

# 用多极理论分析圆柱对称微波谐振腔

郑勤红, 曾 华, 解福瑶

(云南师范大学 物理与电子信息学院, 云南 昆明 650092)

**摘 要:** 用多极理论计算具有复杂几何形状、圆柱对称微波腔的谐振频率, 推导出用多极理论计算圆柱对称微波腔谐振频率的本征值方程。三个工程实例的计算结果表明, 用多极理论计算圆柱对称微波腔谐振频率, 不仅具有较高的计算精度, 而且可以很方便地应用于复杂几何形状圆柱对称微波腔工程问题的设计与计算, 多极理论是计算圆柱对称微波腔谐振频率的一种有效方法。

**关键词:** 多极理论; 圆柱对称微波腔; 谐振频率

**中图分类号:** TN01; TN814 **文献标识码:** A

具有复杂几何形状的圆柱对称微波腔被广泛应用于现代加速器技术中, 这不仅是因为这种金属腔能够将电磁能量限制在有限体积内有利于电子能量交换, 而且在加速器技术中, 通过外源共振模式激励, 可实现腔内粒子的加速或偏转。因此, 几十年来, 有关圆柱对称微波腔谐振频率计算方法的研究一直都在进行<sup>[1~7]</sup>。

文献[8]从电磁理论和有关数学定理出发, 建立了一种新的电磁场计算方法——电磁场分析中的多极理论。从理论上证明: 对于满足多极理论展开条件的三维标量 Helmholtz 方程边值问题, 存在一种无穷级数收敛, 且有一定普遍性的解析解, 推导出三维标量 Helmholtz 方程边值问题的多极理论通解及其使用规则。但文献[8]仅限于研究可直接利用多极理论通解的规则边界下的谐振腔本征值问题, 未能涉及具有复杂几何形状, 且需要进一步作理论推导才能利用多极理论方法进行计算的圆柱对称微波腔本征值问题。据此, 本文提出用多极理论计算具有复杂几何形状的圆柱对称微波腔的谐振频率问题, 给出其计算实施过程, 并通过工程实例计算, 证明这种方法的正确性和有效性。

## 1 理论和方法

无源情况下, 由 Maxwell 方程可推导出真空中时谐电磁场所满足的 Helmholtz 方程为

$$\nabla^2 H + k^2 H = 0 \tag{1}$$

式中  $k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$ 。在球坐标系  $(r, \theta, \phi)$  下, 方程(1)可分解为

$$\nabla^2 H_r - \frac{2H_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta H_\theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} + k^2 H_r = 0 \tag{2a}$$

$$\nabla^2 H_\theta - \frac{H_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} + k^2 H_\theta = 0 \tag{2b}$$

$$\nabla^2 H_\phi - \frac{H_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} + k^2 H_\phi = 0 \tag{2c}$$

由(2)式可见, 对于轴对称模式 ( $\frac{\partial H_r}{\partial \phi} = \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} = \frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} = 0$ ), 场分量  $H_\phi$  与其它场分量 ( $H_r, H_\theta$ ) 是解耦的, 用类似的分析可以证明, 电场强度  $E$  也存在同样情况。所以, 在圆柱对称微波腔中, 存在  $TM_0 (H_\phi, E_r, E_\theta)$ 、 $TE_0 (E_\phi, H_r, H_\theta)$  模式<sup>[1~7]</sup>。另外, 由上述分析和方程(2c)可知, 无论是  $TM_0$  模式还是  $TE_0$  模式均满足

• 收稿日期: 2000-10-23; 修订日期: 2000-12-11  
基金项目: 国家自然科学基金资助课题(19961004); 云南省自然科学基金资助课题(98A027M); 云南省中青年学术和技术带头人培养基金资助课题(2000Y P16)  
作者简介: 郑勤红(1962-), 男, 博士后, 教授, 主要从事电磁理论及应用研究。

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}) - \frac{u}{r^2 \sin^2 \theta} + k^2 u = 0 \quad (3)$$

式中  $u = H_z$  (TM<sub>0</sub> 模式) 或  $u = E_z$  (TE<sub>0</sub> 模式)。

对于三维标量 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 u + k^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + k^2 u = 0 \quad (4)$$

文献[8]推导出了如下形式的多极理论通解

$$u = A_0 j_0(kr_i) + \sum_{l=1}^{N_{ii}} j_l(kr_i) [A_l^i P_l(\cos \theta_i) + \sum_{m=1}^l P_l^m(\cos \theta_i) (A_l^{im} \cos m \phi_i + B_l^{im} \sin m \phi_i)] + \sum_{p=1}^{N_o} \{A_{op} h_0^{[2]}(kr_{op}) + \sum_{l=1}^{N_{op}} h_l^{[2]}(kr_{op}) [A_{op}^l P_l(\cos \theta_{op}) + \sum_{m=1}^l P_l^m(\cos \theta_{op}) (A_{op}^{lm} \cos m \phi_{op} + B_{op}^{lm} \sin m \phi_{op})]\} = \sum_{n=1}^N \alpha_n U_n \quad (5)$$

式中  $j_l(x)$  是第一类球 Bessel 函数;  $h_l^{[2]}(x)$  是第二类球 Hankel 函数;  $P_l^m(x)$  是连带 Legendre 函数;  $r_i = |r - r_{ii}|$ ,  $r$  是场点位置矢量,  $r_{ii}$  是内极的位置矢量;  $N_{ii}$  是内极的个数;  $N_o$  是外极的个数;  $r_{op} = |r - r_{op}|$ ,  $r_{op}$  是第  $p$  个外极的位置矢量;  $N_{op}$  是第  $p$  个外极的个数;  $N$  是总的级数项数。

将式(5)代入方程(3)可知, 满足方程(3)的多极理论通解为

$$u = \sum_{n=1}^{N_{ii}} A_{in} j_n(kr_i) P_n^1(\cos \theta_i) + \sum_{p=1}^{N_o} \sum_{n=1}^{N_{op}} A_{opn} h_n^{[2]}(kr_{op}) P_n^1(\cos \theta_{op}) = \sum_{m=1}^M \alpha_m U_m \quad (6)$$

因此, 式(6)即为圆柱对称微波腔中 TM<sub>0</sub>、TE<sub>0</sub> 模式的多极理论通解。

设有下列轴对称定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u + k^2 u = 0, & r, \theta \in \Omega \\ u|_{\Gamma_1} = q(r, \theta), & r, \theta \in \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = g(r, \theta), & r, \theta \in \Gamma_2, \quad \Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma \end{cases} \quad (7)$$

其多极理论解与(6)式相同, 即

$$u = \sum_{m=1}^M \alpha_m U_m \quad (8)$$

由电磁场的唯一性定理可知, 根据定解问题式(7)中的边界条件, 可确定出式(8)中的所有待定常数  $\alpha_m$ 。在本文中, 采用最小二乘法来确定其待定常数, 即通过使多极理论解与给定边界值之间误差的平方沿边界积分最小来确定式(8)中的待定常数, 所以其目标函数为

$$E_{rr} = \int_{\Gamma_1} |u - q|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \left| \frac{\partial u}{\partial n} - g \right|^2 d\Gamma \quad (9)$$

将式(8)代入式(9)可得

$$E_{rr} = \int_{\Gamma_1} \left| \sum_{m=1}^M \alpha_m U_m - q \right|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \left| \sum_{m=1}^M \alpha_m \frac{\partial U_m}{\partial n} - g \right|^2 d\Gamma \quad (10)$$

由  $\frac{dE_{rr}}{d\alpha_j} = 0$  ( $j=1, 2, \dots, M$ ), 可得

$$\sum_{m=1}^M \alpha_m \left[ \int_{\Gamma_1} U_j U_m d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial U_j}{\partial n} \frac{\partial U_m}{\partial n} d\Gamma \right] = \int_{\Gamma_1} q U_j d\Gamma + \int_{\Gamma_2} g \frac{\partial U_j}{\partial n} d\Gamma \quad (11)$$

$$A\alpha = B \quad (12)$$

对于圆柱对称微波腔本征值问题,  $u|_{\Gamma_1} = q = 0$  (TE<sub>0</sub> 模式),  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = g = 0$  (TM<sub>0</sub> 模式), 所以方程(12)变为

$$A\alpha = 0 \tag{13}$$

要想方程(13)有非平凡解, 必须

$$\det|A(k_c)| = 0 \tag{14}$$

由此可确定圆柱对称微波腔的谐振频率  $f_c(k_c)$ 。

## 2 实例分析

例 1<sup>[4]</sup>: 图 1 所示是盘荷波导的结构示意图。图中  $a = 0.0125865\text{m}$ ,  $b = 0.0415718\text{m}$ ,  $d = 0.034987\text{m}$ ,  $\rho_0 = 0.0030861\text{m}$ , 圆心  $p$  点的坐标  $(\rho_p, z_p)$  为  $\rho_p = 0.0146214\text{m}$ ,  $z_p = 0.0176586\text{m}$ 。根据文献[8]中所述多极理论使用规则, 在场域中  $O$  点设置一个次数为 15 的内极, 其多极理论解为

$$u = \sum_{n=1}^{15} A_n j_n(kr) P_n^1(\cos\theta) = \sum_{m=1}^{15} \alpha_m U_m \tag{15}$$

多极理论计算结果, 盘荷波导中  $\text{TM}_{01}$  模 ( $\text{TM}$  场型中的最低模式) 的谐振频率为  $2.829274\text{GHz}$ ; 文献[4]中有限元法计算结果, 谐振频率为  $2.815857\text{GHz}$ ; 实验结果, 其冷测值为  $2.814909\text{GHz}$ , 多极理论计算结果与实测值之间的相对误差为  $0.51\%$ 。

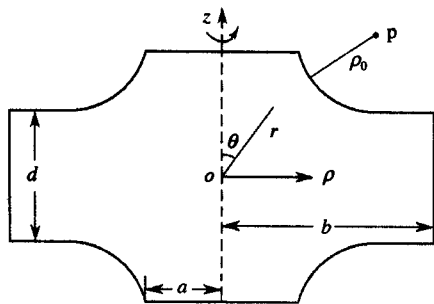


Fig. 1 Disk-loaded waveguide  
图 1 盘荷波导模型

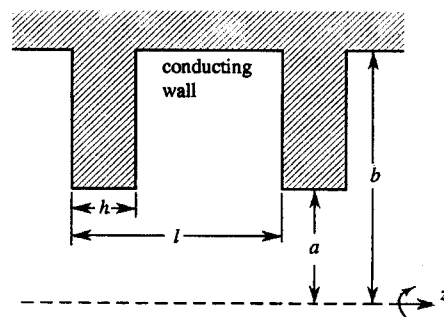


Fig. 2 Axisymmetric cavity in a linear accelerator  
图 2 线性加速器轴对称腔

例 2<sup>[1,2,5]</sup>: 图 2 所示为一线性加速器轴对称腔的结构示意图。图中  $a = 0.0109\text{m}$ ,  $b = 0.0411\text{m}$ ,  $h = 0.0061\text{m}$ ,  $l = 0.0262\text{m}$ , 多极理论计算结果见表 1。为比较多极理论的计算精度, 表 1 中列出了文献[1]、文献[2]的有限元法计算结果和文献[5]的混合边界元法计算结果 ( $\beta_0 l = 0$ )。

表 1 线性加速器轴对称腔的谐振频率 (GHz)

Table 1 Comparison of resonant frequencies (GHz) for axisymmetric cavity in a linear accelerator

modes	MT method	experimental <sup>[2]</sup>	FEM <sup>[1]</sup>	FEM <sup>[2]</sup>	BEM <sup>[5]</sup>
$\text{TM}_{01}$	2.8332	2.836	2.851	2.858	2.836
$\text{TM}_{02}$	6.5401	6.550	6.569	6.685	6.560
$\text{TM}_{03}$	8.2007	—	—	8.222	—
$\text{TE}_{01}$	8.6497	—	8.627	8.793	8.658

表 2 PETRA 加速腔的谐振频率 (GHz)

Table 2 Comparison of resonant frequencies (GHz) in the PETRA accelerating cavity

modes	MT method	FEM <sup>[3]</sup>	IEM <sup>[6]</sup>
$\text{TM}_{0-EE-1}$	0.5156	0.5152	0.5142
$\text{TM}_{0-EE-2}$	1.2381	1.2472	1.2436
$\text{TM}_{0-EM-1}$	0.5159	0.5156	0.5147
$\text{TM}_{0-EM-2}$	1.2562	1.2666	1.2442
$\text{TM}_{0-MM-1}$	0.7568	0.7570	0.7532
$\text{TM}_{0-MM-2}$	1.4476	1.4771	1.4442

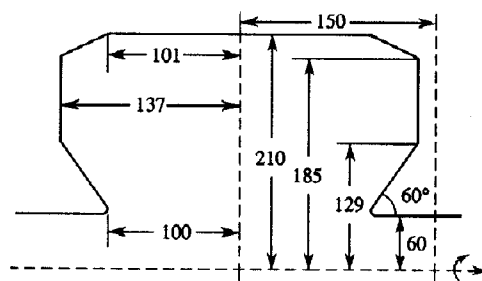


Fig. 3 The PETRA accelerating cavity  
图 3 PETRA 加速腔模型

例 3<sup>[3,6]</sup>:图 3 所示为 PETRA 加速腔的结构示意图,图中所标尺寸的单位为 mm。多极理论计算结果见表 2。为比较多极理论的计算精度,表 2 中列出了文献[3]的有限元法计算结果和文献[6]的积分方程法计算结果。

上述三个工程模型的计算结果表明,多极理论不仅具有较高的计算精度,而且可以很方便地应用于圆柱对称微波腔谐振频率的计算,多极理论是计算圆柱对称微波腔谐振频率的一种有效方法。

### 3 结 论

本文针对复杂几何形状圆柱对称微波谐振腔这一特殊结构,提出了基于三维标量 Helmholtz 多极理论通解的  $TM_0, TE_0$  模式谐振频率计算方法。其突出优点是,用多极理论计算圆柱对称腔本征值问题,既不需要像数值法那样离散场域或边界,又能用统一的格式计算各种复杂形状的圆柱对称腔谐振频率。计算方法具有较好的计算精度,能满足一般工程设计需要。

#### 参考文献:

- [1] Philippou G Y, Gupta G S. Finite-element analysis of angularly dependent modes in a general RF periodic cavity[J]. *Electronics Letters*, 1981, **17**(17):588-589.
- [2] Davies J B, Fernandez F A, Philippou G Y. Finite element analysis of all modes in cavities with circular symmetry[J]. *IEEE Trans*, 1982, **MTT-30**(11):1975-1980.
- [3] Weiland T. On the computation of resonant modes in cylindrically symmetric cavities[J]. *Nucl Inst and Meth*, 1983, **216**:329-348.
- [4] 宁 鼎, 邱汉泉, 张益林. 用有限元法计算圆柱对称微波谐振腔[J]. *电子学报*, 1987, **15**(5):41-48.
- [5] Tsuchimoto M, Honma T. An analysis of axisymmetric resonant cavities by using the hybrid boundary element method[J]. *Trans IEICE Japan*, 1988, **E-71**(4):301-303.
- [6] Tsuchimoto M, Yoneta A, Honma T, et al. An analysis of the scalar Helmholtz equation using the integral equation method[J]. *IEEE Trans*, 1992, **MTT-40**(1):29-33.
- [7] Chen Y, Mittra R, Harms P. Finite-difference time-domain algorithm for solving Maxwell's equations in rotationally symmetric geometries[J]. *IEEE Trans*, 1996, **MTT-44**(6):832-839.
- [8] Zheng Q, Xie F, Lin W. Solution of three-dimensional Helmholtz equation by multipole theory method[J]. *J Electromagn Waves Appl*, 1999, **13**(3):339-357.

## An analysis of cylindrical symmetric microwave cavity using multipole theory method

ZHENG Qin-hong, ZENG Hua, XIE Fu-yao

(School of Physics and Electronic Information, Yunnan Normal University, Kunming 650092, China)

**Abstract:** A new approach, the multipole theory (MT) method, is briefly described for the computation of the resonant frequencies in the microwave cavity with cylindrical symmetry and complicated geometry shapes at the longitudinal section. The essential concept is to represent the solution of the axisymmetric Helmholtz equation by the generalized MT formula of 3-D Helmholtz equation. The MT formulation of the resonant frequencies is derived. By calculating three engineering examples, it is shown that the MT method is an effective approach for the computation of the resonant frequencies in cylindrical symmetric microwave cavities.

**Key words:** multipole theory; cylindrical symmetric microwave cavity; resonant frequency