

文章编号: 1001-4322(2003)06-0604-05

微波谐振腔中电子与微波作用的非稳态过程研究*

李正红, 胡克松, 孟凡宝

(中国工程物理研究院 应用电子学研究所, 四川 绵阳 621900)

摘要: 在微波腔中微波场影响电子的运动, 同时电子束作为电流源也产生辐射, 影响微波场, 这种相互作用包含线性和非线性过程。根据 Maxwell 理论, 微波腔中的实际微波场可以按微波腔的模式展开, 而且不同模式与电子束之间的相互作用不同。将电子束作为激励源, 根据 Maxwell 方程和电子受到的洛伦兹力, 建立不同模式在电子束作用下的激励方程和电子束电子在不同模式作用下的运动方程(即微波谐振腔中电子束与微波场相互作用的自治方程组), 并由此进一步分析一维情况下单间隙微波腔中微波建场、辐射场呈指数增长和饱和等非稳态作用过程, 该过程涉及到电子束与微波作用的线性和非线性过程。

关键词: 微波腔; 模式; 自治方程; 单间隙微波腔

中图分类号: TN12

文献标识码: A

在高功率微波(HPM)研究中, 电子束与微波腔中微波场相互作用是非稳态过程(如:微波建场、饱和等), 尤其是饱和, 还涉及到微波腔的效率和峰值输出功率, 这是目前人们感兴趣的问题。微波腔中电子束与微波场的相互作用, 和摇摆器中电子束与自由电子激光(FEL)辐射场的相互作用类似^[1], 微波场影响电子的运动, 同时电子束作为电流源也产生辐射, 影响微波场, 它是一个闭环系统。与 FEL 相比, 不同微波腔的微波场不同, 电子束与微波场的相互作用形式也不相同, 但是与在微波场作用下电子束发生群聚, 群聚的电子束反过来影响微波场的自治过程是一致的。

微波腔通常是具有复杂形状的圆柱腔; 而且微波腔本身有很多模式(如:基模, 高阶模), 电子束与微波腔的作用就与这些模式有关。理论上, 微波腔中的微波场可以按其模式展开, 不同模式与电子束之间的相互作用不同, 电子束作为激励源, 在微波腔中激励起不同模式的微波场。反过来, 这些不同模式的微波场也影响电子束电子的运动, 从而影响电子束同微波腔之间的相互作用, 由此根据 Maxwell 方程和电子受到的洛伦兹力, 可以建立不同模式在电子束作用下的激励方程和电子束电子在不同模式作用下的运动方程(即微波谐振腔中电子束同微波场相互作用的自治方程组), 电子束与微波腔之间的相互作用主要决定于微波腔的本征模式和电子束的初始状态, 而微波腔的本征模式可以通过一些理论分析和程序^[2~4](如: SUPPERFISH, MAFIA 等)计算得到, 由此利用分析和数值模拟技术, 可以得到电子束与微波腔之间的非稳态作用过程(包括微波建场、辐射场呈指数增长和饱和等)。

1 微波腔中的微波场

根据 Maxwell 方程, 微波腔中的微波场可以按微波腔的模式^[5], 即

$$E(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1} a_n(t) E_n(\mathbf{r}), \quad B(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1} b_n(t) B_n(\mathbf{r}) \quad (1)$$

展开。式中: $a_n(t)$ 和 $b_n(t)$ 为展开系数

$$a_n(t) = \int_V E(\mathbf{r}, t) \cdot E_n(\mathbf{r}) dV, \quad b_n(t) = \int_V B(\mathbf{r}, t) \cdot B_n(\mathbf{r}) dV \quad (2)$$

积分遍及微波腔的体积 V , 而 $E_n(\mathbf{r})$ 和 $H_n(\mathbf{r})$ 为微波腔本征模式, 这些模式构成了一个归一化的完全集^[6], 即

$$\int_V E_m(\mathbf{r}) \cdot E_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{m,n}, \quad \int_V B_m(\mathbf{r}) \cdot B_n(\mathbf{r}) dV = \delta_{m,n} \quad (3)$$

由此, 根据 Maxwell 方程, 可以得到关于展开系数 $a_n(t)$ 和 $b_n(t)$ 的方程, 同时微波腔中电场和磁场是相关的, 由电场可以确定磁场, 因而在这里只讨论关于展开系数 $a_n(t)$ 满足的方程, 该方程为^[7~9]

* 收稿日期: 2002-11-14; 修订日期: 2003-01-14

基金项目: 国家 863 计划项目资助课题

作者简介: 李正红(1968-), 男, 副研, 1989 年毕业于武汉大学物理系, 博士, 从事光阴极 RF 腔注入器研究; 绵阳 919-1014 信箱。

$$\frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 a_n(t) = - \frac{\omega_n c}{\mu} \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{B}_n) \cdot d\mathbf{S} + c^2 \frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{B} \times \mathbf{E}_n) \cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{dt} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_n dV \quad (4)$$

式中: ω_n 是模式 E_n 所对应的本征频率; \mathbf{J} 是微波腔中激励源电流密度分布。

在这里用微波腔的品质因子表示边界场对微波场的影响,则方程(4)可以表示为

$$\frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 a_n(t) + \frac{\omega_n}{Q_n} \frac{da_n}{dt} = - \frac{1}{dt} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_n dV \quad (5)$$

式中:品质因子 Q_n 包含负载影响,即 $1/Q_n = (1/Q_{0n}) + 1/Q_{ex}^{(n)}$ (Q_{0n} 为微波腔本征品质因子, $Q_{ex}^{(n)}$ 为负载品质因子)。根据 Maxwell 方程,展开系数 a_n 和 b_n 的关系近似为

$$b_n = -j \frac{1}{c} \frac{\omega_n}{n} a_n \quad (6)$$

2 电子运动方程

由式(1),电子在微波腔中的运动方程为

$$\frac{d\mathbf{mv}}{dt} = e \left[\sum_{n=1} a_n(t) \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_0 \right] - e \left[\sum_{n=1} b_n(t) \mathbf{v} \times \mathbf{B}_n(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 \right] + e\mathbf{E}_{sc} \quad (7)$$

式中: $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ 为电子在微波腔中的运动速度; \mathbf{r} 为电子在微波腔中的位矢; \mathbf{E}_0 和 \mathbf{B}_0 为微波腔中的直流电场和磁场; \mathbf{E}_{sc} 为空间电荷场。

由此可以得到微波腔中电子的运动状态,不仅是时间的函数,而且还决定于电子进入微波腔时的初始状态 (t_0, v_0, r_0) , 可以表示为

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, t_0, v_0, r_0), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t, t_0, v_0, r_0) \quad (8)$$

则微波腔中电荷密度分布和电流密度分布为

$$\rho(t, \mathbf{r}) = e \sum_j^{N_e} [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t))], \quad \mathbf{J}(t, \mathbf{r}) = e \sum_j^{N_e} \mathbf{v}_j(t) [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t))] \quad (9)$$

式中: N_e 为 t 时刻微波腔中的电子数。

3 电子束与微波场相互作用的自洽方程

理论上根据电子束的初始状态 (t_0, v_0, r_0) 和微波腔的模式 E_n , 由方程(5)、(7)和(9),可以得到微波腔中微波场的变化和电子束的运动过程,但是无论数值或解析求解该方程组,都很困难。

在微波腔中,由于只有同微波腔模式有关的频率 ω_n 才与电子束作用,而其他频率微波的影响很小,令 $a_n(t) = -j \sum_n(t) e^{j[\omega_n t + \phi_n(t)]}$ (相对于微波场 $a_n(t)$ 随时间的变化, $\sum_n(t)$ 和 $\phi_n(t)$ 均为慢变化量), 由方程(5)可得

$$\frac{\omega_n}{Q_n} + \left[\omega_n^2 - \omega_n^2 - 2 \omega_n \sum_n \right] \sum_n = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_n} JJ_n(t) \sin(\omega_n t + \phi_n) dt \quad (10a)$$

$$2 \sum_n \sum_n + \frac{\omega_n}{Q_n} \sum_n = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_n} JJ_n(t) \sin(\omega_n t + \phi_n) dt \quad (10b)$$

式中: $Q_n = Q_n/\omega_n$; $JJ_n(t) = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{E}}_n d\mathbf{r}$ 。

由上式可以看出, $JJ_n(t)$ 是决定微波腔中微波场变化的关键因素,是时间 t 的函数,和电子束在微波腔中的运动有关,由式(9)可得

$$JJ_n(t) = \frac{e}{k_0} \sum_{j_0} \sum_{i_0=t-T_j}^t \mathbf{v}(t, t_{i_0}, v_{j_0}, r_{k_0}) \mathbf{E}_n[\mathbf{r}(t, t_{i_0}, v_{j_0}, r_{k_0})] \quad (11a)$$

式中: T_j 是第 j 个电子通过微波腔的渡越时间,是电子初始状态 (t_0, v_0, r_0) 和微波场的函数。

由于电子束中的电子数目巨大,为了便于计算处理,可以将电子束等效为由多个微电子团组成,每个微电子团中的电子运动一致,则引入电子密度分布后可得

$$JJ_n(t) = \frac{e}{k_0} \sum_{j_0} \sum_{i_0=t-T_j}^t \mathbf{v}(t, t_{i_0}, v_{j_0}, r_{k_0}) \mathbf{E}_n[\mathbf{r}(t, t_{i_0}, v_{j_0}, r_{k_0})] \rho(t_{i_0}, v_{j_0}, r_{k_0}) \quad (11b)$$

式中: $(t_{i_0}, v_{j_0}, r_{k_0})$ 是电子束进入微波腔时第 j 个微电子团的电荷, $(t_{i_0}, v_{j_0}, r_{k_0})$ 为该微电子团进入微波腔的

初始时间、初始速度和初始位矢。

同理, (11b) 式也可以表示为积分形式

$$JJ_n(t) = \frac{e}{2} \iint_{t-T}^t \rho(t, t_0, v_0, r_0) \cdot E_n[r(t, t_0, v_0, r_0)](t_0, v_0, r_0) v_0 dt_0 dv_0 dr_0 \quad (11c)$$

(t_i, v_j, r_k) 是电子束进入微波腔时的电荷密度分布。

由此根据电子束的初始状态 $\rho(t_0, v_0, r_0)$ 和微波腔的模式 E_n , 根据方程 (7), (10) 和 (11), 即可得到微波腔中微波场的变化和电子束的运动过程, 该方程组为微波谐振腔中电子束与微波场相互作用的自治方程组。

在实际微波腔中, 尽管模式很多, 但不是所有模式对微波腔的工作都有影响, 微波腔通常工作在一个特定的频率上, 而且只有靠近工作频率的模式才有影响, 那些远离工作频率模式的影响很小。适当设计微波腔可以使微波腔的工作频率尽可能远离其他模式频率, 从而降低或消除其影响, 忽略非工作模式的影响, 且 $\omega_n = \omega$ 时, 电子束与微波场相互作用的自治方程为

$$\frac{dn}{dt} - 2 \frac{v_n}{Q_n} n = \frac{1}{2} \int_{t-T}^{t+2T} JJ_n(t) \sin(\omega t + \phi_n) dt \quad (12a)$$

$$n + \frac{1}{Q_n} n = \frac{1}{2} \int_{t-T}^{t+2T} JJ_n(t) \cos(\omega t + \phi_n) dt \quad (12b)$$

$$\frac{d\mathbf{mv}}{dt} = e [\sum_n E_n(r) e^{j(\omega t + \phi_n)} + E_0] + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_n(r) e^{j(\omega t + \phi_n - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/c)} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] + E_{sc} \quad (12c)$$

由 (12) 式可知, 电子束与微波场的作用不仅和微波腔的模式有关, 而且和电子束的初始状态有关。微波腔储能 W 决定于 n , 由式 (3) 可得

$$W = \frac{2}{\omega} n \quad (13)$$

由此根据微波腔负载品质因子 $Q_{ex}^{(n)}$ 可以得到微波腔的输出功率为

$$P_{out} = \frac{2}{\omega} \frac{n^2}{Q_{ex}^{(n)}} \quad (14)$$

3 实例分析(单间隙谐振腔)

尽管根据微波腔的模式和初始状态, 由方程可以得到电子束在微波腔中的运动和微波场的变化过程, 但是该方程组的求解仍然很困难。为了进一步研究电子束与微波场相互作用过程, 尤其是非线性过程, 在这里只考虑一维情况下单间隙谐振腔中电子束与微波场相互作用。

只考虑工作模式 (TM 模) 时, 在作用间隙中微波场分布近似均匀场^[10], 即

$$\begin{aligned} E_z(z) &= E_0, & E_r(z) &= E_\theta(z) = 0, \\ B_z(z) &= B_r(z) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

表 1 C 波段单间隙谐振腔参数
Table 1 C-band cavity's parameters

item	a / cm	b / cm	R / cm	L / cm	Q_{0n}^*	$E_0^* / m^{-3/2}$	f_0^* / GHz
parameter	5	3	1	3	2×10^3	10	4.5

*obtained by SUPERFISH (f_0 frequency)

由于空间电荷场的作用与电子束的初始调制深度有关, 微波场较小, 电子束的分布近似为均匀分布时, 空间电荷场近似为直流场, 对电子束与微波场之间的相互作用影响很小; 微波场较大, 电子束的分布受到微波场的调制时, 微波场大于空间电荷场, 空间电荷场影响仍然很小; 为了进一步简化, 忽略空间电荷场的作用, 则第 j 个电子在微波腔中的运动方程为

$$\frac{d m v_j}{dt} = e E_0 \sin[\omega(t + t_j) + \phi] \quad (16)$$

式中: E_0 和 ϕ 为工作模式的微波幅度和相位; $t + t_j$ 为第 j 个电子进入微波腔的时刻; E_0 由微波腔的具体结构决

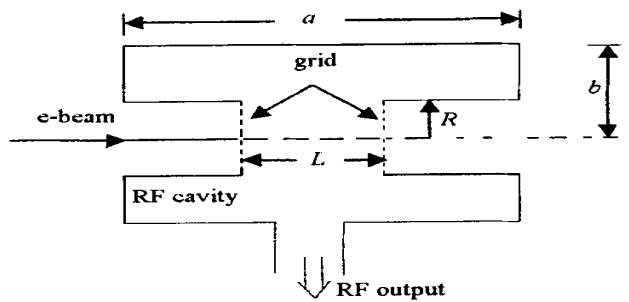


Fig. 1 Setup of single-gap cavity
图 1 单间隙谐振腔示意图

定,根据微波腔中储能和作用区某一点的场强可以得到

$$E_0 = \sqrt{E^2 / W} (m^{-3/2}) \tag{17}$$

式中: W/J 是作用间隙中场强为 $E/(V \cdot m^{-1})$ 时微波腔中的储能。

如果电子束是连续、单能、均匀的,即 $(t, v) = 0 (v - v_0)$, 则

$$JJ_n(t) = \frac{e^2 E_0^2}{m} v_0 [\sin(\omega t + \dots) - \sin(\omega t - T + \dots)] + \frac{e E_0}{m} v_0 T [\cos(\omega t + \dots) - \cos(\omega t - T + \dots)] \tag{18}$$

令 $\tau = \omega t$, 由式(12), (16), (18) 可得

$$\dots - 2 \dots - [\sin \dots - \sin(\dots)] \tag{19a}$$

$$+ \dots / Q \dots [\cos \dots - \cos(\dots)] \tag{19b}$$

$$k^2 L / [v_0 k + E \cos(\dots)] \tag{19c}$$

式中: $\dots = (I / I_A) E_0^2 / k^3 (I = e v_0, I_A = 4 mc^3 / e, k = \omega / c), \dots = T, v_0 = v_0 / c, E = e E_0 / mc^2$ 。

当 $E \ll v_0 k$ 时, kL / v_0 近似为常数, 则

$$\dots(t) = \dots(0) \exp \int_0^t [\cos \dots - \cos(\dots)] - \frac{1}{Q} J dt \tag{20}$$

当 $\dots = \dots$, 且 $\dots > 1/2 Q$ 时, 微波腔的微波起振, 起振时的增益为 $2 - 1/Q$ 。该结论同微波小信号线性理论的结论一致^[11], 同时微波腔起振流强为

$$I_{st} = I_A k^3 v_0 / 2 Q E_0^2 \tag{21}$$

由式(20)可以看出微波腔的微波起振后, 微波增益随时间变化。与起振时的增益不同, 其物理过程是非线性过程, 微波增益不仅决定于微波腔的结构和流强, 还决定于微波场与电子束的作用过程。式(19)描述了一维情况下单间隙微波腔的微波建场、辐射场呈指数增长和饱和等非稳态作用过程, 该过程涉及到电子束同微波作用的线性和非线性过程。图 2 为 $Q = 10, v_0 = 0.9, kL = 0.9$, 当 $I = 1.5 I_{st}, 2.5 I_{st}, 3.5 I_{st}$ 时, 微波腔中场强随时间的变化曲线。由图可以看出: 当束流较小时, 辐射场首先呈指数增长, 然后达到饱和; 而当束流较强时, 辐射场首先呈指数增长, 达到饱和, 然后逐渐下降到一个稳定值, 该值主要决定于腔的结构和电子初始速度, 同束流大小无关。

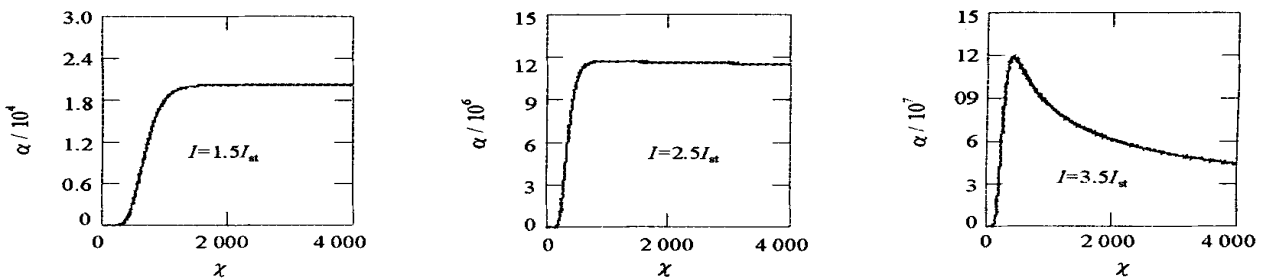


Fig. 2 Curve of field vs time in the cavity

图 2 微波腔中场强 随时间的变化曲线

4 结 论

通过对一维情况下单间隙微波腔的分析, 可以看出电子束与微波腔的相互作用不仅与微波腔的工作模式和场分布有关, 而且还决定于电子束的初始状态; 而微波小信号线性理论只反映微波起振时的物理过程, 并不反映起振后和大信号情况下微波场的变化。由式(19)可以看出, 很难获得微波起振后的非线性物理过程的解析解, 更不用说三维、任意初始分布电子束和任意场分布微波腔的情况, 但是根据微波腔的工作模式、场分布和电子束的初始状态, 通过数值计算求解方程(12), 可以得到相关的参数如效率和峰值功率等。

参考文献:

[1] 惠钟锡, 杨震华. 自由电子激光[M]. 北京: 国防出版社, 1995. (Hui Z X, Yang Z H. Free electron laser[M]. Beijing: Science Press, 1990)

[2] 李正红, 胡青松, 张红. 利用场耦合理论研究微波谐振腔[J]. 强激光与粒子束, 2002, 14 (1): 99. (Li Z H, Hu K S, Zhang H. Investigation of RF cavity by coupling theory. High Power Laser and Particle Beams, 2002, 14 (1): 99)

- [3] Chen Y , Mittra R , Harms P. Finite-difference time-domain algorithm for solving Maxwell 's equation in rotationally geometries[J]. *IEEE Trans* , 1996 , **MTF44**(6) :832 —839.
- [4] Zheng Q , Xie F , Lin W. Solution of three-dimensional Helmholtz equation by multiple theory method[J]. *Electromagn Waves Appl* , 1999 , **13** (3) :339 —357.
- [5] 张克潜,李德杰. 微波与光电子学中的电磁理论[M]. 北京:电子工业出版社,1994. 250 —300. (Zhang K Q ,Li D J. Theory of microwave and photoelectronics. Beijing: Electronic Industrial Press , 1994. 250-300)
- [6] 梁昆森. 数学物理方法[M]. 北京:人民教育出版社,1978. 364 —413. (Liang K M. Methods of mathematics and physics. Beijing: People Educational Press , 1978. 364 —413)
- [7] Slater J C. Microwave electronics[M]. New York: D Van Nostrand , 1950. 57 —67.
- [8] 黄宏嘉. 微波原理[M]. 北京:科学出版社, 1965. 150 —200. (Huang H J. Microwave principle. Beijing: Science Press , 1965. 150 —200)
- [9] 王书鸿,罗紫华,罗应雄. 质子直线加速器原理[M]. 北京:原子能出版社,1980. 143 —163. (Wang S H,Luo Z H , Luo Y X. Principle of proton linac. Beijing: Nuclear Energy Press ,1980. 143 —163)
- [10] 朱敏,吴鸿适. 速调管双重入式柱形腔的计算[J]. 电子学报 ,1987 , 4:8 —15. (Zhu M ,Wu H S. Calculation of bi-entrant cavity 's klystron. *Electronic Journal* ,1987 , **4**:8 —15)
- [11] 吴鸿适. 微波电子学[M]. 北京:科学出版社,1986. (Wu H S. Microwave electronics. Beijing: Science Press , 1986)

Investigation of unstable progress of microwave induced by electron beam in RF cavity

LI Zheng-hong , HU Ke-song , MENG Fair-bao

(*Institute of Applied Electronics , CAEP , P. O. Box 919-1014 , Mianyang 621900 , China*)

Abstract : In RF cavity , the motion of electrons is affected by microwave. And at the same time , the electron can generate radiation and has influence on microwave in the cavity. According to Maxwell theory , the RF field in the RF cavity can be expressed by modes of the cavity , and actions are different between microwave of different modes and electron beam. In thispaper , the self-consistent equations about such actions are established according to Maxwell theory and Lorentz force on electrons. Based on these equations , the single-gap RF cavity is one-dimensionally studied (including how microwave increases and saturates in the cavity) , the curves of microwave field versus time are given for different beam currents. The study shows that nonlinear action is very important and microwave field is only determined by cavity structure and electron velocity when the beam current is high enough.

Key words : RF cavity ; Mode ; Self-consistent equation ; Single-gap RF cavity