系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
5 (2) (1985), 114—120

有限元方法的渐近展开及其外推

王军平　　林　群
(中国科学院系统科学研究所，北京)

文[1]以平面上的 Poisson 方程为模型研究了有限元法的外推. 本文讨论问题

$$
(\mathrm{P})\begin{cases}-\partial_i(\alpha_{ij}\partial_j u)+cu=f, & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\ u=0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}\end{cases}
$$

的线性有限元解 u^h 的渐近展开. 这里 Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中的有界凸多面体，$c \geqslant 0$，$(\alpha_{ij})_{N\times N}$ 满足

$$
\xi_i\alpha_{ij}\xi_j \geqslant \gamma\|\xi\|^2, \qquad \xi=(\xi_1,\cdots,\xi_N), \qquad \gamma>0.
$$

为简单计,我们仅在 $\mathbf{R}^2$ 中讨论.

首先将 Ω 剖分成大三角形域 Ω_k，Ω_k 的顶点亦为 Ω 的角点. 对诸 Ω_k 进行一致剖分(参看下页图),设 $\Omega_k^h=\{\tau_{kl}\}$,$\Omega^h=\bigcup\limits_k \Omega_k^h=\{\tau_{kl}\}_{k,l}$; h_k 表示 Ω_k^h 中单元的直径，$h=\max\limits_k\{h_k\}$，$S_0^h(\Omega^h)$ 表示线性有限元空间; u^h 和 u^I 分别表示问题 (P) 的解 u 在 $S_0^h(\Omega^h)$ 上的 Ritz 投影及其线性插值，$G_{z_0}^h(z)$ 表示问题 (P) 的 Green 函数 $G_{z_0}(z)$ 在 $S_0^h(\Omega^h)$ 上的 Ritz 投影. 由[3]知

$$
\iint\limits_{\Omega}|\nabla(G_{z_0}(z)-G_{z_0}^h(z)|\,dz \leqslant ch|\log h|. \tag{1}
$$

外推过程中估计式(1)将起重要的作用.

定理. 设问题 (P)的解 $u\in C^4(\bar{\Omega})$，$a_{ij}\in C^2(\bar{\Omega})$，$c\in C^1(\bar{\Omega})$，则有

$$
u^h(z_0)=u^I(z_0)+\sum_k h_k^2\varphi_k^h+R^h,
$$

其中 φ_k^h，$R^h\in S_0^h(\Omega^h)$. 且有

$$
\|R^h\|_\infty \leqslant ch^3\|u\|_4,
$$

$$
\varphi_k^h=c_k\iint\limits_{\Omega_k}D^{(\alpha)}uDG_{z_0}^h(z)\,dz, \qquad |\alpha|\leqslant 4.
$$

定理的证明分做几个引理.

引理 1. 设

$$
K^h(z_0)=-\iint\limits_{\Omega^h}(u-u^I)\partial_i a_{ij}\partial_j G_{z_0}^h(z)\,dz,
$$

则存在 $\psi_k^h(z_0)$ 及 $R_1^h(z_0)$ 使得

1984 年 6 月 18 日收到.

$$K^h(z_0)=\sum_k h_k^2\psi_k^h(z_0)+R_1^h(z_0), \tag{2}$$

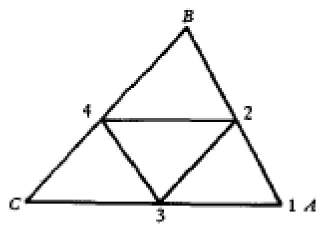
其中 $\|R_1^h\|_\infty\leqslant ch^3\|u\|_3$，$\psi_k^h(z_0)$ 具有形式

$$\psi_k^h(z_0)=\iint_{\Omega_k} D^{(\alpha)}uDG_{z_0}^h(z)dz,\quad |\alpha|\leqslant 2.$$

证．

$$K^h(z_0)=-\iint_{\Omega^h}\cdot\ =-\sum_{\tau_{kl}}\iint_{\tau_{kl}}\cdot\ ,$$

取 τ_{kl} 为单元 $\triangle 123$（参看图）．设 N_p 为该单元顶点 $p(p=1,2,3)$ 所对应的形函数，则有



$$\begin{aligned} u-u^I&=\sum_p N_p((z-z(p))\cdot\nabla)^2u(z)+R_1 \\ &=\sum_p N_p[(x-x(p))^2u_{xx}(z) \\ &\quad+2(x-x(p))(y-y(p))u_{xy}(z) \\ &\quad+(y-y(p))^2u_{yy}(z)]+R_1, \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $\|R_1\|_\infty\leqslant ch^3\|u\|_3$．于是

$$\begin{aligned} &\iint_{\tau_{kl}}(u-u^I)\partial_i\alpha_{ij}\partial_jG_{z_0}^h(z)dz \\ &=\sum_p\iint_{\tau_{kl}}N_p(x-x(p))^2u_{xx}(z)\partial_i\alpha_{ij}\partial_jG_{z_0}^h(z)dz+\cdots \\ &\quad+\iint_{\tau_{kl}}R_1\partial_i\alpha_{ij}\partial_jG_{z_0}^h(z)dz \\ &=\Big(\sum_p\frac{1}{\alpha}\iint_{\tau_{kl}}N_p(x-x(p))^2dz\Big) \\ &\quad\cdot\iint_{\tau_{kl}}u_{xx}(z)\partial_i\alpha_{ij}\partial_jG_{z_0}^h(z)dz+\cdots \\ &\quad+\iint_{\tau_{kl}}R_1\partial_i\alpha_{ij}\partial_jG_{z_0}^h(z)dz+\iint_{\tau_{kl}}\tilde{R}_1\partial_jG_{z_0}^h(z)d\Omega, \end{aligned}$$

这里 $\alpha=\operatorname{meas}\tau_{kl}$，$\|\tilde{R}_1\|_\infty\leqslant ch^3\|u\|_3$．从而存在 $\psi_k^h(z_0)$ 及 $R_1^h(z_0)$ 使得(2)式成立且

$$\psi_k^h(z_0)=\iint_{D_k}(c_1u_{xx}(z)+c_2u_{xy}(z)+c_3u_{yy}(z))\partial_i\alpha_{ij}\partial_jG_{z_0}^h(z)dz,$$

$$\|R_1^h\|_\infty\leqslant ch^3\|u\|_3.$$

引理 2. 设 $L^h(z_0)=\sum\limits_{k,l}\int_{\partial\tau_{kl}}(u-u^I)(\boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{n})\alpha_{ij}\partial_jG_{z_0}^h(z)ds$, $\boldsymbol{n}$ 为单元 τ_{kl} 的单位外法向,则存在 $\chi_k^h(z_0)$, $R_2^h(z_0)$, 使得

$$L^h(z_0)=\sum_k h_k^2\chi_k^h(z_0)+R_2^h(z_0),$$

其中 $\|R_2^h(z_0)\|_\infty\leqslant ch^3\|u\|_4$, $\chi_k^h(z_0)$ 具有形式

$$\iint_{D_k}D^{(\gamma)}uDG_{z_0}^h(z)dz,\quad |\gamma|\leqslant 4.$$

证. 仍取 τ_{kl} 为单元 $\triangle 123$(参看上页图),以

$$\int_{23}(u-u^I)(\boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{n})\alpha_{ij}\partial_jG_{z_0}^h(z)ds \tag{4}$$

为例给出具体证明.

不难验证,(4)式中

$$\boldsymbol{n}=-\frac{2\alpha\nabla N_1}{l_{23}},$$

故

$$\boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{2\alpha}{l_{23}}\partial_iN_1.$$

以 s 表示 $\overline{23}$ 方向上的变元, s_{M23} 表 $\overline{23}$ 之中点,则易证

$$u-u^I=\frac{1}{2}\left[(s-s_{M23})^2-\left(\frac{l_{23}}{2}\right)^2\right]D_{23}^2u$$
$$+\frac{1}{6}\left[(s-s_{M23})^3-\left(\frac{l_{23}}{2}\right)^2(s-s_{M23})\right]D_{23}^3u+R_2,$$

$$\|R_2\|_\infty\leqslant ch^4\|u\|_4,$$

从而

$$(4)式=-\frac{2\alpha}{l_{23}}\partial_iN_1\left\{\frac{1}{2}\int_{23}\left[(s-s_{M23})^2-\left(\frac{l_{23}}{2}\right)^2\right]D_{23}^2u\alpha_{ij}\partial_jG_{z_0}^h(z)ds\right.$$
$$+\frac{1}{6}\int_{23}\left[(s-s_{M23})^3-\left(\frac{l_{23}}{2}\right)^2(s-s_{M23})\right]D_{23}^3u\alpha_{ij}\partial_jG_{z_0}^h(z)ds$$
$$\left.+\int_{23}R_2\alpha_{ij}\partial_jG_{z_0}^h(z)ds\right\}. \tag{5}$$

注意到

$$(s-s_{M23})^2-\frac{1}{3}\left(\frac{l_{23}}{2}\right)^2=\frac{1}{3}\left[(s-s_{M23})^3-\left(\frac{l_{23}}{2}\right)^2(s-s_{M23})\right]'$$
$$=\frac{1}{12}\left[(s-s_{M23})^4-2\left(\frac{l_{23}}{2}\right)^2(s-s_{M23})^2+\frac{l_{23}^4}{16}\right]''.$$

应用分部积分公式即得

$$(5)\text{式}=\frac{l_{23}\alpha}{6}\partial_i N_1\int_{23}D_{23}^2u\alpha_{ij}\partial_j G_{z_0}^h(z)ds+\int_{23}\widetilde{R}_2\partial_j G_{z_0}^h(z)ds+\int_{23}R_2\alpha_{ij}\partial_j G_{z_0}^h(z)ds,$$

其中

$$\|\widetilde{R}_2\|_\infty\leqslant ch^4\|u\|_4.$$

设 e_{23}, e_{21} 分别表示 **23** 及 **21** 的单位化，q_{1j}, q_{2j}，使得

$$x_j=q_{1j}e_{23}+q_{2j}e_{21},$$

则有

$$\begin{aligned}&\frac{l_{23}\alpha}{6}\partial_i N_1\int_{23}D_{23}^2u\alpha_{ij}\partial_j G_{z_0}^h(z)ds\\&=\frac{l_{23}\alpha}{6}\partial_i N_1 q_{1j}\int_{23}D_{23}^2u\alpha_{ij}D_{23}G_{z_0}^h(z)ds\\&\quad+\frac{l_{23}\alpha}{6}\partial_i N_1 q_{2j}\int_{23}D_{23}^2u\alpha_{ij}D_{21}G_{z_0}^h(z)ds\\&=\frac{l_{23}\alpha}{6}\partial_i N_1 q_{1j}\int_{23}D_{23}^2u\alpha_{ij}D_{23}G_{z_0}^h(z)ds\\&\quad+\frac{l_{23}^2\alpha}{6l_{12}}\partial_i N_1 q_{2j}\int_{12}D_{23}^2u\alpha_{ij}D_{21}G_{z_0}^h(z)ds\\&\quad+\frac{l_{23}^2l_{31}}{12}\partial_i N_1 q_{2j}\iint_{\tau_{kl}}D_{13}(D_{23}^2u\alpha_{ij})D_{21}G^h dz.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}(4)\text{式}=&\frac{l_{23}^2l_{31}}{12}\partial_i N_1 q_{2j}\iint_{\tau_{kl}}D_{13}(D_{23}^2u\alpha_{ij})D_{21}G_{z_0}^h(z)dz\\&+\frac{l_{23}\alpha}{6}\partial_i N_1 q_{1j}\int_{23}D_{23}^2u\alpha_{ij}D_{23}G_{z_0}^h(z)ds\\&+\frac{l_{23}^2\alpha}{6l_{12}}\partial_i N_1 q_{2j}\int_{12}D_{23}^2u\alpha_{ij}D_{21}G_{z_0}^h(z)ds\\&+\int_{23}\widetilde{R}_2\partial_j G_{z_0}^h(z)ds+\int_{23}R_2\alpha_{ij}\partial_j G_{z_0}^h(z)ds.\end{aligned}\tag{6}$$

$L^h(z_0)$ 是对(6)式求和的结果，(6)式中主项部分含有线积分与面积分，显然在构成平行四边单元的公共边上的线积分相互抵消，剩下的只有面积分及在 $\partial\Omega_k$ 上的线积分，分部积分即知线积分具有形式

$$ch_k^2\int_{BC}D^{(\alpha)}uG_{z_0}^h(z)ds,\quad|\alpha|\leqslant 3.\tag{7}$$

应用 Green 公式可将(7)式化为

$$ch_k^2 \iint\limits_{D_p} D^{(\beta)}uDG_{z_0}^h(z)ds, \quad |\beta| \leqslant 4,$$

从而存在 $\chi_k^h(z_0)$，$R_2^h(z_0) \in S_0^h(\Omega^h)$，使得

$$L^h(z_0) = \sum_k h_k^2 \chi_k^h(z_0) + R_2^h(z_0),$$

并且 $\chi_k^h(z_0)$ 具有所述形式．注意到

$$\int_{23} R_2 a_{ij} \partial_j G_{z_0}^h(z) ds = \left(\frac{1}{\alpha} \int_{23} R_2 a_{ij} ds\right) \iint\limits_{\tau_{kl}} \partial_j G_{z_0}^h(z) ds,$$

故有

$$\|R_2^h\|_\infty \leqslant ch^3 \|u\|_4.$$

引理证毕．

引理 3. 设

$$Q^h = \iint\limits_{\Omega^h} c(u - u^I) G_{z_0}^h(z) dz,$$

则存在 θ_k^h 及 $R_3^h(z_0)$，使得

$$Q^h(z_0) = \sum_k h_k^2 \theta_k^h(z_0) + R_3^h(z_0),$$

其中 $\|R_3^h(z_0)\|_\infty \leqslant ch^3\|u\|$，$\theta_k^h(z_0)$ 具有形式

$$\iint\limits_{D_k} CD^{(\alpha)}uG_{z_0}^h(z)dz, \quad |\alpha| \leqslant 2.$$

证．

$$Q^h(z_0) = \sum_{k,l} \iint\limits_{\tau_{kl}} c(u - u^I) G_{z_0}^h(z) dz.$$

设 M_{kl} 为 τ_{kl} 的形心，则有

$$G_{z_0}^h(z) = G_{z_0}^h(M_{kl}) + (z - M_{kl}) \cdot \nabla G_{z_0}^h(z).$$

从而

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\tau_{kl}} c(u - u^I) G_{z_0}^h(z) dz \\
&\quad = \iint\limits_{\tau_{kl}} c(u - u^I) G_{z_0}^h(M_{kl}) dz \\
&\qquad + \iint\limits_{\tau_{kl}} c(u - u^I)(z - M_{kl}) \cdot \nabla G_{z_0}^h(z) dz.
\end{aligned}$$

应用(3)式即有

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\tau_{kl}} c(u - u^I) G_{z_0}^h(M_{kl}) dz \\
&\quad = \sum_p \iint\limits_{\tau_{kl}} N_p(z - z(p) \cdot \nabla)^2 u(z) c G_{z_0}^h(M_{kl}) dz
\end{aligned}$$

$$+\iint_{\tau_{kl}} R_1 c G_{z_0}^h(M_{kl})dz$$

$$=\frac{1}{\alpha}\Big(\sum_p \iint_{\tau_{kl}} N_p(x-x(p))^2dz\Big)\iint_{\tau_{kl}} u_{xx}(z)cG_{z_0}^h(z)dz$$

$$+\iint_{\tau_{kl}} \widetilde{R}_3 D G_{z_0}^h(z)dz,$$

其中

$$\|\widetilde{R}_3\|_\infty \leqslant ch^3\|u\|_3.$$

于是存在 $\theta_k^h(z_0)$ 及 $R_3^h(z_0)$，使得

$$Q^h(z_0)=\sum_k h_k^2\theta_k^h(z_0)+R_3^h(z_0),$$

并且 $\|R_3^h\|_\infty \leqslant ch^3\|u\|_3$，$\theta_k^h(z_0)$ 具有所述之形式．引理证毕．

定理之证明:

我们有

$$u^h-u^I(z_0)=\iint_{\Omega^h}\alpha_{ij}\partial_i(u-u^I)\partial_j G_{z_0}^h(z)dz+\iint_{\Omega^h}c(u-u^I)G^hdz$$

$$=\sum_{k,l}\Big(\iint_{\tau_{kl}}\alpha_{ij}\partial_i(u-u^I)\partial_j G_{z_0}^h(z)dz$$

$$+\iint_{\tau_{kl}}c(u-u^I)G_{z_0}^h(z)dz\Big)$$

$$=\sum_{k,l}\Big(-\iint_{\tau_{kl}}(u-u^I)\partial_i\alpha_{ij}\partial_j G_{z_0}^h(z)dz$$

$$+\int_{\partial\tau_{kl}}(\boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{n})(u-u^I)\alpha_{ij}\partial_j G_{z_0}^h(z)ds$$

$$+\iint_{\tau_{kl}}c(u-u^I)G_{z_0}^h(z)dz\Big)$$

$$=K^h(z_0)+L^h(z_0)+Q^h(z_0).$$

由引理1，引理 2，引理 3 即知

$$u^h-u^I=\sum_k h_k^2(\phi_k^h+\chi_k^h+\theta_k^h)+R_1^h+R_2^h+R_3^h.$$

令

$$\varphi_k^h(z_0)=\phi_k^h(z_0)+\chi_k^h(z_0)+\theta_k^h(z_0),$$
$$R^h(z_0)=R_1^h(z_0)+R_2^h(z_0)+R_3^h(z_0),$$

即得定理之结论．证毕．

系． 设问题 (P) 的解 $u\in C^4(\bar{\Omega})$，$u^{h/2}$ 表示对 Ω^h 进行中点加密后的有限元解，则有

$$\left|\frac{4u^{h/2}(z_0)-u^h(z_0)}{3}-u(z_0)\right|\leqslant ch^3|\log h|\,\|u\|_4,$$

这里 z_0 为 h——剖分的节点.

证. 将定理中 φ_k^h 的表达式中的 $G_{z_0}^h(z)$ 换为 $G_{z_0}(z)$ 并应用估计式 (1) 即得结论.

注 1 本文的方法可以毫无困难地推广到 $N\geqslant 3$ 维，此时的误差阶没有因子 $|\log h|$.

注 2 同法可以做出有限元本征值问题的渐近展开式.

参 考 文 献

[1] Lin Qun, Lu Tao, Asymptotic expansion for finite element approximation of elliptic problem on polygonal domains, Sixth Int. Conf. Comp. Meth. Appl. Sci. Eng., Versailles, 1983.

[2] 陈传淼,插值逼近的某些估计及其应用,高校计算数学学报，1(1984), 35—43.

[3] Frehse, J., Rannacher, R., Eine L^1-Fehlerabschatzung fur diskrete Grundlosungen, *Bonn. Math. Schr.*, 89(1976), 92—114.

EXPANSION AND EXTRAPOLATION FOR THE FINITE ELEMENT METHOD

WANG JUN-PING LIN QUN

(Institute of Systems Science, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper the asymptotic expansion for linear finite elements of the elliptic problem

$$-\partial_j(\alpha_{ij}\partial_i u)+cu=f \text{ in } \Omega,$$
$$u=0 \text{ on } \partial\Omega$$

is given, where Ω is a polygonal domain in $\mathbf{R}^N$. As a result, we can get a high accuracy approximation by the Richarson extrapolation.