

文章编号: 1001-4322(2003)11-1087-06

径向渡越时间振荡器互作用特性的流体理论分析*

贾云峰, 刘永贵

(国防科学技术大学 理学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 用线性流体理论分析了径向渡越时间振荡器谐振腔中电子束与高频场的相互作用, 通过数值求解得到了其中束-场能量交换等随直流渡越角的变化规律。与单电子模型的分析结果相比较, 流体模型所得结果更具有普适性。

关键词: 高功率微波源; 渡越时间效应; 径向渡越时间振荡器; 流体理论

中图分类号: TN015 **文献标识码:** A

径向渡越时间振荡器 (Radial transit-time oscillator, RTTO)^[1] 是基于径向渡越时间效应的一种新型的高功率微波源, 数值模拟^[1~3] 表明它具有不需外加磁场、对电子束质量要求不高、频率稳定、饱和功率高、效率高、阻抗低等优点。目前对 RTTO 的正式报道仅限于单电子模型分析和粒子模拟研究。本文从更普遍的流体模型出发^[4], 采用合理的近似条件, 在柱坐标下导出了 RTTO 谐振腔中电子束与高频场相互作用的方程, 进行了数值求解并分析了电子束与场的能量交换等多个参数随直流渡越角变化的规律。与单电子理论^[3,5] 相比较, 流体模型所得结果更具有一般性, 得到了更多的规律性认识。

1 RTTO 结构

径向渡越时间振荡器的结构示意图如图 1 所示, 电子从阴极发射进入群聚腔, 在该腔中与高频微扰场相互作用, 产生速度和密度调制, 调制的电子束与提取腔相互作用产生高功率微波输出。RTTO 的谐振腔在柱坐标系中的等效示意图如图 2 所示。

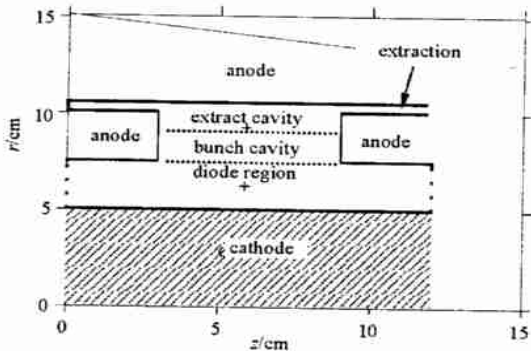


Fig. 1 Schematic of RTTO
图 1 径向渡越时间振荡器示意图

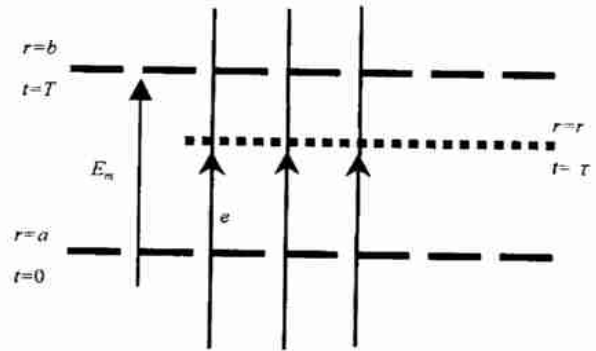


Fig. 2 Schematic of RTTO gap
图 2 RTTO 径向间隙示意图

2 径向间隙中电子束的流体描述

将进入 RTTO 径向间隙的电子束看作是导电的连续流体, 其运动由连续性方程、运动方程、能量方程、麦克斯韦方程来完整描述。连续性方程、运动方程和相关的麦克斯韦方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$
$$\frac{\partial(\quad)}{\partial t} + \quad \cdot \nabla(\quad) = \frac{-q}{m} (\mathbf{E} + \quad \times \mathbf{B})$$

* 收稿日期: 2003-02-09; 修订日期: 2003-05-16
基金项目: 国家 863 计划项目资助课题
作者简介: 贾云峰(1975-), 男, 博士生, 主要从事高功率微波和毫米波回旋管方面的研究工作。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

加上相对论性的能量方程^[6]

$$\frac{d(\gamma mc^2)}{dt} = -q(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \quad (2)$$

后,就构成了封闭的描述导电流体的方程组,其中各物理量符号与通常教科书中的含义相同。

在稳态情况下, $\partial/\partial t = 0$ 。此时,空间任意点处的电势 ϕ 满足 $\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0 = -\partial/\partial r$, 能量方程化为能量守恒方程

$$\gamma mc^2 + q\phi = \gamma_0 mc^2 + q\phi_0 = \text{const} \quad (3)$$

当电子径向渡越 RTTO 的谐振腔间隙时,参与相互作用产生能量交换的是电子束和高频场的 r 分量。假设 RTTO 阴极工作于空间电荷限制下,束流的自身磁场比腔内静电场小得多。由于轴向速度 $v_z \ll v_0$, v_0 为电子初始速度,所以由 $\mathbf{v}_z \times \mathbf{B}$ 产生的 r 方向的力远小于电场力,它在电子越过间隙的渡越时间内产生的速度极小,同时磁场引起的轴向的 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移速度远小于电子初始速度,因此可以忽略磁场对流体运动的影响。这样,稳态情况下连续性方程、运动方程、能量守恒方程、麦克斯韦方程在 r 方向的分量形式为

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0 = -j_r/(\epsilon_0 v_r) \\ v_r \frac{\partial(\gamma v_r)}{\partial r} = \frac{-q}{m} E_r \\ j_r = \text{const}/r = aj_a/r \\ \gamma mc^2 + q\phi = \gamma_0 mc^2 + q\phi_0 \\ E = E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \end{cases} \quad (4)$$

方程组(1)、(2)和(4)就是忽略磁场对流体运动的影响后描述流体运动的方程及其稳态情况,其中包括了流体的空间电荷效应和相对论效应。方程中下标 a 表示各量在 $r = a$ 处的值。

3 电子束空间电荷效应的影响

在流体理论分析中,研究对象是整个电子束。根据泊松方程,大量电子进入 RTTO 径向间隙后势必会造成空间电势的降低,这就是所谓的空间电荷效应。这种效应会导致电子在直流加速电压下获得的零阶速度发生变化,使问题复杂化。下面我们来估算由于束电子的数密度不为无限小而产生的空间电荷效应。

由稳态流体方程(4)中的泊松方程和能量守恒方程很容易得到

$$\nabla^2 \phi = \frac{qj_r}{mc^2 \epsilon_0 v_r} \quad (5)$$

展开即为

$$r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{qaj_a}{mc^2 \epsilon_0 c \sqrt{\gamma^2 - 1}} = 0 \quad (6)$$

由方程(3)可知 γ 与空间电势 ϕ 呈线性关系,所以研究 γ 的变化就得到了空间电势下降所带来的空间电荷效应的影响。(6)式是个变系数的偏微分方程,其解不能用有限形式的初等函数表示。取我们实验所用的电压 $\phi_0 = -300\text{kV}$, 间隙的内外半径 a, b 分别取为 17 和 22.8cm, 电流为 20kA, 应用边界条件

$$\begin{cases} \phi(r=a) = \phi(r=b) = 0 \\ \gamma(r=a) = \gamma(r=b) = (\gamma_0 mc^2 + q\phi_0)/mc^2 = 1 + q\phi_0/mc^2 = 1.6 \end{cases} \quad (7)$$

对方程(6)进行数值求解得到的结果如图 3 所示。由图可见,在电势最低点处, γ 比初始值降低的程度小于 1/10。由此引起的直流渡越角的变化示于图 4。

综合图 3、图 4,我们可以忽略空间电荷效应,认为此时空间电荷效应引起的电场近似为零,因此速度的零阶量为常数。

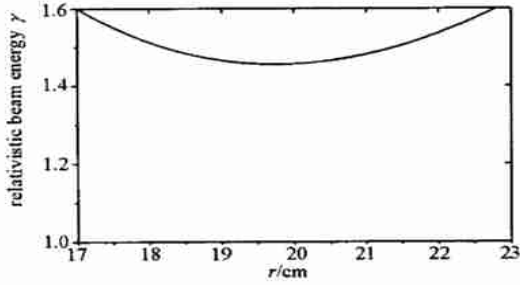


Fig. 3 beam energy γ vs radius r
图 3 电子能量随半径的变化

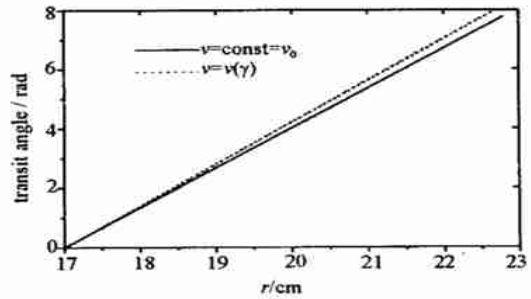


Fig. 4 Transit angle vs radius
图 4 直流渡越角随半径的变化

4 电子束与高频场的相互作用

当考虑空间电荷效应和相对论效应后,问题无法进行解析求解,因此我们对问题进行简化。假设:电子束的运动是一维的,只沿 r 方向运动,电场也只有 r 分量,由于在 z 向变化是独立的,可以对 r 和 z 分离变量,不考虑各物理量随 z 向的变化;电子束初速 v_0 为恒定;忽略空间电荷效应,间隙内不存在直流场;没有交叉超越现象发生;不考虑相对论效应;所有一阶量都具有 $e^{i t}$ 的形式,且交变量的幅值远小于零阶量,即满足小信号条件;略去所有二阶量。此时流体状态由泊松方程、连续性方程和运动方程决定。由于参与相互作用的是各物理量的 r 分量,所以以下除非特别说明,默认各量实际为 r 分量。

在柱坐标系下,RTTO 谐振腔间隙内高频电场、电子速度、电子束的电荷密度的表达式为

$$\begin{cases} E = E_1 = E_m(r)e^{i t} + c. c. \\ v = v_0 + v_1 = v_0 + v_m(r)e^{i t} + c. c. \\ = v_0 + v_1 = v_0(r) + v_m(r)e^{i t} + c. c. \end{cases} \quad (8)$$

式中:下标 0,1 分别表示零阶量和一阶量,下标 m 表示一阶量的幅值; $c. c.$ 表示前面各项的共轭。

在 RTTO 的谐振腔中,由于电子径向运动,初始电荷密度和电流密度与半径有关。由稳态的流体方程(4)可以得到

$$\begin{cases} a j_a = r j_0(r) \\ a a = r v_0(r) \end{cases} \quad (9)$$

泊松方程、流体运动方程和连续性方程的柱坐标形式分别为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE)}{\partial r} = -\rho \quad (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{e}{m} E_1(r, t) = -\frac{e}{m} E_m e^{i t} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rj)}{\partial r} = 0 \quad (12)$$

式中电流密度的表达式为

$$j = j_0 + j_1 = (v_0 + v_1) \rho = j_0(r) + j_m e^{i t} \quad (13)$$

此处, $j_0(r) = v_0 \rho$, $j_1 = v_1 \rho + v_0 \rho_1$, $j_m = v_m \rho + v_0 \rho_m$, 由此可得

$$v_m = \frac{1}{\rho} (j_m - v_0 \rho_m) \quad (14)$$

方程(10)~(12)的初始条件为:当 $t=0$ 时

$$(rE_m)(r=a) = aE_{ma}, \quad j_{ma} = 0 \quad (15)$$

这样,由方程(10)、(12)和(15)可得

$$r(E_m + \frac{1}{i} j_m) = \text{const} = aE_{ma} \quad (16)$$

联立(14)式和连续性方程(12),消去电子数密度 n_m 得

$$v_m = \frac{1}{r} \left[r j_m + \frac{v_0}{i} \frac{\partial(r j_m)}{\partial r} \right] \quad (17)$$

将(16)和(17)式代入方程(11)得

$$v_0^2 \frac{\partial^2 (rj_m)}{\partial r^2} + 2i v_0 \frac{\partial (rj_m)}{\partial r} - \left(\omega^2 + \frac{a a e}{m_0 r} \right) (rj_m) = - \frac{i e a a}{m} E_m \quad (18)$$

做变量替换,令 $rj_m(r) = g(r)$ 得到

$$v_0^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + 2i v_0 \frac{\partial g}{\partial r} - \left(\omega^2 + \frac{a a e}{m_0 r} \right) g = - \frac{i e a a}{m} E_m \quad (19)$$

微分方程(19)就是在不考虑相对论效应,所有一阶量具有 $e^{i t}$ 的简谐变化形式时的高频径向间隙内电子束与场相互作用的基本方程。方程右端是由高频场决定的激励源项,高频场越强,相互作用越强,电流密度调制由于高频场的存在而产生。若是已知高频场的表达式,则一阶电流、电子速度、电荷密度等交变量都可以由(19)、(17)、(14)式求出。同时,我们也可以看出,相互作用还与入射电子束的电荷密度有关,电荷密度越大,相互作用越强。

电子束径向(r 向)发射和轴向(z 向)发射的区别在于,在径向高频间隙中,电子束零阶密度与半径成反比,各一阶量的幅值也取决于半径 r ;而轴向发射时这些量与坐标 z 无关。从物理上说,真正影响微波产生的应该是面电荷密度和面电流密度的调制。我们注意到,在一维平板模型的理论分析中,由于没有考虑二维效应,电荷密度在某个 z_0 处的横截面内是均匀分布的,所以体电荷密度的调制反映了面电荷密度的调制。在柱坐标系中分析电子束径向发射时,由于零阶密度和一阶交变量的幅度随半径而变化,如果再以体电荷密度和体电流密度来表征电流调制和电子束群聚已经不合适,而应该用半径 r 的环面上的电流密度通量的变化来表示电流密度的变化。当 $r = a$ 时, E_m 和零阶密度等不随 r 变化, $a a / r = a$,相互作用方程(19)式将退化为我们所熟知的一维平板间隙模型时的形式^[4]。

由于相互作用方程(19)的解不能用初等函数的有限形式表示,我们采用如下途径进行数值求解:求解时取坐标 r 或束电子的直流渡越角(两者是一一对应的)为自变量;首先将相互作用方程无量纲化,问题转化为一阶微分方程组的初值问题。数值求解得到电流密度 j_m ,然后利用(16)式得到由电流密度自洽决定的高频电场 E_m 的表达式,无量纲化后可以得到其数值解;对 $E_m j_m^*$ 积分并取实部得到电子束与高频场之间的功率交换。

5 数值求解结果

无量纲化后的方程的系数由实验条件给出:束电压 300kV,电子速度 $0.7c$ (c 为光速),RTTO 径向间隙内半径 $a = 17\text{cm}$,谐振腔本征频率 5 GHz,电子数密度取 $1.6 \times 10^{15} \text{m}^{-3}$ 。

采用定步长维梯(Witty)法^[7],我们对(16)、(19)式进行了求解,得到了电流密度、间隙内的高频场及电子束与高频场之间的功率交换的数值解,并讨论了不同电子数密度和初始速度时的情况。在径向间隙内,电子束与高频场之间的净能量交换随束电子的直流渡越角的变化示于图 5,其中负值表示电子束将能量交给高频场。由图中可以看出,在直流渡越角处于 $0 \sim 6.26\text{rad}$ 范围内时,电子束将从高频场吸取能量,高频场不能增长。RTTO 利用的是渡越角为 $6.26 \sim 8.69\text{rad}$, $12.47 \sim 15.2\text{rad}$ 等一系列电子能量负增长区。当电子的直流渡越角处于这一范围时,电子将能量交给间隙内的高频本征场,场得到能量而发展成为高功率微波。出于腔长不能太大的考虑,一般工作点选取在第一增长区内。数值求解表明,在第一增长区内电子直流渡越角约为 7.56rad 时,高频场的增长率最大,这就是 RTTO 的最佳工作点。从图 5 中还可以看出,流体理论数值求解的结果与相对论条件下单电子理论的结果^[3](图中虚线)相比,两者变化规律基本一致。

一阶电流密度随束电子直流渡越角的变化如图 6 所示。可以看出,由于渡越时间效应的影响,电流密度产生了调制。

高频电场幅值随直流渡越角的变化示于图 7。由图 7 可见,在 RTTO 中,电场基本与半径呈反比,在有限渡越角情况下,由于电子束与高频场之间的相互作用,高频场幅值产生了振荡。

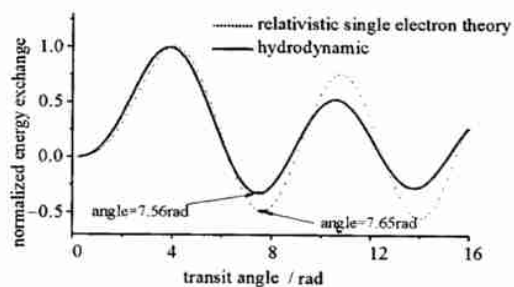


Fig. 5 Energy exchange vs transit angle
图 5 电子束与高频场之间的能量交换随直流渡越角的变化

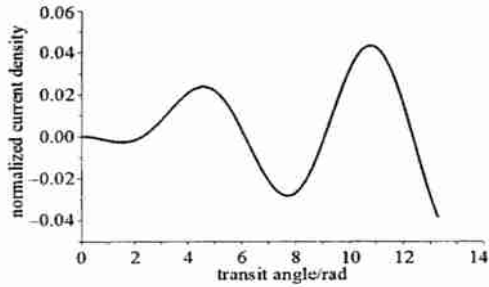


Fig. 6 current density j_m vs transit angle

图 6 一阶电流密度随直流渡越角的变化

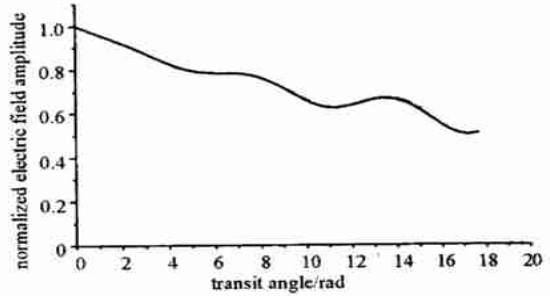


Fig. 7 Amplitude of E -field vs transit angle

图 7 径向间隙中高频场幅值随直流渡越角的变化

从相互作用方程(19)式我们已经看到,电子束与高频本征场之间的相互作用与初始电子数密度有关,即与电子束流有关。我们比较了电子归一化数密度为 2, 3, 4, 10 时的束-场功率交换,结果示于图 8。可以看出,电子数密度不同时,最佳增长点所对应的直流渡越角不变,表明电子数密度的不同不影响增长条件。但电子束与高频场之间的功率交换的幅度有较大的变化,密度越大,幅值越大,表明当进入间隙的电子束流增大时,高频场的增长率和净能量交换也将随之增大,显然此时高频场的幅值也将越大。

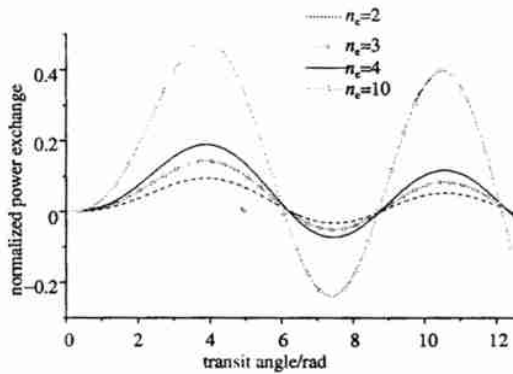


Fig. 8 Power exchange vs transit angle

图 8 不同电子数密度时的束-场功率交换

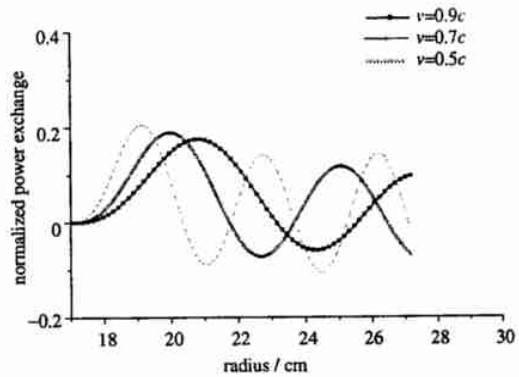


Fig. 9 Power exchange vs radius

图 9 不同初速时电子束与场的功率交换随半径的变化

在数值求解过程中,束电子的初速取为 $0.7c$ 。但在实际情况下,电子初始速度随加速电压的不同而变化,在间隙间距一定时会导致间隙的直流渡越角发生变化,此时我们不能断定谐振腔是否还处于最佳工作状态。数值求解表明,电子束与高频场之间的功率交换随束电子的直流渡越角的变化仍然遵循所示的规律,而随间隙半径变化的情况则有所改变。图 9 表示了电子不同初速度情况下能量交换随间隙半径的变化规律,其中间隙内半径恒定为 $a = 17\text{cm}$ 。由图 9 中代表不同束电子初速度的曲线可以看出,当束电子的初速为 $0.5c, 0.7c, 0.9c$ 时,最佳增长点处的半径分别为 $21.1, 22.8, 24.54\text{cm}$,此时径向间隙的最佳间距应分别为 $4.1, 5.8, 7.54\text{cm}$ 。当 r 为 22.8cm 时,以 $0.5c, 0.7c, 0.9c$ 初速进入间隙的电子束交给高频场的功率分别为负最大、零和正最大。由此可见,在谐振腔径向间隙的宽度一定时,电子初始速度或者说直流加速电压对高频场增长的影响相当大。

6 结 论

本文用流体理论分析了径向渡越时间振荡器谐振腔间隙中电子束与高频场的相互作用,通过数值求解给出了其中一阶电流密度、电场和束-场能量交换随渡越角变化的规律。在合理的近似下得到的结果与单电子模型的分析结果一致,而且,用线性流体理论我们还获得了许多单电子模型不能得到的有用信息。

参考文献

[1] 贾云峰,刘永贵,李传胜. 径向渡越时间振荡器的数值模拟[J]. 强激光与粒子束, 2002, 14(1): 95-98. (Jia Y F, Liu Y G, Li C L. Numerical simulation of radial transit-time oscillator. *High Power Laser and Particle Beams*, 2002, 14 (1): 95-98)

[2] Arman M J. High power radial klystron oscillator[A]. SPIE[C]. 1995. 2557:21-31.

- [3] 吴中发,王玉芝. 径向速调管振荡器的理论分析和数值模拟. 强激光与粒子束, 2000, **12**(2): 211—214. (Wu Z F, Wang Y Z. Theoretical design and numerical simulations of radial klystron oscillator[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2000, **12**(2): 211—214)
- [4] 吴鸿适. 微波电子学原理[M]. 北京: 科学出版社, 1987. (Wu H S. Principles of microwave electronics. Beijing: Science Press, 1987)
- [5] 范植开. 渡越管振荡器的研究[D]. 绵阳: 中国工程物理研究院应用电子学研究所, 1999. (Fan Z K. Research of transit-time tube oscillator. Mianyang: Institute of Applied Electronics, CAEP, 1999)
- [6] Bishwanath Chakraborty. Principles of plasma mechanics[M]. Wiley Eastern Limited, 1978. 343.
- [7] 徐士良. FORTRAN 常用算法程序集[M]. 北京: 清华大学出版社, 1995. (Xu S L. Program library of commorrused arithmetic in FORTRAN. Beijing: Tsinghua University Press, 1995)

Hydrodynamic theory of the interaction in radial transit-time oscillator

JIA Yur-feng, LIU Yong-gui

(College of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: By employing hydrodynamic theory, the interaction between the electron beam and the high-frequency field in the radial gap of the radial transit-time oscillator is studied. By using numerical method, curves are given to illustrate the relation between the beam-field power exchange and the gap's transit angle. It shows that the cruuent density and the energy exchange will be oscillating with the transit angle increasing. The number density of beam is bigger, the energy exchange between the beam and the field is stronger. The results obtained from hydrodynamic theory are of more generality compared with those from single electron theory.

Key words: High power microwave source; Transit-time effect; Radial transit-time oscillator; Hydrodynamic theory