus\{0\}$,使 $\bar{x}$ 是$(\mathrm{P}_{\bar{\mu}})$的最优解.

证. 因 $\bar{x}$ 是(PVP)的弱有效解,故不存在 $x\in X$ 使 $f(x)<_D f(\bar{x})$.令

$$F(x) = f(x) - f(\bar{x}), x\in X',$$

则系统

$$F(x) <_D 0,\ x\in X$$

无解.因 $f$ 在 $X$ 上是 $D$-次类凸的,由引理1.2,$F$ 在 $X$ 上也是 $D$-次类凸的,故由引理1.1,存在 $\bar{\mu}\in D^0\setminus\{0\}$使

$$\bar{\mu}^T F(x) \geqslant 0, \quad \forall\, x \in X,$$

即

$$\bar{\mu}^T f(x) \geqslant \bar{\mu}^T f(\bar{x}), \quad \forall\, x \in X.$$

因此，$\bar{x}$ 是($P_{\bar{\mu}}$)的最优解. 证毕.

记 $WE$ 是(PVP)的弱有效解集，$E_\mu$ 是($P_\mu$)的最优解集，熟知(参见文[5]) $\bigcup_{\mu \in D^0 \setminus \{0\}} E_\mu \subset WE$，故由定理4.1有

**推论4.1.** 若 $f$ 在 $X$ 上是 $D$-次类凸的，则

$$WE = \bigcup_{\mu \in D^0 \setminus \{0\}} E_\mu.$$

以下假设 $X'$ 是开的，$f$ 和 $g$ 是可微的，并记 $\nabla f = (\nabla f_1, \nabla f_2, \cdots, \nabla f_p)^T$. 现在我们给出(PVP)的 Fritz John 和 Kuhn-Tucker 必要条件.

**定理4.2**(Fritz John 必要条件). 设 $\bar{x}$ 是(PVP)的弱有效解. 如果$(f,g)$在 $X'$ 上是 $D\times Q$-次类凸的，则存在 $\bar{\mu}\in D^0, \bar{\lambda}\in Q^0, (\bar{\mu},\bar{\lambda})\neq(0,0)$，使

$$\bar{\mu}^T \nabla f(\bar{x}) + \bar{\lambda}^T \nabla g(\bar{x}) = 0.$$

证. 与定理2.1证明的开头部分一样，由已知条件知存在 $\bar{\mu}\in D^0, \bar{\lambda}\in Q^0, (\bar{\mu},\bar{\lambda})\neq (0,0)$，使

$$\bar{\mu}^T f(x) + \bar{\lambda}^T g(x) \geqslant \bar{\mu}^T f(\bar{x}), \quad \forall\, x \in X',$$

$$\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) = 0.$$

因此

$$[\bar{\mu}^T f(x) + \bar{\lambda}^T g(x)] - [\bar{\mu}^T f(\bar{x}) + \bar{\lambda}^T g(\bar{x})] \geqslant 0, \quad \forall\, x \in X'.$$

由于 $X'$ 是开的，故对$\forall\, d\in R^n$，当 $\lambda>0$充分小时，$\bar{x}+\lambda d\in X'$，从而由上式有

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{[\bar{\mu}^T f(x+\lambda d) + \bar{\lambda}^T g(\bar{x}+\lambda d)] - [\bar{\mu}^T f(\bar{x}) + \bar{\lambda}^T g(\bar{x})]}{\lambda} \\ &= (\bar{\mu}^T f + \bar{\lambda}^T g)'(\bar{x};d) = d^T \nabla (\bar{\mu}^T f + \bar{\lambda}^T g)(\bar{x}) \\ &= (\bar{\mu}^T \nabla f(\bar{x}) + \bar{\lambda}^T \nabla g(\bar{x}))d, \end{aligned}$$

其中$(\bar{\mu}^T f+\bar{\lambda}^T g)'(\bar{x};d)$表示$\bar{\mu}^T f+\bar{\lambda}^T g$ 在 $\bar{x}$ 点沿方向 $d$ 的方向导数. 由于上式对任意 $d$ 都成立，故

$$\bar{\mu}^T \nabla f(\bar{x}) + \bar{\lambda}^T \nabla g(\bar{x}) = 0.$$

证毕.

类似可证明

**定理4.3**(K-T 必要条件). 设 $\bar{x}$ 是(PVP)的弱有效解. 如果$(f,g)$在 $X'$ 上是 $D\times Q$-次类凸的，且(PVP)满足 Slater 约束规格，则存在 $\bar{\mu}\in D^0\setminus\{0\}, \bar{\lambda}\in Q^0$，使

$$\bar{\mu}^T \nabla f(\bar{x}) + \bar{\lambda}^T \nabla g(\bar{x}) = 0.$$

## 附　录

A.1　引理1.3的证明

设 $\mu\in D^0\setminus\{0\}, \lambda\in Q^0$. 取 $e\in D$ 使 $\mu^T e=1$. 令 $\Lambda=e\lambda^T$，则显然有 $\Lambda\in\mathscr{L}, \Lambda^T\mu=\lambda$. 证毕.

A.2 引理1.4的证明

(⇒)依弱鞍点的定义，条件 i)自然成立，且

$$L(\bar{x},\bar{\Lambda}) \in W - \max_D\{f(\bar{x}) + \Lambda g(\bar{x}): \Lambda \in \mathscr{L}\}.$$

上式意味着

$$f(\bar{x}) + \bar{\Lambda}\, g(\bar{x}) \not<_D f(\bar{x}) + \Lambda g(\bar{x}), \quad \forall \Lambda \in \mathscr{L}$$

即

$$\bar{\Lambda}\, g(\bar{x}) \not<_D \Lambda\, g(\bar{x}), \quad \forall \Lambda \in \mathscr{L}. \tag{1}$$

令 $D_1=\{\Lambda\, g(\bar{x})-\bar{\Lambda}\, g(\bar{x}):\ \Lambda\in\mathscr{L}\}\subset R^p$，则由(1)有

$$D_1 \cap \operatorname{int} D = \varnothing. \tag{2}$$

因 $D$ 和 $Q$ 是凸锥，易证 $D_1$是凸集. 又 $D_1\neq\varnothing$，$\operatorname{int} D\neq\varnothing$，由(2)式根据凸集分离定理(参见文[6]定理2.3.8之推论1)，存在 $\bar{\mu}\in R^p\setminus\{0\}$使

$$\bar{\mu}^T d \geqslant \bar{\mu}^T d(\Lambda g(\bar{x}) - \bar{\Lambda} g(\bar{x})), \quad \forall d \in D, \quad \forall \Lambda \in \mathscr{L}. \tag{3}$$

在(3)式中取 $\Lambda=\bar{\Lambda}$，得

$$\bar{\mu}^T d \geqslant 0, \quad \forall d \in D.$$

因此，$\bar{\mu}\in D^0\setminus\{0\}$. 在(3)中取 $d=0\in D$，得

$$\bar{\mu}^T(\Lambda g(\bar{x}) - \bar{\Lambda} g(\bar{x})) \leqslant 0, \quad \forall \Lambda \in \mathscr{L}. \tag{4}$$

假若 $g(\bar{x})\not\leqq_Q 0$，则利用命题1.3，存在 $\bar{\lambda}\in Q^0\setminus\{0\}$使$\bar{\lambda}^T g(\bar{x})>0$. 不妨设

$$\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) > \bar{\mu}^T \bar{\Lambda} g(\bar{x}). \tag{5}$$

由引理1.3，对上述 $\bar{\mu}$ 和 $\bar{\lambda}$，存在 $\Lambda' \in \mathscr{L}$ 使$\bar{\mu}^T \Lambda' = \bar{\lambda}^T$. 因此由(5)式有

$$\bar{\mu}^T \Lambda' g(\bar{x}) > \bar{\mu}^T \bar{\Lambda} g(\bar{x}),$$

这与(4)式矛盾. 因此 $g(\bar{x})\leqq_Q 0$. 最后在(1)式中令 $\Lambda=0\in\mathscr{L}$，则 $\bar{\Lambda}g(\bar{x})\not<_D 0$.

(⇐)因 $g(\bar{x})\leqq_Q 0$，故

$$\Lambda g(\bar{x}) \leqq_D 0, \quad \forall \Lambda \in \mathscr{L}. \tag{6}$$

因 $\bar{\Lambda}g(\bar{x})\not<_D 0$，由(6)式有

$$f(\bar{x}) + \Lambda g(\bar{x}) \not>_D f(\bar{x}) + \bar{\Lambda} g(\bar{x}), \quad \forall \Lambda \in \mathscr{L}.$$

即

$$L(\bar{x},\bar{\Lambda}) \in W - \max\{L(\bar{x},\Lambda):\ \Lambda \in \mathscr{L}\},$$

此式及条件 i)说明$(\bar{x},\bar{\Lambda})$是 $L$ 的弱鞍点. 证毕.

## 参 考 文 献


[1] Jeyakumar, V., A generalization of a minimax theorem of Fan via a theorem of the alternatives, *JOTA*, 48:3 (1986), 525—533.

[2] Vogel, W., Ein Maximum-Prinzip Für Vertoroptimierungs Aufgaben, Operations Research Verfahren, XIX, 1974.

[3] Jahn, J., Scalarization in multiobjective optimization, in Mathematics of Multi-Objective Optimization (P. Serafini ed.), Springer Verlag, New York, 1985, 45—88.

[4] Nakayama, H., Lagrange duality and its geometric interpretation, in Mathematics of Multi-Objective Optimization (P. Serafini ed.), Springer Verlag, New York, 1985, 105—129.

[5] Sawaragi, Y., H. Nakayama and T. Tanino, Theory of Multiobjective Optimization, Academic Press Inc., 1985.

[6] Bazaraa, M. S. and Shetty, C. M., Nonlinear Programming: Theory and Algorithms, John Wiley & Sons, New York, 1979.

[7] Wang Shouyang, A note on optimality conditions in multiobjective programming, *Systems Science and Mathematical Science*, 8:1(1988), 184—190.

[8] Wang Shouyang and Fengmei Yang, A gap between scalar optimization and multiobjective optimization, *JOTA*, 68 (1991), 321—324.

# LAGRANGE DUALITY AND SCALARIZATION IN MULTIOBJECTIVE PROGRAMMING

LI ZHONG-FEI

(*Department of Mathematics, Inner Mongolia University, Hohhot* 010021)

WANG SHOU-YANG

(*Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing* 100080)

## ABSTRACT

In this paper, we study Lagrange duality and scalarization in multiobjective optimization. Under some weak assumptions, we prove a Lagrange multiplier theorem, two weak saddle point theorems, a weak duality theorem and a strong duality theorem. Finally, a theorem on scalarization is also presented.