系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
15 (1) (1995,1), 30—32

多目标规划的整体解

李 仲 飞
(内蒙古大学数学系，呼和浩特 010021)
汪 寿 阳
(中国科学院系统科学研究所，北京 100080)

摘要 本文在较弱的广义凸性假定下讨论多目标规划的几种整体有效性. 给出的定理统一了目前已有的一些关于多目标规划局部解为整体解的充分条件.

关键词 多目标规划，整体有效解，广义 Λ-凸性.

本文考虑如下带有一般约束的多目标规划问题

$$(\mathrm{VP})\quad \begin{cases}\Lambda-\min & f(x),\\ \quad\text{s. t.} & x\in X.\end{cases}$$

其中 $X\subset R^n$ 为非空集合，$\Lambda\subset R^m$ 为内部非空的点闭凸锥，$f:R^n\to R^m$.

本文所涉及到的概念——整体(局部)[弱]有效解、Benson 整体(局部)真有效解、Borwein 整体(局部)真有效解、Henig 整体(局部)真有效解、Hartley 整体(局部)真有效解、Λ-预不变凸性 (Λ-pre-invexity) 以及 Λ-(次)类凸性 (Λ-(sub) convexlikeness)，请分别参见文献[1,2,5—9].

首先给出几个命题:

命题 1 Λ-预不变凸 $\Longrightarrow$ Λ-类凸 $\Longrightarrow$ Λ-次类凸.

命题 2 若 f 在 X 上 Λ-次类凸，则 $f(X)+\mathrm{int}\Lambda$ 为凸集.

命题 3 若 f 在 X 上 Λ-次类凸，$\bar{x}\in X$，则

$$T(f(X)+\Lambda,f(\bar{x}))=clP(f(X)+\Lambda-f(\bar{x})),$$

且等式两端均为闭凸锥.

命题 4 若 f 在 X 上 Λ-次类凸，则 Benson 整体真有效解与 Borwein 整体真有效解等价.

命题 5 若 f 在 X 上 Λ-预不变凸和 $\lambda\in\Lambda^0$，则 $\lambda^T f$ 在 X 上 R_+-预不变凸.

注 1 命题 3 和 4 分别推广了[1,引理 3.1.1 和定理 3.1.1]，而命题 5 推广了[4,定理 1.2].

下面给出本文的主要结果.

定理 1 若 f 在 X 上 Λ-预不变凸，则 (VP) 的任一局部弱有效解也是 (VP) 的一个整体弱有效解.

1991 年 9 月 4 日收到.

定理2　若 f 在 X 上 Λ-预不变凸，则（VP）的任一局部有效解也是（VP）的一个整体有效解。

注 2　定理 1 和 2 推广了[4,定理 1.1]。

定理3　若 f 在 X 上连续且 Λ-预不变凸，则（VP）的任一 Benson 局部真有效解也是（VP）的一个 Benson 整体真有效解。

定理4　若 f 在 X 上连续且 Λ-预不变凸，则（VP）的任一 Borwein 局部真有效解也是（VP）的一个 Borwein 整体真有效解。

定理5　若 f 在 X 上 Λ-次类凸，则（VP）的任一 Henig 局部真有效解，也是（VP）的一个 Henig 整体真有效解。

当 $\Lambda = R^m_+$ 时，Hartley 整体(局部)真有效解即为具有直观经济意义的 Geoffrion 整体（局部）真有效解。Weir 和 Mond[5] 证明了：若 f 在 X 上 R^m_+- 预不变凸，则 Geoffrion 局部真有效解蕴含 Geoffrion 整体真有效解。这个结论现可推广为：

定理6　若 f 在 X 上 Λ-预不变凸．则（VP）的任一 Hartley 局部真有效解，也是（VP）的一个 Hartley 整体真有效解。

注 3　上述几个定理统一了目前已有的一些关于多目标规划局部解为整体解的充分条件。

参　考　文　献

[1] Sawaragi, Y., Nakayama, H. and Tanino, T., Theory of Multiobjective Optimization, Academic Press, New York, 1985.

[2] Jeyakumar, V., A generalization of a minimax theorem of Fan via a theorem of the alternative, *J. Opti. Theory and Appl.*, **48** (1986), 525—533.

[3] Jahn, J., Scalarization in Multiobjective Optimization, in (Eds. by Serafini, P.) Mathematics of Multiobjective Optimization, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[4] Weir, T. and Jeyakumar, V., A class of nonconvex functions and mathematical programming, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **38**(1988), 177—189.

[5] Weir, T. and Mond, B., Pre-invex function in multiobjective optimization, *J. Math. Anal. Appl.*, **136**(1988), 29—38.

[6] Benson, H.P., An improved definition of proper efficiency for vector minimization with respect to cones, *J. Math. Anal. Appl.*, **71**(1979), 232—241.

[7] Borwein, J.M., Proper efficiency points for maximizations with respect to cones, *SIAM J. Control & Optim.*, **15**(1977), 57—63.

[8] Henig, M.I., Proper efficiency with respect to cones, *J. Opti. Theory and Appl.*, **36**(1982), 387—407.

[9] Hartley, R., On cone-efficiency, cone-convexity, and cone-compactness, *SIAM. J. Appl. Math.*, **34**(1978), 211—222.

GLOBAL EFFICIENCY IN MULTIOBJECTIVE OPTIMIZATION

LI ZHONG-FEI
(*Mathematics Department, University of Inner Mongolia, Hohhot* 010021)

WANG SHOU-YANG
(*Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing* 100080)

Abstract In this short technical note, we present five sufficient conditions to guarantee a local efficient (resp., weakly efficient, properly efficient in the sense of Benson, properly efficient in the sense of Borwein, properly efficient in the sense of Henig and properly efficient in the sense of Hartley) solution of a general multiobjective optimization problem to be a corresponding solution of the problem. These theorems generalize and unify several results existing in the field.

Key words Multiobjective optimization, global efficiency, generalized Λ-convexity.