

文章编号: 1001-4322(2002)01-0099-04

利用场耦合理论研究微波谐振腔*

李正红¹, 胡克松¹, 张 红², 蔡 林¹, 崔 丽¹

(1. 中国工程物理研究院 应用电子学研究所, 四川 绵阳 621900; 2 中国工程物理研究院 电子工程研究所, 四川 绵阳 621900)

摘 要: 根据 Maxwell 方程, 微波腔中的实际微波场可以按微波腔的模式展开, 从而确定微波腔的工作特性(如: 工作频率、场分布等), 但是实际微波腔的模式很难求解。从 Maxwell 方程出发, 根据微波腔的具体边界, 将微波腔分成: 规则形状微波腔和非规则部分, 建立实际微波腔模式同规则形状微波腔模式之间的场耦合方程, 从而确定微波腔模式的频率和场分布。

关键词: 微波腔; 模式; 场耦合; 圆柱微波腔

中图分类号: TL 503 **文献标识码:** A

在高功率微波(HPM)和驻波加速器的研究中, 微波腔模式(如: 微波场分布、频率等)一直是大家所关心的问题, 微波腔通常是具有复杂形状的圆柱腔; 多年来, 关于微波腔模式的研究一直在进行^[1, 2]。本文从电磁理论(Maxwell 方程)和有关的数学定理出发, 建立了一种新的电磁场计算方法——场耦合理论。理论上, 微波腔中的微波场可以按其模式展开, 但是复杂形状微波腔的模式很难直接进行数学求解, 通过分析微波腔的具体边界, 任何微波腔可以分成: 规则形状微波腔和非规则部分, 规则形状微波腔(如: 圆柱形、球形、方形等)模式的场分布和频率有明确的数学表达式^[3, 4], 如果将微波腔中非规则部分作为激励源, 那么这些模式就是微波腔的模式, 由此可以建立复杂形状微波腔模式同规则形状微波腔模式之间的场耦合方程(即: 用规则形状微波腔模式表述复杂形状微波腔模式), 从而求出复杂形状微波腔的模式(场分布、频率等)。

1 基本理论

根据 Maxwell 方程, 微波腔中的实际微波场可以按微波腔的模式^[5]展开, 即

$$E(r, t) = \sum_{n=1} A_n(t) E_n(r), \quad H(r, t) = \sum_{n=1} B_n(t) H_n(r) \quad (1)$$

式中: $A_n(t)$ 和 $B_n(t)$ 为展开系数, 即

$$A_n(t) = \int_V E(r, t) \cdot E_n(r) dV, \quad B_n(t) = \int_V H(r, t) \cdot H_n(r) dV \quad (2)$$

式中积分遍及微波腔的体积 V , $E_n(r)$ 和 $H_n(r)$ 为微波腔本征模式, 这些模式构成了一个归一化的完全集^[6], 即

$$\int_V E_m(r) \cdot E_n(r) dr = \delta_{m,n}, \quad \int_V H_m(r) \cdot H_n(r) dV = \delta_{m,n} \quad (3)$$

由此, 根据 Maxwell 方程, 可以得到关于展开系数 $A_n(t)$ 和 $B_n(t)$ 的方程, 同时微波腔中电场和磁场是相关的, 由电场可以确定磁场, 因而在这里只讨论关于展开系数 $A_n(t)$ 满足的方程, 该方程为^[7]

$$\frac{d^2 A_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 A_n(t) = - \frac{\omega}{\sqrt{\epsilon\mu}} \int_S (E \times H_n) \cdot ds + \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dt} \int_S (H \times E_n) \cdot ds - \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dt} \int_V J \cdot E_n dV \quad (4)$$

式中: ω_n 是模式 E_n 所对于的本征频率, J 是微波腔中激励源电流密度分布。

不考虑微波腔中激励源电流时, 由式(1), 方程(4)可以表示为

$$\frac{d^2 A_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 A_n(t) = - \frac{\omega}{\sqrt{\epsilon\mu}} \sum_m A_m(t) \int_S (E_m \times H_n) \cdot ds + \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dt} \sum_m B_m(t) \int_S (H_m \times E_n) \cdot ds \quad (5)$$

* 收稿日期: 2001-06-05; 修订日期: 2001-07-28

基金项目: 国家 863 激光技术领域资助课题(863-410-2)

作者简介: 李正红(1968-), 男, 博士, 从事光阴极 RF 腔注入器研究; 绵阳 919-1014 信箱。



稳态情况下, 展开系数 $A_n(t)$ 和 $B_n(t)$ 可以表示为

$$A_n(t) = A_n e^{j(\omega + \varphi_n)t}, \quad B_n(t) = B_n e^{j(\omega + \varphi_n)t} \quad (6)$$

为了研究微波腔的模式, 令 $C_{mn} = c_s (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n) \cdot d\mathbf{s}$, c 为电磁波在真空中的传播速度. 在稳态和无激励源的情况, 方程(5)可以写为

$$c(\omega^2 - \omega'^2)A_n = - \frac{\omega}{\sqrt{\epsilon\mu}} C_{mn}A_n - \frac{j\omega}{\epsilon} C_{mm}B_m \quad (7)$$

同时根据 Maxwell 方程, 稳态情况下, 展开系数 A_n 和 B_n 的关系为

$$B_n = -j\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{\omega}{\omega'} A_n \quad (8)$$

则
$$c(\omega^2 - \omega'^2)A_n + \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} (\omega C_{mn} + \omega_h C_{mm})A_m = 0 \quad (9)$$

真空中 $1/c = \sqrt{\epsilon\mu}$, 则

$$(\omega^2 - \omega'^2)A_n + \sum_m (\omega C_{mn} + \omega_h C_{mm})A_m = 0 \quad (10)$$

在理想边界的微波腔中, 由边界条件 $\mathbf{n} \times \mathbf{W}_n = 0$ 可得: $C_{mn} = 0$, 则方程(10)为

$$(\omega^2 - \omega'^2)A_n = 0 \quad (11)$$

由此可得微波腔中, 稳态时实际微波场为微波腔模式的线性组合, 即

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1} A_n \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) e^{j(\omega_n t + \varphi_n)} \quad (12)$$

式中: A_n 为微波腔模式 \mathbf{E}_n 的幅度; ω_n 为微波腔模式 \mathbf{E}_n 对于的本征频率.

由式(12)可以看出, 微波腔的工作模式是一个或几个模式, 模式对确定微波腔的工作特性很重要.

2 场耦合方程

对于实际微波腔, 由于复杂几何形状, 很难用通常的数学方法求解其本征模式 \mathbf{E}_n 及其频率. 本文根据实际微波腔的具体情况, 将微波腔分为两部分: 规则微波腔部分(如: 圆柱形、球形、方形等)和非规则部分. 由于规则微波腔有明确的模式场分布及其频率, 为此将规则微波腔的模式作为实际微波腔的模式, 非规则部分看作微波腔中的激励源, 由式(11)可得微波腔的场耦合方程为

$$(\omega^2 - \omega'^2)A_n + \sum_m (\omega C_{mn} + \omega_h C_{mm})A_m = 0 \quad (13)$$

式中 $C_{mn} = c_s (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n) \cdot d\mathbf{s}$, 其中 $\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n$ 及 ω_n 为规则微波腔的模式场分布及其频率, $S = S_0 + S_1$ 为实际微波腔表面(S_0 为规则微波腔的表面, S_1 为非规则部分的表面), 则

$$C_{mn} = c_s (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n) \cdot d\mathbf{s} = c_{S_1} (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n) \cdot d\mathbf{s} \quad (14)$$

微波腔的场耦合方程是一个线性方程, 可以表示为矩阵形式, 即

$$\mathbf{M}(\omega) \cdot \mathbf{X} = 0 \quad (15)$$

式中: $\mathbf{M}(\omega)$ 是一个 $N \times N$ 的方矩阵, 其矩阵元 $M_{i,j}$ 为: $M_{i,j} = (\omega^2 - \omega_j^2) \delta_{i,j} + \omega C_{i,j} + \omega C_{j,i}$; 而 \mathbf{X} 是一个 N 维向量, 可以表示为: $\mathbf{X} = (A_1, A_2, \dots, A_N)$.

要想方程(15)有非平凡解, 必须满足

$$\det |\mathbf{M}(\omega)| = 0 \quad (16)$$

由此可确定微波腔的本征频率 ω_i , 方程有 N 个关于微波腔本征频率的解, 即微波腔有 N 个模式, 该模式对应方程(15)的 N 个非平凡解, 即: $\mathbf{X}_i = (A_{1,i}, A_{2,i}, \dots, A_{N,i})$. 由此结合式(12), 可得微波腔模式 \mathbf{E}_i 为

$$\mathbf{E}_i = \sum_{j=1} A_{j,i} \mathbf{E}_j(\mathbf{r}) \quad (17)$$

由此我们得到了由规则微波腔模式 \mathbf{E}_n 表示的实际微波腔本征模式 \mathbf{E}_n 及其相应的频率 ω_n . 在实际

微波腔中, 由于规则微波腔模式有很多, 使得场耦合方程求解很困难; 通过分析场耦合方程可以看出, 不是所有规则微波腔的模式对实际微波腔的工作都有影响; 微波腔通常工作在一个或几个频率上, 只有靠近微波腔工作频率的模式对微波腔的影响较大, 而那些远离工作频率的模式影响很小, 可以忽略。

3 实例分析

图 1 为相对论速调管双重入腔的示意图, 由于重入部分对电磁波的屏蔽, 在电子束的入口和出口处, 微波场近似为 0。不考虑电子束入口和出口处的微波场时, 双重入腔可以等效为图 2 的结构(规则圆柱腔 V_0 和非规则部分 V_1)。

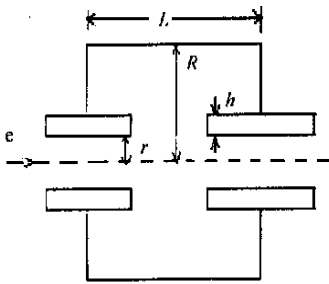


Fig 1 Diagram of relative biventron klystron
图 1 相对论速调管双重入腔的示意图

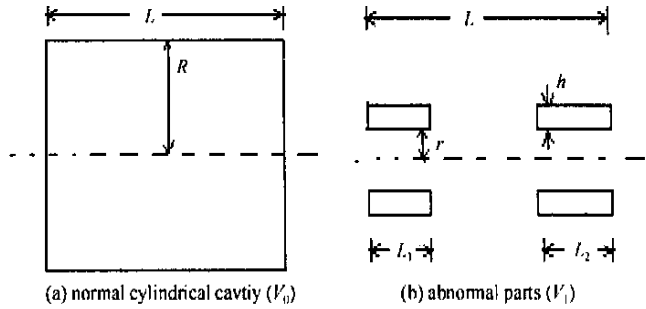


Fig 2 Equivalent structure of biventron cavity
图 2 双重入腔的等效结构

根据电磁学理论, 理想边界的规则圆柱腔 V_0 有明确的模式 (TM_{ijk} 和 TE_{ijk}) 场分布表达式 E_n, H_n 及其频率 ω_n 。将非规则部分 V_1 作为激励源, 以此作为微波腔的模式建立场耦合方程, 可以得到实际微波腔模式的场分布表达式 E_i 和频率 ω_i 。

表 1 为 C 波段 (频率约 5GHz) TM 模式下工作的相对论速调管双重入腔参数^[8]。

表 1 双重入腔参数

Table 1 Parameters of bi-entrant cavity

L/mm	R/mm	r/mm	h/mm	L_1/mm	L_2/mm
4.9	19	2.35	1.05	1.7	1.7

TM 模式下规则圆柱腔 (腔长 L , 半径 R) 的模式 TM_{ijk} 有明确的数学表达式, 在这里用 TM_{ijk} 表示其场分布, 其频率为

$$\omega_{jk} = c \sqrt{\left(\frac{\chi_j^{(i)}}{R}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2} \tag{18}$$

式中: $\chi_j^{(i)}$ 为 i 阶贝塞尔函数 $J_i(\chi_j^{(i)}) = 0$ 第 j 个零点所对应的值。

由此根据微波腔中非规则部分 V_1 的边界, 由式 (14) 可以得到 C_{mn} , 并根据方程 (15)、方程 (16) 和式 (17) 可以得到微波腔各个模式的频率 (表 2) 和场分布。

表 2 微波腔中模式对应的频率

Table 2 Frequency vs the cavity's different modes

mode number	1	2	3	4
frequency/GHz	5.05	8.077	11.163	20.96

微波腔中模式 1 对应的频率 $\omega_1 = 5.05\text{GHz}$, 该模式对应方程 (15) 的非平凡解为

$$X_1 = (0.8, 0.2, -0.02, 0.005, \dots)$$

由此结合式 (17), 可得微波腔该模式的场分布为

$$E_1 = 0.8(E_{TM_{010}}) + 0.2(E_{TM_{011}}) - 0.02(E_{TM_{012}}) + 0.005(E_{TM_{021}})$$

式中: $E_{TM_{ijk}}$ 为规则圆柱腔 ($L = 4.9\text{mm}, R = 19\text{mm}$) 的模式 TM_{ijk} 的场分布。

4 讨论

微波腔中模式 1 频率的计算值低于测量值(5.25GHz),是由于忽略了微波腔重入孔的影响;而且在计算过程中只能考虑有限个模式的影响,计算结果本身就有一定误差。另一方面,这个方法在微波腔研究中介于理论分析和数字计算之间,可以进一步研究非理想边界、微波耦合孔、电子束等对微波腔中微波场的影响。

致 谢 感谢中科院应用电子学研究所五室黄华同志提供的实验数据和有益的指导。

参考文献:

- [1] Chen Y, Mittra R, Ham s P. Finite-difference time-domain algorithm for solving Maxwell's equation in rotationally geometries [J]. *IEEE T rans*, 1996, **44**(6): 832—839.
- [2] Zheng Q, Xie F, Lin W. Solution of three-dimensional Helmholtz equation by multiple theory method[J]. *Electrom agn Waves Appl*, 1999, **13**(3): 339—357.
- [3] 张克潜, 李德杰. 微波与光电子学中的电磁理论[M]. 北京: 电子工业出版社, 1994. 250—300. (Zhang K Q, Li D J. Theory of microwave and photoelectronics. Beijing: Electronic Industrial Press, 1994. 250—300)
- [4] 梁昆森. 数学物理方法[M]. 北京: 人民教育出版社, 1978. 364—413. (Liang K M. Methods of mathematics and physics. Beijing: People's Education Press, 1978. 364—413)
- [5] Slater J C. Microwave electronics[M]. New York: D Van Nostrand, 1950. 57—67.
- [6] 黄宏嘉. 微波原理[M]. 北京: 科学出版社, 1965. 150—200. (Huang H J. Microwave principle. Beijing: Scientific Press, 1965. 150—200)
- [7] 王书鸿, 罗紫华, 罗应雄. 质子直线加速器原理[M]. 北京: 原子能出版社, 1980. 143—163. (Wang S H, Lu Z H, Lu Y X. Principle of proton linac. Beijing: Nuclear Press, 1980. 143—163)
- [8] 朱 敏, 吴鸿适. 速调管双重入式柱形腔的计算[J]. 电子学报, 1987, **4**: 8—15. (Zhu M, Wu H S. Calculation of bi-reentrant cavity's klystron. *Electronic Journal*, 1987, **4**: 8—15)

Investigation of RF cavity by coupling theory

LI Zheng-hong¹, HU Ke-song¹, ZHANG Hong², CA IL in¹, CU IL i¹

(1. Institute of Applied Electronics, CA EP, P. O. Box 919-1014, M ainyang 621900, China;

2. Institute of Electronic Engineering, CA EP, P. O. Box 919-520, M ainyang 621900, China)

Abstract According to Maxwell theory, the RF field in the RF cavity can be expressed by the modes of the cavity. And the characterizes of the cavity is determined by these modes, such as the frequencies and the fields. Because of sophisticated shapes of cavities, it's very difficult to calculate the modes of an actual cavity by using the usual methods. In this paper, an actual RF cavity is divided into two parts: the normal part (such as normal cylindrical cavity) and the abnormal parts. According to Maxwell theory, there exists a coupling equation between the modes of the normal part and the modes of the cavity. In another words, the modes of the cavity can be expressed by the modes of the normal part. And by solving the coupling equation, frequencies and fields of the cavity's modes can be calculated. Utilizing this method, the C-band reentrant cylindrical cavity is calculated, the calculated frequency of the working mode is very close to the measured value.

Key words RF cavity; mode; coupling; cylindrical cavity