

文章编号: 1001-4322(2003)12-1245-04

包含辐射阻尼效应的束流纵向微波不稳定性研究*

葛 军¹, 林郁正¹, 国智元²

(1. 清华大学 工程物理系, 北京 100084; 2. 中国科学院 高能物理研究所, 北京 100039)

摘 要: 包含束团辐射阻尼效应的 Fokker-Planck 方程是比较完备地描述粒子运动状态的束团分布方程。在 Fokker-Planck 方程的基础上采用微扰展开方法对纵向微波不稳定性的发生机制及过程进行了分析, 并且根据计算结果, 研究了辐射阻尼效应对纵向微波不稳定性的影响。在计算中包含了静态的势阱畸变效应。计算结果表明, 包含辐射阻尼效应的纵向微波不稳定性阈值高于没有辐射阻尼效应的不稳定性阈值。

关键词: 纵向微波不稳定性; 辐射阻尼效应; 模式耦合

中图分类号: TL501

文献标识码: A

自从 20 世纪 70 年代初西欧核子中心(CERN)的 F. Sacherer 最早提出了基于 Vlasov 方程解释束流纵向微波不稳定性的模耦合理论^[1]之后, 许多相关的工作都是在这种理论框架下展开的, 如美国 SLAC 的 A. W. Chao 提出的标度定律(Scaling Law)就比较成功地解释了很多环形加速器中流强在阈值以上的束团拉伸规律^[2], 并提出了束团静态分布的水袋模型和双水袋模型。20 世纪 90 年代初日本 KEK 的 K. Oide 和 K. Yokoya 进一步发展了模耦合理论, 提出束流静态分布的势阱畸变效应对束流扰动分布的影响是不可忽略的^[3]。

在电子环形加速器中, 电子在偏转磁铁处受到垂直于运动方向磁场力的作用产生同步辐射, 由此引起的能量损失是不能忽略的, 这就导致了辐射阻尼效应^[4]。从宏观角度看能量辐射是一种连续的过程, 但是从微观角度讲, 所有的电磁辐射都是不连续的, 能量损失是量子化的, 是一个随机过程, 因此会引起电子能量不连续的改变, 必然会扰动电子的轨道及其在束团中的分布, 即电子在相空间的振荡幅度发生变化。量子激发过程伴随着辐射阻尼的现象, 需要包括在束团分布的研究中。

1 包含辐射阻尼效应的束团分布函数方程

从粒子纵向运动方程可以得到束团纵向分布的 Fokker-Planck 方程。在环形加速器中完整的粒子纵向运动方程^[2]是

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{c} \left(\frac{s}{c}\right)^2 z - \frac{2}{c s} + (s) - \frac{eV(z)}{CE_0} \quad (1)$$

$$\frac{dz}{ds} = - \quad (2)$$

式中: γ 是滑移因子; $\gamma = E/E_0$ 是粒子的相对能散; z, s 分别是粒子的相对位移和纵向位置; c 是光速; s 表示同步振荡频率; τ_s 是阻尼时间; C 是周长; (s) 表示同步辐射量子激发过程的随机过程; $V(z)$ 是纵向尾场势。(1)式和(2)式是在小振幅前提下的粒子运动方程, 其中(1)式包含了粒子的辐射阻尼效应、量子激发效应以及尾场的作用。

粒子纵向运动方程是典型的二维 Langevin 方程, 利用 Langevin 方程到 Fokker-Planck 方程的转换公式^[5], 获得粒子纵向运动的 Fokker-Planck 方程为

$$\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial z} + \frac{2}{c^2 z} \frac{\partial}{\partial} - \frac{eV(z)}{CE_0} \frac{\partial}{\partial} = \frac{2}{c s} \frac{\partial(\quad)}{\partial} + D \frac{\partial^2}{\partial^2} \quad (3)$$

式中: f 是纵向运动的束团分布函数; D 为扩散常数, 由粒子量子激发的随机性所产生, 相对于束团分布来说是一种扩散效应。

在相空间中引入极坐标 (r, ϕ) , 则

* 收稿日期: 2003-04-22; 修订日期: 2003-07-01

基金项目: 国防科技基础研究基金资助课题

作者简介: 葛 军(1975-), 男, 博士生, 从事电子储存环束流不稳定性研究; E-mail: gejun98@mails.tsinghua.edu.cn.

$$\begin{cases} z = r \cos \phi \\ \frac{c}{s} = r \sin \phi \end{cases} \quad (4)$$

在不考虑尾场的情况下由粒子的同步辐射阻尼和量子激发效应的共同作用下导致的束流静态分布为双高斯分布,束长和能散由加速器参数、束团阻尼和量子激发共同决定。若考虑尾场作用,则在 z 方向分布还会产生势阱畸变,因此求得

$$\rho_0(z, s) = C \exp(-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}) \exp(-\frac{s^2}{2\sigma_s^2}) \exp(-\frac{r_0}{2C} \int_0^z V(z) dz) \quad (5)$$

式中: C 是归一化常数; σ_z, σ_s 是自然束团长度和自然能散。上式是束流分布与尾场自洽的方程^[6]。根据微扰理论,可以将束团分布函数 $\rho_0(r, \phi, s)$ 分解为静态分布 $\rho_0(r)$ 和扰动分布 $\rho_1(r, \phi)$ 两部分

$$\rho(r, \phi, s) = \rho_0(r) + \rho_1(r, \phi) \exp(-i \frac{s}{c}) \quad (6)$$

对 ρ_1 进行角向傅里叶展开,径向用 Laguerre 多项式展开,即

$$\rho_1(r, \phi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_l(r) e^{il\phi} \quad (7)$$

$$R_l(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^l F_k^l(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^l \sqrt{w(x)} f_k^l(x) \quad (8)$$

$$f_k^l(x) = \frac{\sqrt{k!}}{\sqrt{(l+k)!}} r^{l+l/2} L_k^l(x) \quad (9)$$

式中: $x = r^2 / \sigma_z^2$; $L_k(x)$ 是广义 Laguerre 多项式,我们认为 $F_k^l(x)$ 近似满足正交关系。将(6),(7),(8)式代入(3)式,然后两边乘以 $F_m^l(x)$,对 x 积分,利用函数正交性,整理得到

$$a_m^{(l)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [M_{l,k}^{l,m} + \frac{2i}{s} (\sum_{l=2,l}^{(l-2)} K_{k,m}^{(l-2),l,l,0} + \sum_{l=2,l}^{(l+2)} K_{k,m}^{(l+2),l,l,0}) + (l-i) \frac{2m+l-l}{s} J_{l,l-m,k}] a_k^{(l)} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} K_{k,m}^{(l-2),l,l,0} &= \frac{1}{2} (k + \frac{l-l-2l}{2} - \frac{l-2}{2}) K_{k,m}^{(l-2),l,l,0} - \frac{l-1}{4} (l-2-|l-2|-2k) K_{k,m}^{(l-2),l,l,-1} - \\ &\frac{l-1}{2} \sqrt{k(k+l-2)} K_{k-1,m}^{(l-2),l,l,-1} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} K_{k,m}^{(l+2),l,l,0} &= \frac{1}{2} (k + \frac{l+2l}{2} - \frac{l+2}{2}) K_{k,m}^{(l+2),l,l,0} - \frac{l+1}{4} (l+2+|l+2|+2k) K_{k,m}^{(l+2),l,l,-1} + \\ &\frac{l+1}{2} \sqrt{k(k+l+2)} K_{k-1,m}^{(l+2),l,l,-1} \end{aligned} \quad (12)$$

$$M_{l,k}^{l,m} = -i \frac{2r_0 c}{T_0 s} l_p i^{l-l} \frac{Z_0(\cdot)}{0} \frac{\partial}{\partial x} F_m^{(l)}(x) J_l(\frac{\sqrt{2}}{c} \sqrt{x}) dx \int_0^{\sqrt{2}} F_k^{(l)}(x) J_l(\frac{\sqrt{2}}{c} \sqrt{x}) dx \quad (13)$$

其中: $J_l = \int_0^{\sqrt{2}} F_k^{(l)}(x) F_m^{(l)}(x) dx$,对矩阵方程(10)截取有限项来计算相应的归一化模式频率(无单位),在计算中多项式的收敛性是一个较关键的问题。同时阻抗模型的选取也影响最后的结果。

2 北京正负电子对撞机(BEPC)的纵向微波不稳定性

以 BEPC 为例对纵向微波不稳定性进行计算, BEPC 的束流能散度为 4.1×10^{-4} ,束长为 1.9cm,阻尼时间常数为 25.18ms。计算中采用参考文献[7]中在 BEPC 上测量得到的 8 个谐振子阻抗模型,参数如表 1 所示,阻抗实部和尾场如图 1 所示。

在 $E = 1.5 \text{ GeV}, V_{rf} = 1.8 \text{ MV}$ 的参数下分别对包含阻尼和不包含阻尼的情况进行计算,结果如图 2,图 3 所示。

图 2 和图 3 表示随流强变化的模式振荡频率分布。比较图 2 和图 3,发现当模式频率出现正的虚部

表 1 北京正负电子对撞机阻抗参数

Table 1 Parameters of BEPC impedance model

N	f_n / GHz	$R_n Q_n^{-1} /$	Q_n
1	0.165	197.9	5.10
2	1.770	2826.0	9.00
3	1.580	1816.0	1.25
4	2.050	370.0	9.50
5	3.440	1058.0	2.80
6	4.700	330.0	37.00
7	5.250	290.0	40.00
8	6.750	590.0	4.50

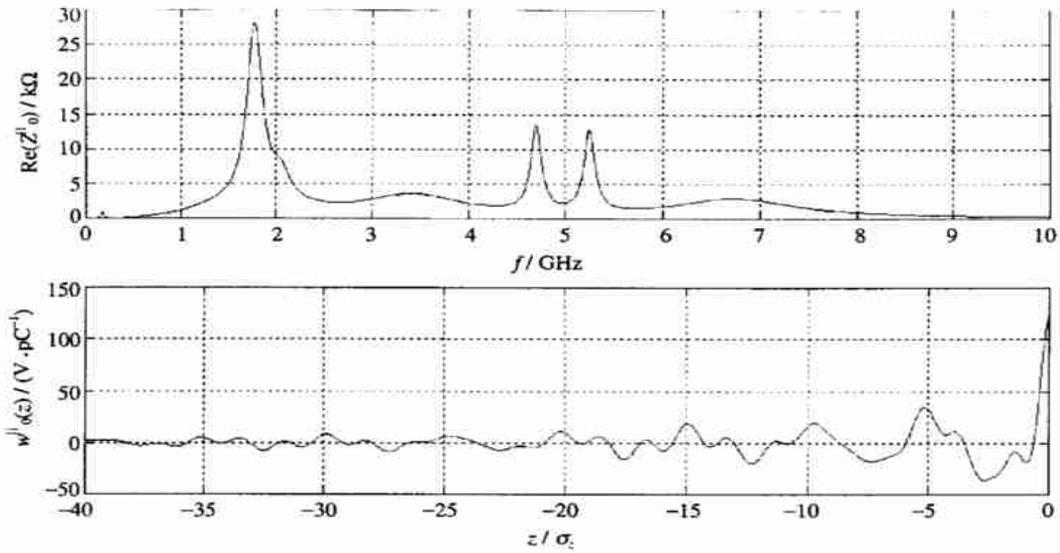


Fig. 1 Real part of the impedance model and the responding wake function

图 1 8 个谐振子阻抗模型的实部及相应的尾场

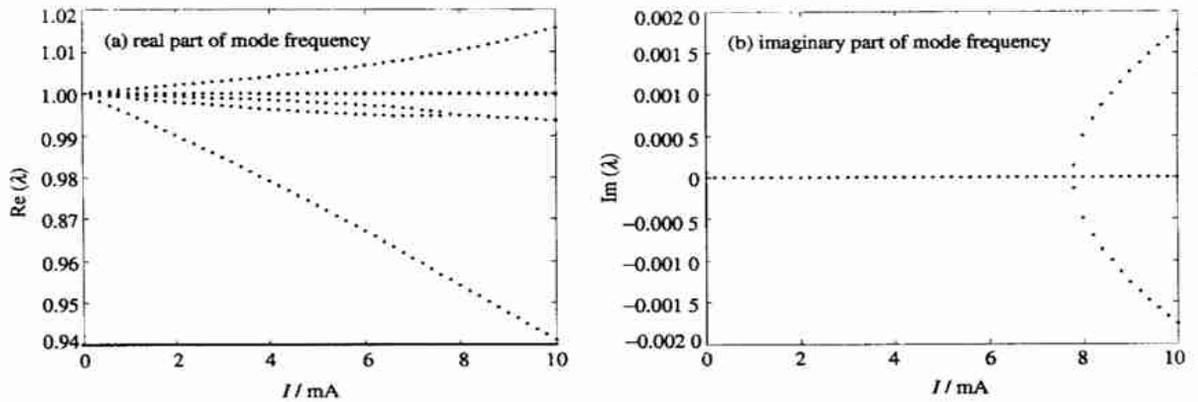


Fig. 2 Mode frequency vs current (synchrotron radiation effect not included), the instability threshold $I_{th} = 7.38\text{mA}$

图 2 不包含阻尼的模式频率分布图, 阈值 $I_{th} = 7.38\text{mA}$

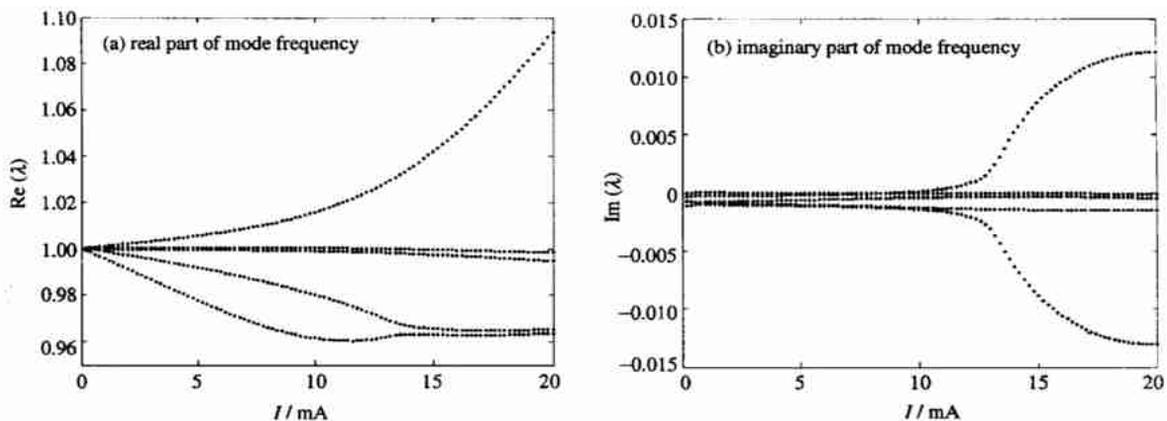


Fig. 3 Mode frequency vs current (synchrotron radiation effect included), the instability threshold $I_{th} = 9.15\text{mA}$

图 3 包含阻尼的模式频率分布图, 阈值 $I_{th} = 9.15\text{mA}$

时发生纵向微波不稳定性,把开始发生不稳定性时的流强大小定义为不稳定性阈值。而且不稳定性都是由于第一个角向模数内的两个径向模耦合引起的,在阈值以上这两个耦合模式的增长率一个为正,一个为负,约为 10^{-3} 量级。在同一个角向模内的所有径向模式频率的实部都是从一个起点开始,即在零流强时,所有模式频率的实部都是同步振荡频率的整数倍。这是因为在零流强时,束团形状没有势阱畸变,为高斯分布,束团整体振荡频率为同步振荡频率,而流强开始增长时,一方面由于势阱畸变效应,另一方面由于不同模式之间的耦合

产生了频移,使不同的径向模开始分裂。包含了势阱畸变效应的不稳定性首先由径向模耦合引起,而且在小流强时就已经发生了不稳定性。相对于角向模引起的不稳定性增长率,这是一种比较弱的不稳定性。

另外我们也发现在不稳定性阈值以下,图 2 中模式频率的虚部为零,而图 3 中模式频率具有负的虚部,而且每一个模式的虚部都不同。这是在分解模式时,每个模式中都存在辐射阻尼效应,即当束团受到扰动而发生振荡时,不同的振荡模式受到不同程度的阻尼作用,阶数越高的模式受到的阻尼作用越大,因此模式振幅随时间减小,从而抑制了扰动引起的振荡。发生不稳定性之后,图 2 中两个模式的频率实部相等,虚部出现一正一负两个模式;图 3 中两个模式的频率实部不再相等,而是逐渐靠近,随着流强的增加到一定程度,两者之间的频率差趋于稳定。除了导致不稳定性的两个模式产生了一正一负的增长率之外,其它模式的虚部基本没有受到大的影响。包含辐射阻尼效应的纵向微波不稳定性阈值(9.15mA)高于不包含辐射阻尼效应的不稳定性阈值(7.38mA),这与我们的经验认识一致。

3 结 论

计算结果表明,辐射阻尼效应对由径向模引起的纵向微波不稳定性起到了阻尼作用,在一定程度上提高了不稳定性的流强阈值。从模式增长率角度看,辐射阻尼率与径向模耦合引起的不稳定性增长率处于同一个量级,这时候阻尼对不稳定性的作用才体现出来。而角向模耦合引起的不稳定性增长率比较大,与阻尼过程相比较而言属于快过程,则阻尼效应在这种情况下对不稳定性阈值的影响基本可以忽略。所以可以认为在研究纵向微波不稳定性时,辐射阻尼效应对于不稳定性的作用在不同情况下是不同的。

参考文献:

- [1] Sachere F. Methods for computing bunched-beam instabilities[R]. CERN/SI/BR/72-5,1972.
- [2] Chao A W. Physics of collective beam instabilities in high energy accelerator[M]. New York: Wiley, 1993.
- [3] Oide K, Yokoya K. Longitudinal single-bunch instability in electron storage rings[R]. KEK Preprint 90-10, 1990.
- [4] Sands M. The Physics of electron storage rings and introduction[R]. SLAC-121, 1979.
- [5] Risken H. Fokker-Planck equation[M]. Berlin: Springer,1989.
- [6] Haissinski J. Exact longitudinal equilibrium distribution of stored electrons in the presence of self-fields[J]. *Nuovo Cimento*. 1973. **18B**:72—82.
- [7] 王光伟. 储存环纵向阻抗的研究[D]. 北京:中科院高能物理研究所,1989. (Wang G W. Measuring the longitudinal impedance of components in the EBPC storage ring. Doctor dissertation. Beijing: Institute of High Energy Physics, the Chinese Academy of Sciences, 1989)

Study of the longitudinal microwave instability including the synchrotron radiation effect

GE Jun¹, LIN Yr Zheng¹, GUO Zhi Yuan²

(1. Department of Engineering Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. Institute of High Energy Physics, the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

Abstract: This paper presents a Fokker-Planck equation to describe the distribution of the particles in bunch, which includes synchrotron radiation damping effect. The subject of longitudinal microwave instability of a single bunched beam in a circular accelerator is studied with perturbation approach based on the Fokker-Planck equation, the potential well distortion effect and the synchrotron radiation damping effect being also included. The result shows that the threshold in the case of radiation damping included is a little higher than that in the case of no damping included.

Key words: Longitudinal microwave instability; Synchrotron radiation damping effect; Mode coupling