文章编号:1671-5497(2006)06-0924-05

# 基于 LMI 的具有输入时滞不确定系统 鲁棒控制器的设计

张 涛,李元春

(吉林大学 通信工程学院, 长春 130022)

摘 要:研究了具有固定输入时滞不确定系统的鲁棒镇定问题,并针对现有的还原算法设计出来的鲁棒控制器复杂且难实现的缺点,给出了一种改进的还原方法,得到了一个通过求解线性矩阵不等式(LMI)来获得鲁棒稳定化控制器的设计方法,设计出的控制器计算简单且易实现。数值算例及仿真结果表明了算法的有效性和优越性。

关键词:自动控制技术;输入时滞;还原方法;鲁棒控制器;不确定系统

中图分类号:TP273 文献标识码:A

# Robust controller design for uncertain systems with input delay based on LMI approach

Zhang Tao, Li Yuan-chun

(College of Communication Engineering, Jilin University, Changchun 130022, China)

**Abstract:** The robust stabilization of uncertain systems with constant input delay was discussed to obtain an improved reduction method and controller design scheme for the systems based on LMI approach since the existing reduction methods were often complex and difficult to implement for the robust controller design. The designed robust controller by using this proposed method proved to be simple and easy to realize. Simulation results and numerical examples demonstrate the effectiveness and superiority of the method.

Key words; automatic control technology; input delay; reduction method; robust controller; uncertain systems

目前,对时滞系统的鲁棒镇定问题研究已经取得了很大的进展,但是现有的大多数文献都是针对具有状态时滞的不确定系统研究的,专门研究具有输入时滞不确定系统的却很少<sup>[1,2]</sup>。Kwon和 Pearson<sup>[3]</sup>提出的还原方法(Reduction Method)可通过适当的状态变换,将输入时滞系统转化为无时滞的普通系统,利用还原方法,设计出的控制器与无记忆控制器不同,包含有过去的控制输入。

但还原方法必须在精确知道系统模型的前提下才能完全简化为无时滞系统。因此,如何在系统具有不确定性的情况下利用好还原方法是一个难点。Moon等<sup>[4]</sup>提出了针对具有固定输入时滞的不确定系统的鲁棒控制器的设计,但得出的结果中含有指数函数,所以计算复杂,不易实现;Yue Dong<sup>[5,6]</sup>将还原方法扩展应用到在一定区域内的未知固定输入时滞的不确定系统和具有时变时滞

收稿日期:2005-08-29.

基金项目: "863" 国家高技术研究发展计划项目(2003 AA735084).

作者简介:张涛(1977 - ),男,博士.研究方向:时滯系统的控制. E-mail:ztcyq@ email. jlu. edu. cn

通讯联系人:李元春(1962 - ),男,教授,博士生导师. 研究方向:智能机械及机器人控制研究.

E-mail: liyc@ email. jlu. edu. cn

的不确定系统中。

另一种针对输入时滞的控制方法的设计就是无记忆控制器<sup>[7-9]</sup>,也就是说控制器反馈的仅是当前的系统状态。其中,文献[7]与文献[8]方法相似,只不过不确定性的表达方式不同,一个用的范数有界表示,一个用的秩-1分解。文献[9]针对固定输入时滞不确定系统,给出了一种控制律的结构形式。虽然这些无记忆时滞独立的控制器便于设计和实现,但当时滞很小时就不可避免地表现出保守性。在实际中,许多系统的时滞是可以测得的,因此,利用状态和过去的控制输入进行反馈的还原方法与无记忆控制器相比具有更好的性能。

作者针对具有输入时滞不确定系统的鲁棒镇定问题,假设输入时滞是已知的固定常数,在文献[4]的基础上采用了一种改进的还原方法,得到了一种通过求解线性矩阵不等式(LMI)来获得鲁棒稳定化控制器的设计方法。所得结果比较简单且易于实现。数值例子及仿真结果表明了算法的有效性和优越性。

# 1 问题的描述

#### 1.1 系统描述

考虑由以下状态方程描述的具有输入时滞的 不确定系统

$$\dot{x}(t) = (\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}(t))x(t) + (\mathbf{B}_0 + \Delta \mathbf{B}_0(t))u(t) + (\mathbf{B}_1 + \Delta \mathbf{B}_1(t))u(t - \tau)$$
(1)

式中: $x(0) = x_0$ ; $u(t) = \phi(t)$ ; $t \in [-h,0]$ ; $x(t) \in R^n$  和  $u(t) \in R^m$  分别为状态变量和控制变量; $x_0 \in R^n$ , $\phi(t) \in C_0$  为初始值;A, $B_0$ , $B_1$  分别为合适维数的固定矩阵; $\Delta A(t)$ , $\Delta B_0(t)$ , $\Delta B_1(t)$ 为时变不确定矩阵且满足

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{A}(t) = \mathbf{D}\mathbf{F}(t)\mathbf{E} \\ \Delta \mathbf{B}_{i}(t) = \mathbf{D}_{i}\mathbf{F}_{i}(t)\mathbf{E}_{i}, i = 0, 1 \end{cases}$$
 (2)

式中:D,E,D<sub>0</sub>,D<sub>1</sub>,E<sub>0</sub>,E<sub>1</sub>为适当维数的常数矩

$$\begin{bmatrix} S & XE^{\mathsf{T}} & Y^{\mathsf{T}}E_0^{\mathsf{T}} & Y^{\mathsf{T}}E_1^{\mathsf{T}} & Y^{\mathsf{T}}B_1^{\mathsf{T}} \\ EX & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0 \\ E_0 Y & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 \\ E_1 Y & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I & 0 \\ B_1 Y & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_4 * \tau^{\mathsf{T}} \\ EB_1 Y & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

阵; $\mathbf{F}(t)$ , $\mathbf{F}_0(t)$ , $\mathbf{F}_1(t)$ 是具有 Lebesgue 可测元的未知矩阵.且满足

 $\| \mathbf{F}(t) \| \le 1, \| \mathbf{F}_i(t) \| \le 1, i = 0,1$  (3)  $\tau$  表示已知的固定的时滞参数。

#### 1.2 还原算法

考虑以下的输入时滞系统

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}_0 u(t) + \mathbf{B}_1 u(t - \tau) \quad (4)$$
具有初值  $x(0) = x_0$  ,  $u(t) = \phi(t)$  ,  $t \in [-h, 0]_0$ 

针对式(4)的输入时滞系统的还原方法是由 Kwon 和 Pearson 在 1980 年提出的。后来 Arstein 将这种方法扩展到具有分布时滞的时变系统中。 该方法的主要内容如下。

利用 x(t) 和  $u(\alpha)$ ,  $\alpha \in [t-\tau,t]$  的一个线性变换 z(t)

$$z(t) = x(t) + \int_{t-\tau}^{t} e^{A(t-s-\tau)} \mathbf{B}_{1} u(s) ds$$
 (5)

代入到式(4)中,则系统变为

$$z(t) = Az(t) + (B_0 + e^{-Ah}B_1)u(t)$$
 (6) 从式(6)可以看出,系统变为一个无时滞的系统。这时的状态反馈控制器  $u(t) = Kz(t)$  变为状态  $x(t)$  和过去的控制量  $u(s)$  , $s \in [t-\tau,t]$  的一个函数。控制器增益  $K$  可以按照无时滞系统的方法进行设计。

如果针对于还原后的系统(6)存在稳定的控制器,则z(t)和u(t)趋于零,所以状态x(t)也趋于零,这也就表明原来的系统是稳定的,反之也是正确的。因而利用还原方法可以通过还原后的系统来获得具有输入时滞系统的稳定的控制。

还原方法的缺点就是它需要精确的模型,这 在实际中往往是不可能的。因此,针对具有输入 时滞的不确定系统设计了鲁棒控制器。

### 2 鲁棒控制器设计

定理 1 假设时滞常数  $\tau$  已知,如果存在正定对称阵 X,矩阵  $Y \in R^{m \times n}$ 以及正数  $\varepsilon_j$   $(j=1,2,\cdots,5)$ 满足下面的 LMI

式中: $S = AX + B_0Y + B_1Y + XA^T + Y^TB_0^T + Y^TB_1^T + \varepsilon_1DD^T + \varepsilon_2D_0D_0^T + \varepsilon_3D_1D_1^T + \varepsilon_4AA^T + \varepsilon_5DD^T$ 。 控制器

$$u(t) = YX^{-1}[x(t) + \int_{t-\tau}^{t} \mathbf{B}_{1}u(s)ds]$$
 (8)

可以使系统(1)渐近稳定。

本文采用的还原方法与文献[4]中的不一样,积分里面没有  $e^{A(t-s-\tau)}$ 的存在,是为了简化计算,否则如文献[4]中的结果一样,会有 $\int_{-\tau}^{t}e^{A^{T}\alpha}\mathbf{E}^{T}\mathbf{E}e^{A\alpha}\mathrm{d}\alpha$ 项出现,且在控制器输出中也会有 $\int_{t-\tau}^{t}e^{A(t-s-\tau)}\mathbf{B}_{1}u(s)\mathrm{d}s$ 项,计算量较大,且控制器不易实现。

以下介绍的不等式是本文证明中要用到的。 引理 1<sup>[4]</sup>

$$(\int_{t-\tau}^{t} x(\alpha) \, \mathrm{d}\alpha)^{\mathrm{T}} (\int_{t-\tau}^{t} x(\alpha) \, \mathrm{d}\alpha) \leq \tau \int_{t-\tau}^{t} x^{\mathrm{T}}(\alpha) x(\alpha) \, \mathrm{d}\alpha$$
 证明 采用以下的状态变换

$$z(t) = x(t) + \int_{t-\tau}^{t} \mathbf{B}_{1} u(s) ds$$
 (9)

设计的鲁棒控制器为u(t) = Kz(t)。

由式(9)和
$$u(t) = Kz(t)$$
可以得到

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + \mathbf{B}_{1}u(t) - \mathbf{B}_{1}u(t-\tau) = 
[\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}(t)]x(t) + [\mathbf{B}_{0}K + \Delta \mathbf{B}_{0}(t)K]z(t) + 
[\mathbf{B}_{1}K + \Delta \mathbf{B}_{1}(t)K]z(t-\tau) + \mathbf{B}_{1}Kz(t) - \mathbf{B}_{1}Kz(t-\tau) = 
[\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}(t)]z(t) + [\mathbf{B}_{0}K + \Delta \mathbf{B}_{0}(t)K + \mathbf{B}_{1}K]z(t) + 
\Delta \mathbf{B}_{1}(t)Kz(t-\tau) - [\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}(t)] \int_{t-\tau}^{t} \mathbf{B}_{1}Kz(s) ds$$
(10)

选择 Lyapunov 泛函如下

$$V(z(t)) = V_1 + V_2 + V_3$$

式中:

$$\begin{split} V_1 &= z^{\mathsf{T}}(t) P z(t) \,, \\ V_2 &= \varepsilon_3^{-1} \int_{t-\tau}^t z^{\mathsf{T}}(s) K^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E}_1^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E}_1 K z(s) \, \mathrm{d}s \,, \\ V_3 &= \int_{t-\tau}^t \int_s^t z^{\mathsf{T}}(v) \big[ \, \varepsilon_4^{-1} \tau K^{\mathsf{T}} \boldsymbol{B}_1^{\mathsf{T}} \boldsymbol{B}_1 K \,+ \\ \varepsilon_5^{-1} \tau K^{\mathsf{T}} \boldsymbol{B}_1^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E} \boldsymbol{B}_1 K \big] z(v) \, \mathrm{d}v \mathrm{d}s \,, \end{split}$$

可以看出存在两个正数  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 > 0$  使下式

成立  $\alpha_1 \| z(t) \|^2 \leq V(z(t)) \leq \alpha_2 \left[ \sup_{t-2\tau \leqslant s \leqslant t} \| z(s) \| \right]^2$ 式中:  $\alpha_1 = \lambda_{\min}(P)$ ;

$$\alpha_{2} = \lambda_{\max} P + \varepsilon_{3}^{-1} \tau \lambda_{\max} (K^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E}_{1}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E}_{1} K) + \tau^{2} \lambda_{\max} (\varepsilon_{4}^{-1} \tau K^{\mathsf{T}} \boldsymbol{B}_{1}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{B}_{1} K + \varepsilon_{5}^{-1} \tau K^{\mathsf{T}} \boldsymbol{B}_{1}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E} \boldsymbol{B}_{1} K)$$
对  $V_{1}$  求导可得

$$\dot{V}_{1} = 2z^{T}(t)P(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}_{0}K + \boldsymbol{B}_{1}K)z(t) + 
2z^{T}(t)P\Delta\boldsymbol{A}z(t) + 2z^{T}(t)P\Delta\boldsymbol{B}_{0}(t)Kz(t) + 
2z^{T}(t)P\Delta\boldsymbol{B}_{1}(t)Kz(t-\tau) - 2z^{T}(t)P[\boldsymbol{A} + 
\Delta\boldsymbol{A}(t)]\int_{t-\tau}^{t} \boldsymbol{B}_{1}Kz(s)ds$$
(11)

利用引理1可得

$$2z^{\mathsf{T}}(t)P\Delta Az(t) = 2z^{\mathsf{T}}(t)PDF(t)Ez(t) \leqslant$$

$$\varepsilon_{1}z^{\mathsf{T}}(t)PDD^{\mathsf{T}}Pz(t) + \varepsilon_{1}^{-1}z^{\mathsf{T}}E^{\mathsf{T}}Ez(t) \qquad (12)$$

$$2z^{\mathsf{T}}(t)P\Delta B_{0}(t)Kz(t) = 2z^{\mathsf{T}}(t)PD_{0}F_{0}(t)E_{0}Kz(t) \leqslant$$

$$\varepsilon_{2}z^{\mathsf{T}}(t)PD_{0}D_{0}^{\mathsf{T}}Pz(t) + \varepsilon_{2}^{-1}z^{\mathsf{T}}(t)K^{\mathsf{T}}E^{\mathsf{T}}E_{0}Kz(t)$$

$$(13)$$

$$2z^{\mathsf{T}}(t)P\Delta \mathbf{B}_{1}(t)Kz(t-\tau) =$$

$$2z^{\mathsf{T}}(t)P\mathbf{D}_{1}\mathbf{F}_{1}(t)\mathbf{E}_{1}Kz(t-\tau) \leq$$

$$\varepsilon_{3}z^{\mathsf{T}}(t)P\mathbf{D}_{1}\mathbf{D}_{1}^{\mathsf{T}}Pz(t) +$$

$$\varepsilon_{3}^{-1}z^{\mathsf{T}}(t-\tau)K^{\mathsf{T}}E_{1}^{\mathsf{T}}\mathbf{E}_{1}Kz(t-\tau)$$
(14)

$$-2z^{\mathsf{T}}(t)PA\int_{t-\tau}^{t} \mathbf{B}_{1}Kz(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \varepsilon_{4}z^{\mathsf{T}}(t)PAA^{\mathsf{T}}Pz(t) +$$

$$\varepsilon_{4}^{-1}\left(\int_{t}^{t} \mathbf{B}_{1}Kz(s)\,\mathrm{d}s\right)^{\mathsf{T}}\left(\int_{t}^{t} \mathbf{B}_{1}Kz(s)\,\mathrm{d}s\right) \leqslant$$

$$\varepsilon_{4}z^{\mathsf{T}}(t)PAA^{\mathsf{T}}Pz(t) + \varepsilon_{4}^{-1}\tau \int_{t-\tau}^{t} z^{\mathsf{T}}(s)K^{\mathsf{T}}\boldsymbol{B}_{1}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{B}_{1}Kz(s)\,\mathrm{d}s$$

$$\tag{15}$$

$$-2z^{\mathsf{T}}(t)P\Delta \mathbf{A} \int_{t-\tau}^{t} \mathbf{B}_{1}Kz(s) \, \mathrm{d}s =$$

$$-2z^{\mathsf{T}}(t)P\mathbf{D}\mathbf{F} \int_{t-\tau}^{t} \mathbf{E}\mathbf{B}_{1}Kz(s) \, \mathrm{d}s \leq$$

$$\varepsilon_{5}z^{\mathsf{T}}(t)P\mathbf{D}\mathbf{D}^{\mathsf{T}}Pz(t) +$$

$$\varepsilon_{5}^{-1} \left( \int_{t-\tau}^{t} \boldsymbol{E} \boldsymbol{B}_{1} K z(s) \, \mathrm{d}s \right)^{\mathrm{T}} \left( \int_{t-\tau}^{t} \boldsymbol{E} \boldsymbol{B}_{1} K z(s) \, \mathrm{d}s \right) \leq \varepsilon_{5} z^{\mathrm{T}} (t) P \boldsymbol{D} \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} P z(t) +$$

$$\varepsilon_{5}^{-1}\tau \int_{t-\tau}^{t} z^{\mathrm{T}}(s) K^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{E} \boldsymbol{B}_{1} K z(s) \, \mathrm{d}s \qquad (16)$$

将式(12)—(16)代入式(11)得

$$\begin{aligned}
V_1 &= z^{\mathsf{T}}(t) \mathbf{\Sigma} z(t) + \boldsymbol{\varepsilon}_3^{-1} z^{\mathsf{T}}(t-\tau) K^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E}_1^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E}_1 K z(t-\tau) + \\
& \boldsymbol{\varepsilon}_4^{-1} \tau \int_{t-\tau}^t z^{\mathsf{T}}(s) K^{\mathsf{T}} \boldsymbol{B}_1^{\mathsf{T}} \boldsymbol{B}_1 K z(s) \, \mathrm{d}s + \\
& \boldsymbol{\varepsilon}_5^{-1} \tau \int_t^t z^{\mathsf{T}}(s) K^{\mathsf{T}} \boldsymbol{B}_1^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E} \boldsymbol{B}_1 K z(s) \, \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

式中:  $\Sigma = P(A + B_0K + B_1K) + (A + B_0K + B_1K)^TP + \varepsilon_1PDD^TP + \varepsilon_1^{-1}E^TE + \varepsilon_2PD_0D_0^TP + \varepsilon_2^{-1}K_0^TE_0^TE_0K + \varepsilon_3PD_1D_1^TP + \varepsilon_4PAA^TP + \varepsilon_5PDD^TP$  对  $V_2$ ,  $V_3$  求导可得

$$\dot{V}_2 = \varepsilon_3^{-1} z^{\mathsf{T}}(t) K^{\mathsf{T}} E_1^{\mathsf{T}} E_1 K z(t) - \\
\varepsilon_3^{-1} z^{\mathsf{T}}(t - \tau) K^{\mathsf{T}} E_1^{\mathsf{T}} E_1 K z(t - \tau)$$

$$\dot{V}_{3} = \tau z^{\mathrm{T}}(t) \left[ \varepsilon_{4}^{-1} \tau K^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{1} K + \varepsilon_{5}^{-1} \tau K^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{E} \boldsymbol{B}_{1} K \right] z(t) -$$

 $\int_{t-\tau}^{t} z^{\mathsf{T}}(s) \left[ \boldsymbol{\varepsilon}_{4}^{-1} \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{K}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{B}_{1}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{B}_{1} \boldsymbol{K} + \boldsymbol{\varepsilon}_{5}^{-1} \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{K}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{B}_{1}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E} \boldsymbol{B}_{1} \boldsymbol{K} \right] z(t) \, \mathrm{d}s$ 所以

$$\begin{split} &\overset{\cdot}{V}(z(t)) = \overset{\cdot}{V_1} + \overset{\cdot}{V_2} + \overset{\cdot}{V_3} \leqslant z^{\mathsf{T}}(t) \boldsymbol{\varPhi} z(t) \\ &\overset{\cdot}{\mathbb{R}} \overset{\cdot}{\mathbf{P}} : \boldsymbol{\varPhi} = P \left( \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{K} + \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{K} \right) + \left( \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{K} + \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{K} \right) + \left( \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{K} + \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{K} \right) \\ &\boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{K} )^{\mathsf{T}} P + \boldsymbol{\varepsilon}_1 P \boldsymbol{D} \boldsymbol{D}^{\mathsf{T}} P + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{-1} \boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E} + \boldsymbol{\varepsilon}_1 P \boldsymbol{D}_0 \boldsymbol{D}_0^{\mathsf{T}} P + \\ &\boldsymbol{\varepsilon}_2^{-1} \boldsymbol{K}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E}_0^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E}_0 \boldsymbol{K} + \boldsymbol{\varepsilon}_3 P \boldsymbol{D}_1 \boldsymbol{D}_1^{\mathsf{T}} P + \boldsymbol{\varepsilon}_4 P \boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} P + \\ &\boldsymbol{\varepsilon}_5 P \boldsymbol{D} \boldsymbol{D}^{\mathsf{T}} P + \boldsymbol{\varepsilon}_3^{-1} \boldsymbol{K}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E}_1^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{K} + \boldsymbol{\varepsilon}_4^{-1} \boldsymbol{\tau}^2 \boldsymbol{K}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{B}_1^{\mathsf{T}} \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{K} + \\ &\boldsymbol{\varepsilon}_5^{-1} \boldsymbol{\tau}^2 \boldsymbol{K}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{B}_1^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{E} \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{K} \end{split}$$

$$V(z(t)) \leq z^{\mathsf{T}}(t)X^{-1}\Theta X^{-1}z(t)$$

$$\not\exists : \Theta = AX + B_0Y + B_1Y + XA^{\mathsf{T}} + Y^{\mathsf{T}}B_0^{\mathsf{T}} + Y^{\mathsf{T}}B_1^{\mathsf{T}} + \varepsilon_1 DD^{\mathsf{T}} + \varepsilon_1 XE^{\mathsf{T}}EX + \varepsilon_2 D_0 D_0^{\mathsf{T}} + \varepsilon_2^{-1}Y^{\mathsf{T}}E_0^{\mathsf{T}}E_0Y + \varepsilon_3 D_1 D_1^{\mathsf{T}} + \varepsilon_4 AA^{\mathsf{T}} + \varepsilon_5 DD^{\mathsf{T}} + \varepsilon_3^{-1}Y^{\mathsf{T}}E_1^{\mathsf{T}}E_1Y + \varepsilon_4^{-1}\tau^2 Y^{\mathsf{T}}B_1^{\mathsf{T}}B_1Y + \varepsilon_5^{-1}\tau^2 Y^{\mathsf{T}}B_1^{\mathsf{T}}E^{\mathsf{T}}EB_1Y_0$$

当且仅当  $\Theta$  < 0 时, V 是负定的。由 Schur 补定理可知  $\Theta$  < 0 的充分必要条件是式(7)成立。所以当式(7)成立时

$$V(z(t)) \le -\beta \| z(t) \|^2$$
  
式中: $\beta = \lambda_{\min} (-X^{-1}\Theta X^{-1})_{\circ}$ 

由文献 [10] 中的 2. 2. 1 节的 Lyapunov-Krasovskii 定理可以证明系统的渐近稳定性。

# 3 数值仿真

**算例1** 考虑如下的具有输入时滞的不确定系统,其中仅状态具有不确定性

$$x(t) = (A + \Delta A)x(t) + B_1 u(t - 0.2)$$
(17)

$$\vec{x} : \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.25 & -3 \end{bmatrix}; \Delta \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \end{bmatrix}; |v| \leq \rho;$$

$$\mathbf{B}_{1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\circ}$$

这里可以将不确定矩阵  $\Delta A$  表示为

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{E} = \rho \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \| \boldsymbol{F}(t) \| \leq 1 \ (18)$$

将式(18)代入到定理1中的式(7),可得

$$\begin{bmatrix} S_1 & \boldsymbol{X}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{E}\boldsymbol{X} & -\delta\boldsymbol{\varepsilon}_1 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{Y} & 0 & -\boldsymbol{\varepsilon}_2*\boldsymbol{\tau}^{-2} & 0 \\ \boldsymbol{E}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{Y} & 0 & 0 & -\delta\boldsymbol{\varepsilon}_3*\boldsymbol{\tau}^{-2} \end{bmatrix} < 0$$

$$\mathbb{R} + \mathbf{S}_1 = \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{B}_0 \mathbf{Y} + \mathbf{B}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{X} \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Y}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}_0^{\mathrm{T}} + \mathbf{Y}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}$$

$$+ \varepsilon_1 DD^{\mathrm{T}} + \varepsilon_2 AA^{\mathrm{T}} + \varepsilon_3 DD^{\mathrm{T}}; \delta = 1/\rho^2$$

这样,问题就可以转化为 LMI 中的具有线性 矩阵不等式约束的一个线性目标函数的最小化问 题

$$\begin{cases} \min \delta \\ \text{s. t. } X > 0, Y, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_3 > 0, \\ \delta > 0 \text{ and } (19) \end{cases}$$

可以用 LMI 中的求解器 mincx 求解。从而可以求出 $\rho$ 的最大值。利用上述方法求出的 $\rho$ 的最大值为49.0216,大于文献[4,5]中给出的最大允许值。

文献[4]中给出的是: 当 $\rho$  = 10, 控制器增益为[-551.63-137.19], 文献[5]中给出的是[-38.1176-9.7023]。而本文计算得出的稳定的控制器为u(t) = [-0.2488-0.0967]z(t),从中可以看出,作者设计的鲁棒控制器的反馈增益要小于以上两篇文献中的增益。图 1 和图 2 分别为应用鲁棒控制器后闭环系统的状态曲线及控制器的输出。从仿真曲线中也可看出设计的鲁棒控制器可以使系统渐近稳定。

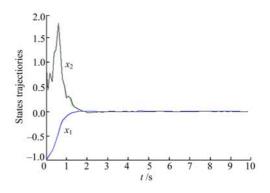


图1 闭环系统状态曲线

Fig. 1 State trajectories of closed-loop system

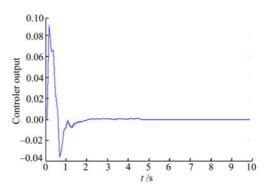


图 2 鲁棒控制器输出曲线

**Fig. 2** Output trajectories of robust controller **算例 2** 考虑如下的具有输入时滞的不确定

系统

$$\dot{x}(t) = (\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}(t))x(t) + (\mathbf{B}_0 + \Delta \mathbf{B}_0(t))u(t) + (\mathbf{B}_1 + \Delta \mathbf{B}_1(t))u(t-1)$$

$$\vec{x} : \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}_{\circ}$$

表示不确定性的矩阵参数如下

$$D = D_0 = D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \end{bmatrix},$$
$$E_0 = E_1 = 0.5$$

作者根据定理 1 可以得到鲁棒控制器的增益 为 K = [-1.9394 -3.1365],与文献 [4] 中的 K = [-3.52 -234.31] 相比小了很多。图 3 和图 4 分别为应用鲁棒控制器后闭环系统的状态曲线及控制器的输出。从仿真曲线中也可看出设计的鲁棒控制器可以使系统渐近稳定,且动态性能良好。

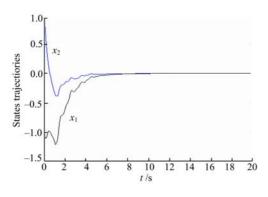


图 3 闭环系统状态曲线

Fig. 3 State trajectories of closed-loop system

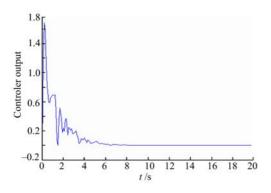


图 4 鲁棒控制器输出曲线

Fig. 4 Output trajectories of robust controller

# 4 结束语

由于采用传统的还原算法,针对具有输入时滞不确定系统设计出的鲁棒控制器不便于实现,

本文给出了一种改进的还原算法,并给出了具有固定输入时滞不确定系统的鲁棒控制器的设计方法。与以前的文章相比,鲁棒控制器更容易设计与实现。通过数值例子和仿真结果证明了本文方法的有效性和优越性。本文仅考虑了时滞参数是固定的情况,在遥操作或者网络控制中,有很多情况下时滞是在一定区间内时变的,如何针对具有区间内时变输入时滞的不确定系统进行鲁棒控制器设计是下一步的研究方向。

#### 参考文献:

- [1] Yokokohji Y, Imaida T, Yoshikawa T. Bilateral teleoperation under time-varying communication delay [C] // 1999 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Kyongju, South Korea: IEEE, 1999: 1854-1859.
- [2] Kim D S, Lee Y S, Kwon W H, et al. Maximum allowable delay bounds of networked systems [J]. Control Engineering Practice, 2003, 11(11); 1301-1313.
- [3] Kwon W H, Pearson A E. Feedback stabilization of linear systems with delayed control [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1980, 25(2); 266-269.
- [4] Moon Y S, Park P G, Kwon W H. Robust stabilization of uncertain input-delayed systems using reduction method [J]. Automatica, 2001, 37(2); 307-312.
- [5] Yue Dong. Robust stabilization of uncertain systems with unknown input delay [J]. Automatica, 2004, 40 (2): 331-336.
- [6] Yue Dong, Han Qing-long. Delayed feedback control of uncertain systems with time-varying input delay [J]. Automatica, 2005, 41(2): 233-240.
- [7] Choi H H, Chung M J. Memoryless stabilization of uncertain dynamic systems with time-varying delayed states and controls [J]. Automatica, 1995, 31 (9): 1349-1351.
- [8] Kim J H, Jeung E T, Park H B. Robust control for parameter uncertain delay systems in state and control input[J]. Automatica, 1996, 32(9): 1337-1339.
- [9] 俞立,褚健. 具有滯后输入的不确定系统的鲁棒控制[J]. 控制理论与应用,1998,15(2):277-280. Yu Li, Chu Jian. Robust stabilization of uncertain systems with delayed input[J]. Control Theory and Applications, 1998, 15(2):277-280.
- [10] Kharitonov V L. Robust stability analysis of time delay systems: a survey [J]. Annual Reviews in Control, 1999, 23: 185-196.