系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
28(2) (2008, 2), 136–143

广义集值隐向量变分不等式问题系统解的存在性与稳定性*

林 志

(重庆交通大学理学院， 重庆 400074)

摘要 介绍了广义集值隐向量变分不等式问题系统，并且通过 Kakutani-Fan-Glicksberg 不动点定理，建立了其解的存在性结果；在此基础上，研究了广义集值隐向量变分不等式问题系统的稳定性，建立了其解集本质连通区的存在性结果.

关键词 广义集值隐向量变分不等式问题， C- 连续， C- 凸， C- 似拟凸，本质连通区.

MR(2000) 主题分类号 47H10, 47H04, 49J40

1 介 绍

设 Y 是一个 Hausdorff 拓扑向量空间， C 是 Y 中的一个锥. 锥 C 是凸的，当且仅当 $C+C=C$, 锥 C 是尖的，当且仅当 $C\cap(-C)=\{\theta\}$, 其中 θ 表示 Y 中的零元素. I 是一个指标集，对任何 $i\in I$, 设 X_i 和 Y_i 是两个 Hausdorff 拓扑向量空间， K_i 是 X_i 中的非空子集， 2^{K_i} 表示 K_i 的所有非空子集的集合， C_i 是 Y_i 中的一个闭凸尖锥，且 $\mathrm{int}C_i\neq\emptyset$, 其中 $\mathrm{int}C_i$ 表示 C_i 的内部. 记 $K_{\widehat{i}}=\prod\limits_{j\in I,\ j\neq i}K_j$, $K=\prod\limits_{i\in I}K_i=K_i\times K_{\widehat{i}}$, $X=\prod\limits_{i\in I}X_i$. 对任何 $x\in K$, 我们可以写成 $x=(x_i,x_{\widehat{i}})$. 任取 $i\in I$, D_i 是从 X_i 到 Y_i 的连续线性算子空间 $L(X_i,Y_i)$ 中的非空子集，用 2^{D_i} 表示 D_i 的所有非空子集的集合. 对任何 $i\in I, F_i: D_i\times K_i\times K_i\mapsto 2^{Y_i}$ 和 $T_i: K\to 2^{D_i}$ 是两个集值映射. 广义集值隐向量变分不等式问题系统 (简称， SGIVIPSVM) 是：寻找 $\overline{x}=(\overline{x}_i,\overline{x}_{\widehat{i}})\in K$ 满足对任何 $i\in I$, $\overline{x}_i\in K_i$, 且

$$\forall\, y_i\in K_i,\quad \exists\overline{u}_i\in T_i(\overline{x}),\quad 使\ F_i(\overline{u}_i,\ \overline{x}_i,y_i)\not\subset-\mathrm{int}C_i.$$

$\overline{x}=(\overline{x}_i,\overline{x}_{\widehat{i}})$ 被称为 SGIVIPSVM 的一个解. 一个 SGIVIPSVM 通常表示为 $\{K_i,D_i,T_i,F_i\}_{i\in I}$(简记为 $\{T,F\}$).

任取 $i\in I$, 如果 $F_i=\varphi_i$ 是一个向量值函数，那么， SGIVIPSVM 简化为广义隐向量变分不等式问题系统，而后者包含广义向量似变分不等式问题系统作为特例，见文 [1], 当然，它也就包含广义向量似变分不等式作为特例.

* 重庆市自然科学基金与重庆交通大学科技基金资助.
收稿日期：2005-08-31.

在本文中，除非特别申明，我们总是假定对任何 $i\in I$, K_i 是拓扑向量空间 X_i 中的一个非空凸紧子集， C_i 是拓扑向量空间 Y_i 中的一个闭凸尖锥，且 $\mathrm{int}C_i\neq\emptyset$.

2　预备知识

在本节中，我们先介绍一些有用的概念和结论.

定义 2.1　假设 X,Y 是两个拓扑空间， K 是 X 中的一个非空凸子集，集值映射 $F:K\mapsto 2^Y$, $x\in K$, 若对任何 Y 中的开集 $G\supset F(x)$, 存在 x 在 K 中的邻域 $U(x)$ 使对任何 $x'\in U(x)$ 有 $F(x')\subset G$, 我们称 F 在 x 处是上半连续的，如果 F 在 K 的每一点均是上半连续的，我们则称 F 在 K 上是上半连续的；若对任何 Y 中的开集 $G\cap F(x)\neq\emptyset$, 存在 x 在 K 中的邻域 $U(x)$ 使对任何 $x'\in U(x)$ 有 $F(x')\cap G\neq\emptyset$, 我们称 F 在 x 处是下半连续的，如果 F 在 K 的每一点均是下半连续的，我们则称 F 在 K 上是下半连续的；若 F 在 x 处既是下半连续的又是上半连续的，我们称 F 在 x 处是连续的；如果 F 在 X 的每一点均是连续的，我们则称 F 在 X 上是连续的.

定义 2.2　假设 X 和 Y 是两个拓扑向量空间，K 是 X 中的一个非空凸子集. $F:K\mapsto 2^Y$ 是一个集值映射.

1)　F 被称为在 $x_0\in K$ 处是上半 C- 连续的，只要对 Y 中零元 θ 的任何开邻域 V, 存在 x_0 在 K 中的开邻域 U, 满足：对任何 $x\in U$, $F(x)\subset F(x_0)+V+C$; F 被称为在 K 上是上半 C- 连续的，只要它在 K 中每一点是上半 C- 连续的；

2)　F 被称为在 $x_0\in K$ 处是下半 C- 连续的，只要对 Y 中零元 θ 的任何开邻域 V, 存在 x_0 在 K 中的开邻域 U, 满足：对任何 $x\in U$, $F(x)\cap(F(x_0)+V+C)\neq\emptyset$; F 被称为在 K 上是下半 C- 连续的，只要它在 K 中每一点是下半 C- 连续的；

3)　F 被称为在 $x_0\in K$ 上是 C- 连续的，只要它在 $x_0\in K$ 处既是上半 C- 连续的，又是下半 C- 连续的； F 被称为在 K 上是 C- 连续的，只要它在 K 中的每一点是 C- 连续的.

一般地，在向量拓扑空间中，若集值映射 F 是上半连续 (下半连续、连续) 的，则必是上半 C- 连续 (下半 C- 连续、 C- 连续) 的，反之不然.

引理 2.1 (文 [2] 中的定理 7.1.16) 设 X 与 Y 是两个拓扑空间， Y 紧. 若 F 是一个从 X 到 Y 的闭的集值映射，那么 F 是上半连续的.

引理 2.2 (文 [3] 中的定理 1) 设 K 是 Hausdorff 拓扑空间 X 中的一个仿紧子集， Z 是 Hausdorff 拓扑向量空间 Y 中的一个非空子集， $S,T:K\mapsto 2^Z$ 是两个集值映射，满足

1) 对任何 $x\in K$, $\mathrm{co}S(x)\subset T(x)$;

2) 对任何 $y\in Z$, $S^{-1}(y)=\{x\in K:y\in S(x)\}$ 是开的.

那么， T 有一个连续的选择，即存在连续向量值映射 $f:K\mapsto Z$ 使 $f(x)\in T(x)$, $\forall x\in K$.

引理 2.3 (文 [4] 中的引理 1.1) 假设 Y 是一个 Banach 空间， C 是 Y 中的一个闭凸尖锥，且 $\mathrm{int}C\neq\emptyset$. 那么，有 $\mathrm{int}C+C\subset\mathrm{int}C$.

容易验证，引理 2.3 在一般 Hausdorff 拓扑向量空间同样成立.

定义 2.3 假设 X 和 Y 是两个拓扑向量空间，K 是 X 中的一个非空凸子集. $F:K\to 2^Y$ 是一个集值映射.

1)　F 被称为是 C- 凸的，只要对任何 x_1, $x_2\in K$ 及 $t\in[0,1]$, $F(tx_1+(1-t)x_2)\subset[tF(x_1)+(1-t)F(x_2)]-C$; F 被称为是 C- 凹的，只要 $-F$ 是 C- 凸的；

2) F 被称为是 C- 似拟凸的, 只要对任何 $x_1, x_2 \in K$ 及 $t \in [0,1]$, 或者 $F(tx_1+(1-t)x_2) \in F(x_1) - C$, 或者 $F(tx_1+(1-t)x_2) \in F(x_2) - C$; F 被称为是 C- 似拟凹的, 只要 $-F$ 是 C- 似拟凸的.

特别地, 如果 $Y = R$, $C = R_+ = [0, +\infty)$, 那么, C- 凸与 C- 似拟凸分别等价于凸与拟凸, 但一般来说, C- 凸不能推出 C- 似拟凸.

3 解的存在性

在这一节中, 假定对任何 $i \in I$, X_i 是一个局部凸的拓扑向量空间.

引理 3.1 若 D, W, X 是三个 Hausdorff 拓扑空间, Z 是拓扑向量空间, C 是 Z 中的闭凸尖锥, $T: W \times X \mapsto 2^D$ 是一个集值映射, $F: D \times W \mapsto 2^Z$ 是一个集值映射, $(w,x) \in W \times X$. 假设

1) 集值映射 $T(\cdot,\cdot)$ 在 $W \times X$ 上是上半连续的, 且具有紧值;

2) 集值映射 $F(\cdot,\cdot)$ 在 $D \times W$ 上是上半 $-C-$ 连续的且具有紧值;

3) 对任何 $u \in T(w,x)$, $F(u,w) \subset -\mathrm{int}C$;

那么, 存在 w 的开邻域 $U(w)$ 以及 x 的开邻域 $U(x)$, 当 $w' \in U(w)$, $x' \in U(x)$ 时, $\{F(u,w'): u \in T(w',x')\} \subset -\mathrm{int}C$.

证 对任何 $u \in T(w,x)$, $F(u,w) \subset -\mathrm{int}C$, 于是, 存在 Z 中零元 θ 的开邻域 $V(u)$, 使 $F(u,w)+V(u) \subset -\mathrm{int}C$. 由条件 2) 及引理 2.3, 存在 u 的开邻域 $O(u)$, w 的开邻域 $O_u(w)$, 当 $u' \in O(u)$, $w' \in O_u(w)$ 时, $F(u',w') \subset F(u,w)+V(u)-C \subset -\mathrm{int}C - C \subset -\mathrm{int}C$. 因 $T(w,x)$ 紧, 且 $\bigcup\limits_{u \in T(w,x)} O(u) \supset T(w,x)$, 存在有限个 $u^1, u^2, \cdots, u^M \in T(w,x)$ 使 $\bigcup\limits_{j=1}^{M} O(u^j) \supset T(w,x)$. 取 $O(w) = \bigcap\limits_{j=1}^{M} O_{u^j}(w)$, 很明显, $O(w)$ 是 w 的开邻域. 因此, 当 $w' \in O(w)$ 时, 对任何 $u \in \bigcup\limits_{j=1}^{M} O(u^j)$, 有 $F(u,w') \subset -\mathrm{int}C$. 又因 $T(w,x)$ 在 $W \times X$ 上是上半连续的, 那么, 存在 w 的开邻域 $U(w) \subset O(w)$ 和 x 的开邻域 $U(x)$, 当 $w' \in U(w)$, $x' \in U(x)$ 时, 有 $T(w',x') \subset \bigcup\limits_{j=1}^{M} O(u^j)$. 于是, 当 $w' \in U(w)$, $x' \in U(x)$ 时, $\{F(u,w'): u \in T(w',x')\} \subset \{F(u,w'): u \in \bigcup\limits_{j=1}^{M} O(u^j)\} \subset -\mathrm{int}C$. 证毕.

对广义集值隐向量变分不等式问题系统, 我们得到如下结果.

定理 3.1 考虑 SGIVIPSVM $\{K_i,\ D_i,\ T_i,\ F_i\}_{i \in I}$. 对任何 $i \in I$, 若

1) T_i 在 K 上是上半连续的, 且具紧值;

2) 对任何 $y_i \in K_i$, $F_i(\cdot,\cdot,y_i)$ 在 $D_i \times K_i$ 上是上半 $-C_i$- 连续的且具紧值;

3) 对任何 $x \in K$ 及 $u_i \in T_i(x)$, $F_i(u_i, x_i, \cdot)$ 是 C_i- 凸或 C_i- 似拟凸的;

4) 对任何 $x \in K$ 及 $u_i \in T_i(x)$, $F_i(u_i,\ x_i,\ x_i) \not\subset -\mathrm{int}C_i$, 其中 x_i 是 x 的第 i 个分量;

那么 SGIVIPSVM 必有一个解, 即存在 $\overline{x} = (\overline{x}_i, \overline{x}_{\hat{i}}) \in K$ 满足对任何 $i \in I$,

$$\forall\, y_i \in K_i, \quad \exists\, \overline{u}_i \in T_i(\overline{x}), \quad F_i(\overline{u}_i, \overline{x}_i, y_i) \not\subset -\mathrm{int}C_i.$$

证 对各个 $i \in I$, 定义集值映射 $S_i: K \mapsto 2^{K_i} \cup \{\emptyset\}$ 为 $S_i(x) = \{y_i \in K_i: F_i(u_i,\ x_i,\ y_i) \subset -\mathrm{int}C_i,\ \forall\, u_i \in T_i(x)\}$.

第 1 步　我们证明集合 $J_i=\{x\in K: S_i(x)=\emptyset\}$ 是闭的.

对任何序列 $x^n\in J_i=\{x\in K: S_i(x)=\emptyset\}$, $x^n\to x^0$, 我们有 $\forall y_i\in K_i$, $\exists u_i^n\in T_i(x^n)$, $F_i(u_i^n,x_i^n,\ y_i)\not\subset -\mathrm{int}C_i$. 如果 $x^0\notin J_i$, 那么存在 $z_i^0\in K_i$, 对任何 $u_i\in T_i(x^0)$ 有 $F_i(u_i,\ x_i^0,\ z_i^0)\subset -\mathrm{int}C_i$. 由引理 3.1, 存在 x^0 的开邻域 $U(x^0)$, 当 $x'\in U(x^0)$ 时, $\{F(u,x_i',z_i^0): u\in T(x')\}\subset -\mathrm{int}C$. 于是，存在正整数 N, 当 $n>N$ 时， $x^n\in U(x^0)$, 此时, 我们得到 $F_i(u_i,x^n,z_i^0)\subset -\mathrm{int}C_i$, $\forall u_i\in T_i(x^n)$, 矛盾. 这说明 J_i 是闭的，即 $W_i=\{x\in K: S_i(x)\neq\emptyset\}$ 是开的. 不失一般性，假定 $W_i\neq\emptyset$.

第 2 步　我们证明 $S_i\,|_{W_i}$ 存在连续的选择 $f_i: W_i\mapsto 2^{K_i}$.

由条件 3) 和引理 2.3, 容易验证 $S_i(x)$ 是凸的. 因此，对任何 $x\in W_i$, $S_i(x)$ 非空凸.

对任何 $y_i^0\in S_i(x)$, 我们有 $F_i(u_i,x_i,y_i^0)\subset -\mathrm{int}C_i$, $\forall u_i\in T_i(x)$. 由引理 3.1, 存在 x 的开邻域 $O(x)$, 当 $x'\in O(x)$ 时， $\{F_i(u_i,\ x_i',\ y_i^0): u_i\in T_i(x')\}\subset -\mathrm{int}C_i$, 这说明 $O(x)\subset\{x\in K: y_i^0\in S_i(x)\}$, 即 $\{x\in K: y_i\in S_i(x)\}$ 是开的.

由引理 2.2, $S_i\,|_{W_i}$ 有连续的选择 $f_i: W_i\mapsto 2^{K_i}$.

第 3 步　我们证明广义集值隐向量变分不等式问题系统至少有一个解.

对任何 $i\in I$, 定义集值映射 $H_i: K\mapsto 2^{K_i}$ 如下

$$H_i(x)=\begin{cases} f_i(x), & \text{如果}\quad x\in W_i,\\ K_i, & \text{如果}\quad x\in J_i.\end{cases}$$

容易验证 $H_i(x)$ 也是上半连续的；因此，由 Kakutani-Fan-Glicksberg 不动点定理 (见文 [5]), 集值映射 $H: K\mapsto 2^K$, $H(x)=\prod\limits_{i\in I}H_i(x)$ 有不动点，即存在 $\overline{x}\in H(\overline{x})$. 但条件 4) 推出对任何 $i\in I$, $\overline{x}_i\notin S_i(\overline{x})$, 即对任何 $i\in I$, $\overline{x}_i\neq f_i(\overline{x})$. 因此，对任何 $i\in I,\overline{x}_i\in K_i$, 且 $\forall y_i\in K_i$, $\exists\overline{u}_i\in T_i(\overline{x})$,使$F_i(\overline{u}_i,\ \overline{x},\ y_i)\not\subset -\mathrm{int}C_i$. 证毕.

注 3.1　由定理 3.1, 容易建立广义隐向量变分不等式问题系统、广义向量似变分不等式问题系统以及广义向量似变分不等式解的存在性结论.

4　本质连通区

在本节中，假定 I 是有限集，对任何 $i\in I$, X_i, Y_i 均是 Banach 空间， P_i^1 是 D_i 中的一个非空凸紧子集， P_i^2 是 Y_i 中的一个非空凸紧子集. 由定理 3.1, 我们有下面的结论.

结论　4.1　对任何 $i\in I$, 设 $T_i: K\mapsto 2^{P_i^1}$, $F_i: K\times K_i\mapsto 2^{P_i^2}$ 是两个集值映射，若

1)　T_i 在 K 上是上半连续的，且具紧值；

2)　对任何 $y_i\in K_i, F_i(\cdot,\cdot,\ y_i)$ 在 $D_i\times K_i$ 上是上半 $-C_i-$ 连续的且具紧值；

3)　对任何 $x\in K$ 及 $u_i\in T_i(x)$, $F_i(u_i,x_i,\cdot)$ 是 C_i- 凸的；

4)　对任何 $x\in K$ 及 $u_i\in T_i(x)$, $\theta_i\in F_i(u_i,x_i,x_i)$, 其中 x_i 是 x 的第 i 个分量；

那么 SGIVIPSVM$\{T,F\}$ 必有一个解，即存在 $\overline{x}=(\overline{x}_i,\overline{x}_{\hat{i}})\in K$ 满足对任何 $i\in I$, $\forall y_i\in K_i$, $\exists\overline{u}_i\in T_i(\overline{x})$, 　$F_i(\overline{u}_i,\ \overline{x}_i,\ y_i)\not\subset -\mathrm{int}C_i$.

用 M 表示所有满足结论 4.1 条件的广义集值隐向量变分不等式问题系统全体. 对任何 $q^1,\ q^2\in M, q^1=\{T^1,\ F^1\}$, $q^2=\{T^2,\ F^2\}$, 定义

$$\rho(q^1,q^2)=\sup_{i\in I}\sup_{(u_i,x,y_i)\in D_i\times K\times K_i}[h_i(F_i^1(u_i,x_i,y_i),F_i^2(u_i,x_i,y_i))+h_i^D(T_i^1(x),T_i^2(x))],$$

其中 h_i 是定义在 Y_i 上的 Hausdorff 距离，h_i^D 是定义在 D_i 上的 Hausdorff 距离. 容易验证：ρ 是定义在 M 的一个距离.

对任何 $q\in M$, 点 $x\in S(q)$ 的连通区是 $S(q)$ 中包含 x 的所有连通子集的并. 注意:连通区是 $S(q)$ 的连通的闭子集 (见文 [6]), 因此也是一个连通的紧子集. 很清楚，$S(q)$ 中不同点的连通区或者是相同的, 或者不相交, 这样 $S(q)$ 的所有连通区形成分解：$S(q)=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}S_\alpha$, 其中 Λ 是一个子标集, 并且对任何 $\alpha\in\Lambda, S_\alpha$ 是 $S(q)$ 的非空连通紧子集, 并且有 $\alpha,\ \beta\in\Lambda,\ \alpha\neq\beta,\ S_\alpha\cap S_\beta=\emptyset$.

定义 4.1 若 $q\in M$, Z 是 $S(q)$ 的一个非空闭子集，Z 被称为 $S(q)$ 的一个本质集，只要对任何开集 $O\supset Z$, 存在 $\delta>0$ 满足：对任何 $q'\in M,\ \rho(q,q')<\delta$, 有：$S(q')\cap O\neq\emptyset$. 如果 $S(q)$ 的一个连通区 S_α 是一个本质集，那么 S_α 被称为 $S(q)$ 的一个本质连通区. $S(q)$ 的本质集 Z 被称为是一个极小本质集，只要 Z 是以集合包含为序的本质集族中的一个极小元.

引理 4.1 若 K 是 Banach 空间 X 中的一个非空的凸紧子集，P 是 Banach 空间 Y 中的一个非空的紧子集，C 是 Y 中的闭凸尖锥. 如果 $F:K\to 2^P$ 在点 $x\in K$ 是上半 $-C-$ 连续的，并且 $\lambda:K\to[0,1]$ 在 x 处也连续，那么，对 Y 中零元 θ 的任何开邻域 V, 存在 x 的开邻域 $O(x)$, 只要 $x'\in O(x)$, 就有 $\lambda(x')F(x')\subset\lambda(x)F(x)+V-C$.

证 对任何 Y 中零元 θ 的开邻域 V, 因 F 在 x 处是上半 $-C$ 连续的，那么，存在 x 的开邻域 $U(x)$, 当 $x'\in U(x)$ 时，有 $F(x')\subset F(x)+\frac{1}{2}V-C$, 这推出：对任何 $z'\in F(x')$, 存在 $z\in F(x)$, 当 $x'\in U(x)$ 时，$z'\in z+\frac{1}{2}V-C$. 此时，我们得到 $z'-z\in\frac{1}{2}V-C$, 由此得 $\lambda(x)(z'-z)\in\frac{1}{2}V-C$. 因 $z'\in F(x')\subset P$ 且 P 是紧的，存在 $M>0$ 满足：$\parallel z'\parallel<M$. 又因 $\lambda(x)$ 在 x 处连续, 对任何 $\varepsilon>0, \theta+\varepsilon\subset\frac{1}{2}V$, 存在 x 的开邻域 $O(x)\subset U(x)$, 当 $x'\in O(x)$ 时, 有 $\parallel(\lambda(x')-\lambda(x))z'\parallel\leq\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon$, 即: 当 $x'\in O(x)$ 时, $(\lambda(x')-\lambda(x))z'\in\frac{1}{2}V$. 于是, 当 $x'\in O(x)$ 时, 有 $\lambda(x')z'-\lambda(x)z=\lambda(x')z'-\lambda(x)z'+\lambda(x)z'-\lambda(x)z=(\lambda(x')-\lambda(x))z'+\lambda(x)(z'-z)\in V-C$, 此时，$\lambda(x')F(x')\subset\lambda(x)F(x)+V-C$, 证毕.

引理 4.2 若 A,B 是赋范线性空间 E 中的两个非空凸紧子集，那么 $h(A,\lambda A+\mu B)\leq\mu h(A,B)$, 其中 h 是定义在 E 上的 Hausdorff 距离，$\lambda\geq 0,\ \mu\geq 0$, 且 $\lambda+\mu=1$.

证 如果 $\mu=0$, 那么 $\lambda=1$, 结论显然成立. 下面假定 $\mu>0$.

我们只需证明：对任何 $b>0$, 如果 $h(A,\ B)<b$, 则必有 $h(A,\ \lambda A+\mu B)<\mu b$.

由 $h(A,B)<b$, 存在 $a>0$ 使 $h(A,B)<a<b$. 记 $O(x,a)=\{z\in E:\parallel x-z\parallel<a\}$. 于是 $A\subset\bigcup\limits_{y\in B}O(y,\ a), B\subset\bigcup\limits_{x\in A}O(x,a)$.

对任何 $x\in A$, 存在 $y\in B$ 使 $\parallel x-y\parallel<a$. 因 $\parallel x-(\lambda x+\mu y)\parallel=\mu\parallel x-y\parallel<\mu a$, 则有 $A\subset\bigcup\limits_{z\in\lambda A+\mu B}O(z,\ \mu a)$.

对任何 $z\in\lambda A+\mu B$, 存在 $x\in A,\ y\in B$ 使 $z=\lambda x+\mu y$. 因 $y\in B$, 存在 $x'\in A$ 使 $\parallel x'-y\parallel<a$. 因 A 是凸的，那么 $\overline{x}=\lambda x+\mu x'\in A$ 且 $\parallel z-\overline{x}\parallel=\parallel(\lambda x+\mu y)-(\lambda x+\mu x')\parallel=\mu\parallel x'-y\parallel<\mu a$, 即 $\lambda A+\mu B\subset\bigcup\limits_{x\in A}O(x,\mu a)$.

所以，$h(A,\lambda A+\mu B)\leq\mu a<\mu b$, 证毕.

对任何 $q\in M$, 用 $S(q)$ 表示 q 的解集，那么 S 定义了一个从 M 到 2^K 的集值映射，由结论 4.1 知，$S(q)\neq\emptyset$.

引理 4.3 $S:M\mapsto 2^K$ 是上半连续的且具紧值.

证 因 K 紧，由引理 2.1, 只需证 S 的图 Graph(S) 在 $M\times K$ 中是闭的，Graph$(S)=$

$\{(q,x)\in M\times K: x\in S(q)\}$. 设 $(q^n,\ x^n)$ 是 Graph(S) 中的任意序列，$(q^n,\ x^n)\to(q^0,\ x^0)\in M\times K$, $q^n=\{T^n,\ F^n\}$, $q^0=\{T^0,\ F^0\}$, 于是，$\forall i\in I$, $h_i(F_i^n,\ F_i^0)\to 0$, $h_i^D(T_i^n,\ T_i^0)\to 0$, $(n\to+\infty)$, 且 $\forall y_i\in K_i$, $\exists u_i^n\in T_i(x^n)$, $F_i^n(u_i^n,x_i^n,\ y_i)\not\subset -\mathrm{int}C_i$. 下面证 $x^0\in S(q^0)$.

用反证法. 若 $x^0\notin S(q^0)$, 存在某 $J\in I$ 及 $y_J^0\in K_J$, 对任何 $u_J\in T_J(x^0)$, $F_J^0(u_J,\ x_J^0,\ y_J^0)\subset -\mathrm{int}C_J$, 于是,存在 Y_J 中零元 θ_J 的开邻域 V_J^u 使 $F_J^0(u_J,\ x_J^0,\ y_J^0)+V_J^u\subset-\mathrm{int}C_J$. 因 $F_J^0(\cdot,\cdot,y_J^0)$ 在 $(u_J,\ x^0)$ 处是上半 $-C_i$- 连续的,因此,存在 u_J 的开邻域 $O(u_J)$, x_J^0 的开邻域 $O_u(x_J^0)$, 当 $u'_J\in O(u_J)$, $x'_J\in O_u(x_J^0)$ 时，$F_J^0(u'_J,x'_J,\ y_J^0)\subset F_J^0(u_J,\ x_J^0,\ y_J^0)+V_J^u-C_J\subset-\mathrm{int}C_J-C_J\subset-\mathrm{int}C_J$. 由于 $\bigcup\limits_{u_J\in T_J(x^0)} O(u_J)\supset T_J(x^0)$, 且 $T_J(x^0)$ 紧，存在有限个 $u_J^1,\ u_J^2,\cdots,\ u_J^M$, 使 $\bigcup\limits_{l=1}^{M} O(u_J^l)\supset T_J(x^0)$. 记 $O(x_J^0)=\bigcap\limits_{l=1}^{M} O_u(x_J^0)$, $V_J=\bigcap\limits_{l=1}^{M} V_J^l$, 可知 $O(x_J^0)$ 是 x_J^0 的一个邻域，V_J 是零元 θ_J 的一个邻域, 当 $x'_J\in O(x_J^0)$ 时, 对任何 $u'_J\in\bigcup\limits_{l=1}^{M} O(u_J^l)\supset T_J(x^0)$, 有 $F_J^0(u'_J,x'_J,\ y_J^0)+V_J\subset-\mathrm{int}C_J$. 因 T_J 上半连续，$x^n\to x^0$, 存在正整数 N_1, 当 $n>N_1$ 时，$T_J(x^n)\subset\bigcup\limits_{l=1}^{M} O(u_J^l)$, 且 $x_J^n\in O(x_J^0)$. 此时，对任何 $u_J\in T_J(x^n)$ 有 $F_J^0(u_J,\ x_J^n,y_J^0)+V_J\subset-\mathrm{int}C_J$. 又因 $F_J^n\to F_J^0$, 对上述 V_J, 存在正整数 $N_2>N_1$, 当 $n>N_2$ 时，$F_J^n(u_J,\ x_J^n,\ y_J^0)\subset F_J^0(u_J,\ x_J^n,\ y_J^0)+V_J\subset-\mathrm{int}C_J$, 矛盾. 证毕.

定理 4.1 对任何 $q\in M$, $S(q)$ 至少存在一个本质连通区.

证 首先，我们证明 $S(q)$ 至少有一个极小本质集. 由引理 4.3 知，集值映射 $S: M\to 2^K$ 是上半连续的且具非空紧值. 因此，对任何开集 $G\supset S(q)$, 存在 q 的开邻域 U, 当 $q'\in U$ 时，有 $S(q')\subset G$, 即 $S(q')\cap G\neq\emptyset$. 因此，$S(q)$ 本身就是一个本质集. 用 $\varPhi$ 表示 $S(q)$ 中以集合包含关系为序的本质集族，那么，$\varPhi\neq\emptyset$, $\varPhi$ 中元素的每一个递减的链均有下界，并且由紧性知其交仍然在 $\varPhi$ 中，由 Zorn 引理知，$\varPhi$ 有极小元 A, 它就是 $\varPhi$ 的一个极小本质集. 用 $m(q)$ 表示 $S(q)$ 的某个极小本质集. 下面我们证明 $m(q)$ 是连通的.

假设 $m(q)$ 不连通，那么，存在 $S(q)$ 的两个非空的闭子集 $c_1(q)$ 和 $c_2(q)$, 以及 K 的两个开集 V_1 和 V_2 使：$m(q)=c_1(q)\cup c_2(q)$, $V_1\supset c_1(q)$, $V_2\supset c_2(q)$, 且 $V_1\cap V_2=\emptyset$. 因 $m(q)$ 是 $S(q)$ 的一个极小本质集，那么 $c_1(q)$ 和 $c_2(q)$ 一定不是 $S(q)$ 的本质集. 于是，存在两开集 O_1 和 O_2, $O_1\supset c_1(q)$, $O_2\supset c_2(q)$ 使：对任何 $\delta>0$, 存在 $q^1,\ q^2\in M$, $\rho(q^1,\ q)<\delta$, $\rho(q^2,\ q)<\delta$, $S(q^1)\cap O_1=\emptyset$, $S(q^2)\cap O_2=\emptyset$. 记 $W_1=V_1\cap O_1$, $W_2=V_2\cap O_2$. 可知 W_1 和 W_2 均是开集，且 $W_1\supset c_1(q)$, $W_2\supset c_2(q)$, $W_1\cap W_2=\emptyset$. 因 $c_1(q)$ 和 $c_2(q)$ 都是紧的，存在两个开集 U_1 和 U_2 满足 $c_1(q)\subset U_1\subset\overline{U_1}\subset W_1$, $c_2(q)\subset U_2\subset\overline{U_2}\subset W_2$. 因此，$U_1\cup U_2\supset m(q)$. 注意到 $m(q)$ 是 $S(q)$ 的一个本质集，存在 $\widetilde{\delta}>0$ 满足对 $\widetilde{q}$, $\rho(\widetilde{q},\ q)<\widetilde{\delta}$, 我们有 $S(\widetilde{q})\cap(U_1\cup U_2)\neq\emptyset$. 由 $U_1\subset W_1\subset O_1$, $U_2\subset W_2\subset O_2$, 存在 $p^1,p^2\in M$, $p^1=\{T^1,\ F^1\}$, $p^2=\{T^2,\ F^2\}$, $\rho(p^1,\ q)<\widetilde{\delta}$, $\rho(p^2,\ q)<\widetilde{\delta}$ 使 $S(p^1)\cap U_1=\emptyset$, $S(p^2)\cap U_2=\emptyset$. 现构造 $\widetilde{p}=\{\widetilde{T},\ \widetilde{F}\}$: 对任何 $i\in I$ 及 $(x,\ y_i)\in K\times K_i$, $u_i\in D_i$, $\widetilde{T}_i(x)=\lambda(x)T_i^1(x)+\mu(x)T_i^2(x)=\{\lambda(x)z^1+\mu(x)z^2\mid z^1\in T_i^1(x),\ z^2\in T_i^2(x),\ x\in K\}$, $\widetilde{F}_i(u_i,\ x_i,y_i)=\lambda(x)F_i^1(u_i,x_i,\ y_i)+\mu(x)F_i^2(u_i,\ x_i,\ y_i)=\{\lambda(x)z^1+\mu(x)z^2\mid z^1\in F_i^1(u_i,\ x_i,y_i),\ z^2\in F_i^2(u_i,\ x_i,\ y_i),\ (u_i,\ x_i,\ y_i)\in D_i\times K_i\times K_i\}$, 其中 $\lambda(x)=\frac{d(x,\overline{U}_2)}{d(x,\overline{U}_1)+d(x,\overline{U}_2)}$, $\mu(x)=\frac{d(x,\overline{U}_1)}{d(x,\overline{U}_1)+d(x,\overline{U}_2)}$. 注意，$\lambda(\cdot)$, $\mu(\cdot)$ 是连续的，并且，对任何 $x\in K$, $\lambda(x)\geq 0$, $\mu(x)\geq 0$, $\lambda(x)+\mu(x)=1$. 下面验证 $\widetilde{p}\in M$. 很清楚，对任何 $i\in I$ 及 $(u_i,\ x_i,\ y_i)\in D_i\times K_i\times K_i$, $\widetilde{T}_i(x)$, $\widetilde{F}_i(x,y_i)$ 均是非空紧的. 对任何 $i\in I$, 有：

1) 对任何 $x\in K$, 因 $\theta_i\in F_i^1(u_i,x_i,x_i),\theta_i\in F_i^2(u_i,x_i,x_i)$, 其中 x_i 是 x 的第 i 个分量, 因此, $\theta_i\in\widetilde{F}_i(u_i,x_i,x_i)$;

2) 对任何 $x_i\in K_i,u_i\in D_i$, 因 $F_i^1(u_i,x_i,\cdot)$ 与 $F_i^2(u_i,x_i,\cdot)$ 均是 C_i- 凸的, 容易验证: $\widetilde{F}_i(u_i,x_i,\cdot)=\lambda(x)F_i^1(u_i,x_i,\cdot)+\mu(x)F_i^2(u_i,x_i,\cdot)$ 也是 C_i- 凸的;

3) 对零元 θ_i 的开邻域 V_i, 因 Y_i 是 Banach 空间, 存在 $\varepsilon_i>0$ 使 $\theta_i+2\varepsilon_i\subset V_i$, 其中 $\theta_i+\varepsilon_i=\{z_i\in Y_i\mid d_i(z_i,\theta_i)<\varepsilon_i\}$. 任取 $x\in K$, 由引理 4.1, 对 θ_i 的开邻域 $\theta_i+\varepsilon_i$, 存在 K 中 x 的开邻域 $O(x)$, 当 $x\in O(x)$ 时, 有 $\lambda(x')F_i^1(x',y_i)\subset\lambda(x)F_i^1(x,y_i)+\varepsilon_i-C_i$ 和 $\mu(x')F_i^2(x',y_i)\subset\mu(x)F_i^2(x,y_i)+\varepsilon_i-C_i$. 于是, 当 $x\in O(x)$ 时, 有 $\widetilde{F}_i(x',y_i)=\lambda(x')F_i^1(x',y_i)+\mu(x')F_i^2(x',y_i)\subset\lambda(x)F_i^1(x,y_i)+\mu(x)F_i^2(x,y_i)+2\varepsilon_i-C_i=\widetilde{F}_i(x,y_i)+2\varepsilon_i-C_i\subset\widetilde{F}_i(x,y_i)+V_i-C_i$, 即 $\widetilde{F}_i(\cdot,y_i)$ 在 K 上也是上半 $-C_i$- 连续的;

4) 由文 [2] 中的定理 7.3.15 容易验证 $\widetilde{T}_i$ 在 K 上也是上半连续的. 因此, $\widetilde{p}\in M$.

由引理 4.2, 有

$$\begin{aligned}\rho(q,\widetilde{p})=&\sup_{i\in I}\sup_{(u_i,x,y_i)\in D_i\times K\times K_i}[h_i(F_i(u_i,x_i,y_i),\lambda(x)F_i^1(u_i,x_i,y_i)+\mu(x)F_i^2(u_i,x_i,y_i))\\&+h_i^D(T_i(x),\lambda(x)T_i^1(x)+\mu(x)T_i^2(x))]\\ \le&\sup_{i\in I}\sup_{(u_i,x,y_i)\in D_i\times K\times K_i}[h_i(F_i(u_i,x_i,y_i),\lambda(x)F_i^1(u_i,x_i,y_i)\\&+\mu(x)F_i(u_i,x_i,y_i))+h_i(\lambda(x)F_i^1(u_i,x_i,y_i)\\&+\mu(x)F_i(u_i,x_i,y_i),\lambda(x)F_i^1(u_i,x_i,y_i)+\mu(x)F_i^2(u_i,x_i,y_i))\\&+h_i^D(T_i(x),\lambda(x)T_i^1(x)+\mu(x)T_i(x))+h_i^D(\lambda(x)T_i^1(x)\\&+\mu(x)T_i(x),\lambda(x)T_i^1(x)+\mu(x)T_i^2(x))]\\ \le&\sup_{i\in I}\sup_{(u_i,x,y_i)\in D_i\times K\times K_i}[\lambda(x)h_i(F_i(u_i,x_i,y_i),F_i^1(u_i,x_i,y_i))\\&+\mu(x)h_i(F_i(u_i,x_i,y_i),F_i^2(u_i,x_i,y_i))+\lambda(x)h_i^D(T_i(x),T_i^1(x))\\&+\mu(x)h_i^D(T_i(x),T_i^2(x))]\\ <&\,\widetilde{\delta},\end{aligned}$$

即 $\rho(q,\widetilde{p})<\widetilde{\delta}$. 故 $S(\widetilde{p})\cap(U_1\cup U_2)\neq\emptyset$.

不失一般性, 假定 $S(\widetilde{p})\cap U_1\neq\emptyset$. 那么, 存在 $z\in S(\widetilde{p})\cap U_1$. 由 $z\in U_1$, 得 $\lambda(z)=1$, $\mu(z)=0$, 因此, 对任何 $i\in I$, 有: 对任何 $y_i\in K_i$ 及 $u_i\in D_i$, $\widetilde{T}_i(z)=T_i^1(z)$, $\widetilde{F}_i(u_i,z_i,\ y_i)=F_i^1(u_i,z_i,\ y_i)$. 由 $z\in S(\widetilde{p})$, 得到: 对任何 $i\in I$ 及 $y_i\in K_i$, 存在 $u_i\in T_i(z)$, $\widetilde{F}_i(u_i,\ z_i,\ y_i)\not\subset-\mathrm{int}C_i$. 于是得: 对任何 $i\in I$ 及 $y_i\in K_i$, 存在 $u_i\in T_i^1(z)$, $F_i^1(u_i,\ z_i,\ y_i)\not\subset-\mathrm{int}C_i$, 即 $z\in S(p^1)$. 这推出 $S(p^1)\cap U_1\neq\emptyset$, 矛盾. 所以, $m(q)$ 必是连通的.

由于任何连通集一定被包含在某个连通区中, 假定 $S(q)$ 中的连通区 S_α 包含 $m(q)$, 容易验证 S_α 必是一个本质连通区. 证毕.

注 4.1 由定理 4.1, 可以导出与文 [7] 中定理 4.1 类似的广义向量似变分不等式解集本质连通区结果 (仅仅是定义的距离有点差异); 同样地, 还可以建立广义隐向量变分不等式问题系统以及广义向量似变分不等式问题系统解集本质连通区结果.

参 考 文 献

[1] Ansari Q H, Schaible S and Yao J C. The system of generalized vector equilibrium problems with applications. *Journal of Global Optimization*, 2002, **22**: 3–16.
[2] Klein E and Thompson A C. Theory of Correspondences. John Wiley & Sons, New York, 1984.
[3] Wu X and Shen S K. A further generalization of Yannelis-Prabhakar's continuous selection theorem and its applications. *J. Math. Anal. Appl.*, 1996, **197**: 61–74.
[4] Yang H and Yu J. Essential component of the set of weakly Pareto-Nash equilibrium points. *Applied Mathematics Letters*, 2002, **15**: 553–560.
[5] Aliprantis C D and Border K C. Infinite Dimensional Analysis. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.
[6] Engelking R. General Topology. Heldermann Verlag, Berlin, Germany, 1989.
[7] 杨辉，俞建. 广义向量似变分不等式解集的通有稳定性及本质连通区的存在性. 系统科学与数学，2002, **22**(1): 90–95.

EXISTENCE AND STABILITY OF THE SOLUTIONS FOR THE SYSTEM OF GENERALIZED IMPLICIT VECTOR VARIATIONAL INEQUALITY PROBLEMS WITH SET-VALUED MAP

LIN Zhi

(*College of Science, Chongqing Jiaotong University, Chongqing* 400074)

Abstract　In this paper, the system of generalized implicit vector variational inequality problems with set-valued map is introduced. By Kakutani-Fan-Glicksberg fixed points theorem, the existence result of its solutions is established. Further, the stability and the essential component result of the solution set for the system are given.

Key words　Generalized implicit vector variational inequality problems with set-valued map, C- continuous, C- convex, C- quasiconvex-like, essential component.