

基于非均匀快速傅里叶变换的最小二乘 反演地震数据重建

孟小红^{1,2}, 郭良辉^{1,2}, 张致付^{1,2}, 李淑玲^{1,2}, 周建军²

1 中国地质大学地质过程与矿产资源国家重点实验室, 北京 100083

2 地下信息探测技术与仪器教育部重点实验室(中国地质大学, 北京), 北京 100083

摘 要 不规则采样地震数据的重建是地震数据分析处理的重要问题. 本文给出了一种基于非均匀快速傅里叶变换的最小二乘反演地震数据重建的方法, 在最小二乘反演插值方程中, 引入正则化功率谱约束项, 通过非均匀快速傅里叶变换和修改周期图的方式, 自适应迭代修改约束项, 使待插值数据的频谱越来越接近真实的频谱, 采用预条件共轭梯度法迭代求解, 保证了解的稳定性和收敛速度. 理论模型和实际地震数据插值试验证明了本文方法能够去除空间假频, 速度快、插值效果好, 具有实用价值.

关键词 非均匀傅里叶变换, 不规则地震数据重建, 最小二乘反演

文章编号 0001-5733(2008)01-0235-07 中图分类号 P631 收稿日期 2005-09-05, 2007-09-26 收修定稿

Reconstruction of seismic data with least squares inversion based on nonuniform fast Fourier transform

MENG Xiao-Hong^{1,2}, GUO Liang-Hui^{1,2}, ZHANG Zhi-Fu^{1,2}, LI Shu-Ling^{1,2}, ZHOU Jian-Jun²

1 State Key Laboratory of Geological Processes and Mineral Resources, China University of Geosciences, Beijing 100083, China

2 Key Laboratory of Geo-detection (China University of Geosciences, Beijing), Ministry of Education, Beijing 100083, China

Abstract Reconstruction of uneven seismic data is a crucial step of the analyzing and processing of the data. In this paper, a least squares inversion based on nonuniform fast Fourier transform is proposed, which can reconstruct both uneven and alias seismic data. The algorithm of nonuniform fast Fourier transform is used to do Fourier transform of uneven data. An adaptive DFT weighted norm regularization constraint is used during the reconstruction. The inverse problem is solved by the preconditioning conjugate gradient method, which makes the solutions stable and convergence quick. Experimental results on theoretical model and raw uneven seismic data show that the proposed method is fast, efficient and applicable.

Keywords Nonuniform fast Fourier transform, Reconstruction of uneven seismic data, Least squares inversion

1 引 言

由于障碍物、禁区或坏道的存在以及经济条件的制约等, 在很多情况下地震采样数据是不规则或稀疏分布的. 实际工作中处理不规则采样数据体的方法是: 1) 拷贝或线性插值出邻近道; 2) 忽略空缺道

(或者保留坏道); 3) 在 3-D 地震数据处理中, 不考虑实际中的不规则采样点, 通过叠加将所有道放到一个面元上. 这些相对简单处理的结果是常常会出现严重的假频, 使大多数常规技术不能得到很好的运行. 因此, 需要采用数学的方法对不规则采样数据进行规则化重建.

目前, 针对地震数据规则化重建问题已有了较

深入的研究,提出了许多方法,总结归纳大致可分为如下五类:

1) 空间域插值方法,包括动校正压制假频后利用采样定理的 SINC 函数插值^[1]、最大相干倾角插值^[2]、道集加权倾斜叠加插值^[3]、利用同相轴属性插值^[4]、功率谱差异倾斜相干插值^[5]和 $t-x$ 域预测误差滤波 (PEF) 插值^[6]等。

2) 频率域插值方法,包括 $f-x$ 域道内插值^[7]、 $f-k$ 域道内插值^[8]、 $f-x$ 域预测滤波插值^[9,10]以及 $f-x$ 域投影滤波插值^[11]等。

3) 基于 Radon 变换的插值方法,这种方法根据不规则采样数据并结合倾斜叠加、抛物线 Radon 变换、双曲线 Radon 变换等来构建插值算子进行不规则采样数据重建^[12,13]。

4) 基于波动方程的插值方法,如 Ronen^[14]采用 NMO 和反 DMO 交替进行数据规则化,Chemingui 等^[15]提出的 AMO 方法等。

5) 不同方法相结合进行插值,如 $f-x$ 域采用拾取倾角的波场分解插值方法^[16,17]等。

上述五类方法的共同特点是应用一个确定性基函数来表示地震信号,在表示域内作相应的处理,然后将处理后的结果反变换到信号域,这样就可以完成信号的重建和数据恢复。在理论上这些方法一般能够得到比较准确的重建结果,但由于实际情况的复杂性,目前仍有许多挑战性的问题需要深入研究,比如假频问题、算法的稳定性问题以及方法的实用性问题等。Liu^[18]和 Wang^[19]提出了一种基于 Fourier 变换的稀疏约束最小二乘反演方法,在模型空间中引入了基于 Cauchy 准则^[20]的稀疏约束。本文在 Liu 等^[18]和 Wang^[19]的基础上利用非均匀 Fourier 变换^[21]代替其稀疏约束算子来约束待求数据的频谱。在求解过程中,采用预条件共轭梯度法^[22~24]反复迭代修改由非均匀 Fourier 变换所得到的频谱值,使其越来越接近真实的频谱,并比较干净的消除了空间假频,所重建出来的数据能够更好地用于多次波消除、AVO 分析和偏移成像等处理。

2 非均匀快速傅里叶变换

一维情况下的非均匀离散傅里叶变换定义为

$$Y(m) = \sum_{n=1}^N y_n e^{-jm\Delta kx_n}, m = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1 \quad (1)$$

其中, x_n 是空间非均匀采样点位置, y_n 是对应于采样点 x_n 处的信号值, Δk 是频率域采样间隔, N 是非

均匀样点个数, M 是频率域分量个数。

设, $X = 2\pi/\Delta k$ 对于任意 l 有:

$$e^{-jm\Delta k(x_n + l\frac{2\pi}{\Delta k})} = e^{-j(m\Delta kx_n + 2\pi ml)} = e^{-jm\Delta kx_n}, \quad (2)$$

因此, $x_n \in [0, X)$ 。

令 $\Delta kx_n = 2\pi(x_n/X)$, 并用 x_n 替换 x_n/X , 重写等式(1):

$$Y(m) = \sum_{n=1}^N y_n e^{-j2\pi mx_n \Delta x_n}, \quad m = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1 \quad (3)$$

其中, $x \in [0, 1)$, 进一步将等式(3)改写为

$$Y(m) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^N y_n \delta(x - x_n) e^{-j2\pi mx} dx. \quad (4)$$

可见, 等式(3)中的 $Y(m)$ 是尖脉冲序列的傅里叶变换, 该尖脉冲序列为

$$y(x) = \sum_{n=1}^N y_n \delta(x - x_n). \quad (5)$$

现在可以把(4)式简写成:

$$Y(m) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x) e^{-j2\pi mx} dx, \quad (6)$$

即 $Y(m)$ 与 $y(x)$ 形成了 Fourier 变换对。

它的快速算法如下(示意图见图1):

(1) 将非均匀采样数据 $y(x)$ 与一个适当的短滤波因子 $g(x)$ 卷积: $y_1(x) = y(x) * g(x)$, 使其频谱空间带限;

(2) 对卷积结果 $y_1(x)$ 均匀采样, 得到 $y_2(x)$;

(3) 对均匀采样结果进行周期延拓得到 $y_3(x)$, 然后用 FFT 对 $y_3(x)$ 进行快速傅里叶变换得到 $Y_3(m)$;

(4) 将 $Y_3(m)$ 与滤波算子 $g(x)$ 的频谱 $G(m)$ 反卷积, 得到非均匀采样数据 $y(x)$ 的频谱:

$$\hat{Y}(m) = \frac{Y_3(m)}{G(m)}. \quad (7)$$

完成上述快速计算需要两个参数, 一个是对短滤波器 $g(x)$ 进行离散(采样)化的个数 q , 另一个是过采样因子 f , f 决定对 $y_1(x) = y(x) * g(x)$ 进行规则采样的个数 N_c , $f = N_c/M$ 。

本文选取的短滤波器 $g(x)$ 是锥形高斯脉冲函数

$$g(x) = \begin{cases} e^{-b_h bx^2 (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{x_c})}, & -x_c < x < x_c \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (8)$$

其中, $x_c = (q/2)\Delta x$, $b = \pi(2 - 1/f)N_c^2/q$, Δx 是对 $g(x)$ 进行离散采样间隔, b_h 为校正因子, N_c 具体求解参阅文献[25]。

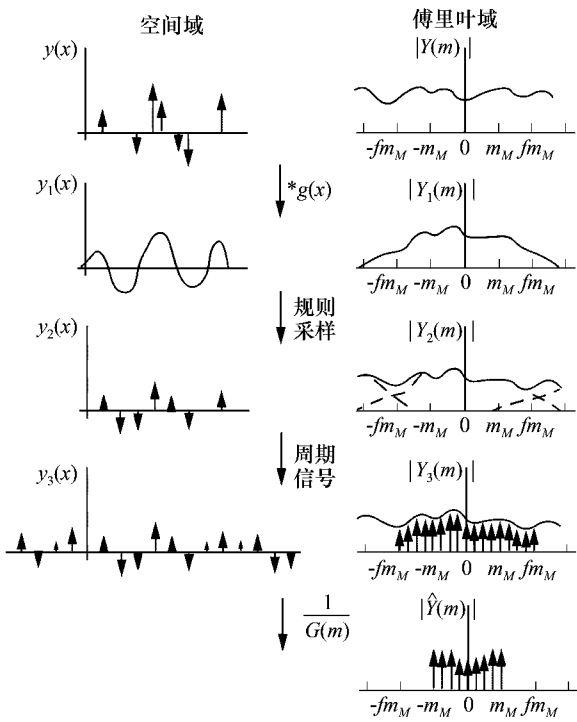


图 1 一维 NFFT 算法示意图

Fig.1 Schematic overview of the NFFT algorithm

3 基于非均匀快速傅里叶变换的最小二乘反演地震数据重建

本文主要给出在 $f-x$ 域沿 x 方向进行一维插值的算法,该算法能够方便地推广到多维情况.

首先将 $t-x$ 域的实测地震数据集转换到 $f-x$ 域,然后对于每一个瞬时频率 f ,沿着空间 x 方向进行规则化插值.设 x 表示长度为 M 的规则网格点数据 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_M]^T$, y 为已知的不规则观测数据 $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ 定义一个采样矩阵 T ,其元素为 $T_{ij} = \delta_{n(i)j}$,则规则网格点数据与不规则观测数据之间的关系可由下面的线性系统来表示:

$$\mathbf{y} = T\mathbf{x}. \quad (9)$$

假设完整的规则数据为 $M = 9$,或 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9]$,观测点数据集为 $N = \{2, 3, 5, 7, 9\}$ 或 $\mathbf{y} = [x_2, x_3, x_5, x_7, x_9]^T$,方程(9)变为

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_7 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

方程(9)中, $TT^T = I_N$, I_N 是 $N \times N$ 阶单位矩阵, $T^T T = I_M$.

由方程(9)给出的插值问题是一个不确定的系统(规则化的数据个体数大于观测数据),没有唯一的解.通常采用适当的引入先验信息来约束解的范围.

在所有可能的解空间中,寻找一个使模型范数最小的解,在不考虑误差存在的条件下,反问题简化为下面的求解约束最小化问题:

$$\text{最小化模型范数 } \|\mathbf{x}\|_w^2,$$

$$\text{同时,使其满足 } T\mathbf{x} = \mathbf{y},$$

$\|\cdot\|_w$ 表示加权范数,选择下面波数域范数:

$$\|\mathbf{x}\|_w^2 = \sum_{k \in N} \frac{X_k^* X_k}{P_k^2}, \quad (11)$$

其中, P_k^2 是支撑与形状与要插值的数据体类似的频率域加权. Ω 表示谱支撑范围(带限函数的带宽),即当 $k \in \Omega$ 时, $p_k \neq 0$, p_k 是波数为 k 时的功率谱, X 是 x 的离散傅里叶变换:

$$X = Fx, \quad (12)$$

$$\mathbf{x} = F^H X.$$

引入对角矩阵,其对角元素为

$$\Lambda_k = \begin{cases} P_k^2, & k \in \Omega, \\ 0, & k \notin \Omega. \end{cases} \quad (13)$$

对角矩阵的伪逆为

$$\Lambda_k^+ = \begin{cases} P_k^{-2}, & k \in \Omega, \\ 0, & k \notin \Omega. \end{cases} \quad (14)$$

波数域的范数可以表示为

$$\|\mathbf{x}\|_w^2 = X^H \Lambda^+ X. \quad (15)$$

将方程(14)(15)代入(11),我们得到下面的表达式:

$$\|\mathbf{x}\|_w^2 = \mathbf{x}^H F^H \Lambda^+ F \mathbf{x}. \quad (16)$$

当考虑观测数据含有误差时,插值反演方程的目标函数为

$$J = \|\mathbf{T}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + \rho^2 \|\mathbf{x}\|_w^2. \quad (17)$$

最小化目标函数(17)可得如下反演解:

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(T^T T + \rho^2 \frac{1}{M} F^H P^2 F \right)^{-1} T^T \mathbf{y}.$$

目标函数(17)式写为矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} T \\ \rho W \end{pmatrix} \mathbf{x} \approx \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

其中, ρ 是正则化因子,加权矩阵为

$$W = \Lambda^{+1/2} F.$$

设:

$$Z = Wx, \quad (18)$$

式变为

$$\begin{pmatrix} TW^+ \\ \rho I \end{pmatrix} Z \approx \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

或:

$$\begin{pmatrix} TF^H P^{-1} \\ \rho I \end{pmatrix} Z \approx \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

地震数据重建问题可以表示为

$$y = Ax + n, \quad (20)$$

其中 y 表示长度为 N 的已知不规则观测数据体, x 表示长度为 M 的欲重建规则化数据体. A 是 $N \times M$ 阶插值矩阵, n 为噪声.

由于 $AA^T = I$, $A^T A \neq I$, I 是单位矩阵, 因此 A 是欠秩矩阵, 方程 (20) 中, $M > N$. 假定所求数据 x 是带限信号, 其带宽为 Ω , 定义带限信号为

$$x = Bx. \quad (21)$$

带限算子 B 为

$$B = \frac{1}{M} F^H \Lambda F, \quad (22)$$

其中 F 为离散傅里叶变换算子矩阵, F^H 为其复共轭转置, Λ 为 $M \times M$ 对角矩阵, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_k)$,

$$\lambda_k = \begin{cases} 1, & k \in \Omega \\ 0, & k \notin \Omega \end{cases}.$$

则

$$y = ABx = A \frac{1}{M} F^H \Lambda Fx = A \frac{1}{M} F^H \Lambda X, \quad (23)$$

其中 $X = Fx$ 是 x 的傅里叶变换.

因为 $M > N$, 所以方程 (20) 是欠定方程, 可以使用最小二乘反演法求解. 即在先验信息 $y = ABx$ 的约束下, 使 $x^T x$ 最小化, 求得最小二乘解. 当考虑到噪声的影响时, 要引入正则化约束, 故最小二乘目标函数为

$$J(x) = \|ABx - y\|_2^2 + \mu^2 \|Lx\|_2^2, \quad (24)$$

其中, $\|Lx\|_2$ 为正则化约束, L 为粗糙度算子, μ 为折中因子.

在自适应 DFT 加权最小二乘反演重建方法中, 引入柯西分布约束作为正则化项, 极小化如下泛函:

$$J(x) = \|ABx - y\|_2^2 + \mu^2 \|x\|_p^2. \quad (25)$$

$\|x\|_p^2$ 是由下式定义的自适应 DFT 加权范数:

$$\begin{aligned} \|x\|_p^2 &= \sum X_k |P_k|^{-2} X_k^* \\ &= \frac{1}{M} x^H F^H P^2 Fx \\ &= \left\| \frac{1}{\sqrt{M}} PFx \right\|_2^2, \end{aligned} \quad (26)$$

其中, P 为 $M \times M$ 矩阵. 当 $|P_k| \neq 0$ ($k \in \Omega$) 时, 对角线元素为 $1/|P_k|$, 当 $|P_k| = 0$ ($k \notin \Omega$) 时, 对角线元素为 0.

对 $J(x)$ 求导, 并令其为 0, 可得

$$\hat{x} = \left(A^T A + \mu^2 \frac{1}{M} F^H P^2 F \right)^{-1} A^T y. \quad (27)$$

由于 $|P_k|^{-2}$ 的形状与待重建的完整规则数据体功率谱相似, 可用 x 的周期图来近似, 而 x 未知, 则用修正的周期图来迭代得到

$$P_k^{(n)} = \frac{1}{M} X^{(n-1)} (X^{(n-1)})^*. \quad (28)$$

为了保证求解稳定、收敛速度快、精度高, 用预条件共轭梯度法来求解 (27) 式. 引入预条件方程 Q

$$= \frac{1}{\sqrt{M}} PF\hat{x} \quad \text{则有}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{MAF^H P^{-1}} \\ \mu \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

其中, P^{-1} 是 P 的逆, 亦为 $M \times M$ 对角矩阵, 解方程 (29) 然后用下面方程可求得待重建数据:

$$\hat{x} = \sqrt{M} F^H P^{-1} Q. \quad (30)$$

由于方程 (29) 中的 A 是系数矩阵算子, 则 AF^H 就可组成非均匀傅里叶变换算子. 我们可利用非均匀快速傅里叶变换算法来计算 AF^H .

令

$$T = AF^H, \quad (31)$$

则方程 (29) 改写为

$$\begin{pmatrix} \sqrt{MTP^*} \\ \mu \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

因此, 基于非均匀快速傅里叶变换的最小二乘反演地震数据重建可描述为下列过程:

(1) 对实测数据做非均匀快速傅里叶变换, 求得功率谱的初始估计 $|P_k|^{(0)}$;

(2) 通过非均匀快速傅里叶变换解公式 (31), 求得矩阵 T ;

(3) 用预条件共轭梯度算法解公式 (32), 由公式 (30) 得到 $\hat{x}^{(0)}$;

(4) 利用修正的周期图, 计算加权函数 $|P_k|^{(n)}$;

(5) 当满足 $\frac{\|\hat{x}^{(n)} - \hat{x}^{(n-1)}\|}{\|\hat{x}^{(n)}\|} < \epsilon$ 时, 迭代终止,

否则回到 (3) 继续.

4 理论模型试验

根据本文的理论方法和计算步骤, 首先用最简

单的理论模型(单个高频线性同相轴)进行试算.非均匀地震数据 40 道,时间采样间隔 4 ms,理论同相轴有 4 处缺失不同数量的道,见图 2a.用本文方法重建地震数据,共 65 道,见图 2b.从图 2b 可以看出,有效信号基本能够恢复出来了.

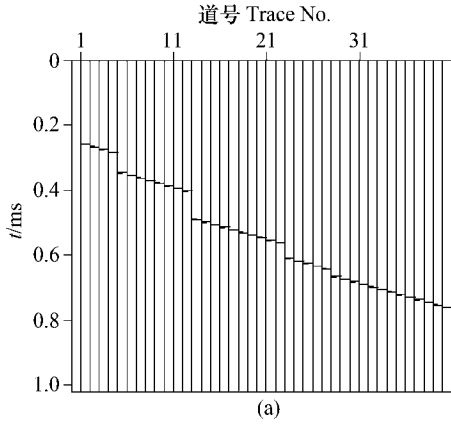


图 3a 的理论数据模型中有四个低频弯曲同相轴,共 64 道,其中有 28 道为空道,时间采样间隔为 4 ms.用本文方法重建地震数据,预条件共轭梯度迭代 10 次,见图 3b.从图 3b 可以看出,同相轴很好地被重建了.

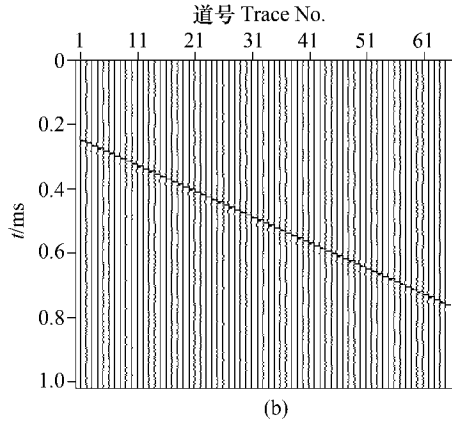


图 2 非均匀地震数据模型(单个高频线性同相轴)(a)和基于非均匀快速傅里叶变换的最小二乘反演重建结果(b)

Fig.2 The uneven seismic data model with single high-frequency linear even(a), and its reconstruction by the least squares inversion based on NFFT(b)

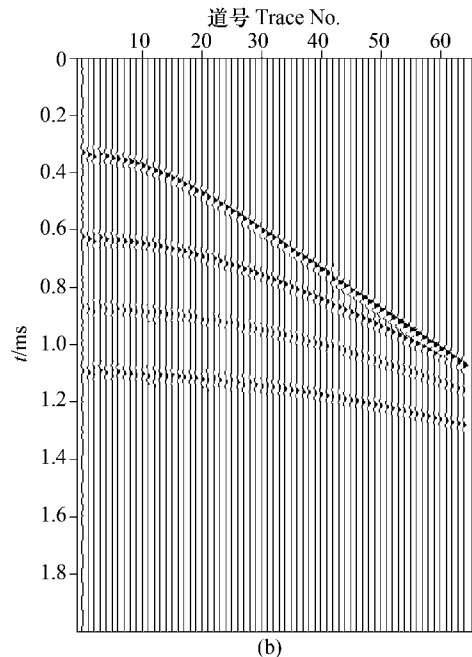
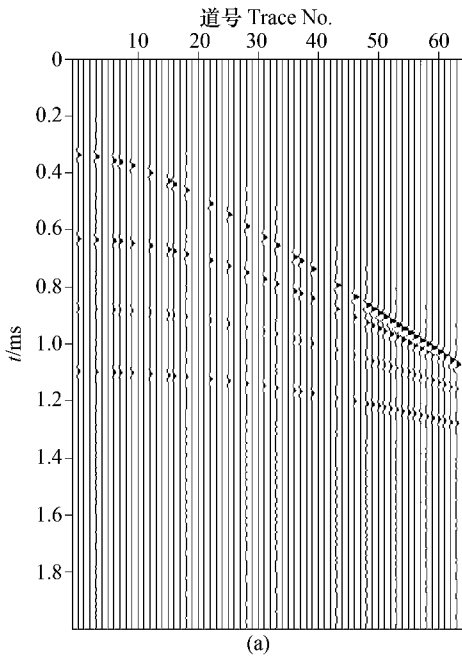


图 3 非均匀地震数据模型(四个低频弯曲同相轴)(a)和基于非均匀快速傅里叶变换的最小二乘反演重建结果(b)

Fig.3 The uneven seismic data model with four low-frequency curve event(a) and its reconstruction by the least squares inversion based on NFFT(b)

5 实际地震数据试验

某油田的一块实际二维地震资料,这里任取其中地震道时间 1 s 到 2 s,共 74 道数据,道之间非均

匀分布,见图 4a.利用本文方法对该非均匀地震数据重建,共 110 道,见图 4b.图 4c 为常规的最小二乘反演法的结果.

对比非均匀快速傅里叶变换最小二乘反演法重建前后的地震剖面可以看出,重建道与原始道具有

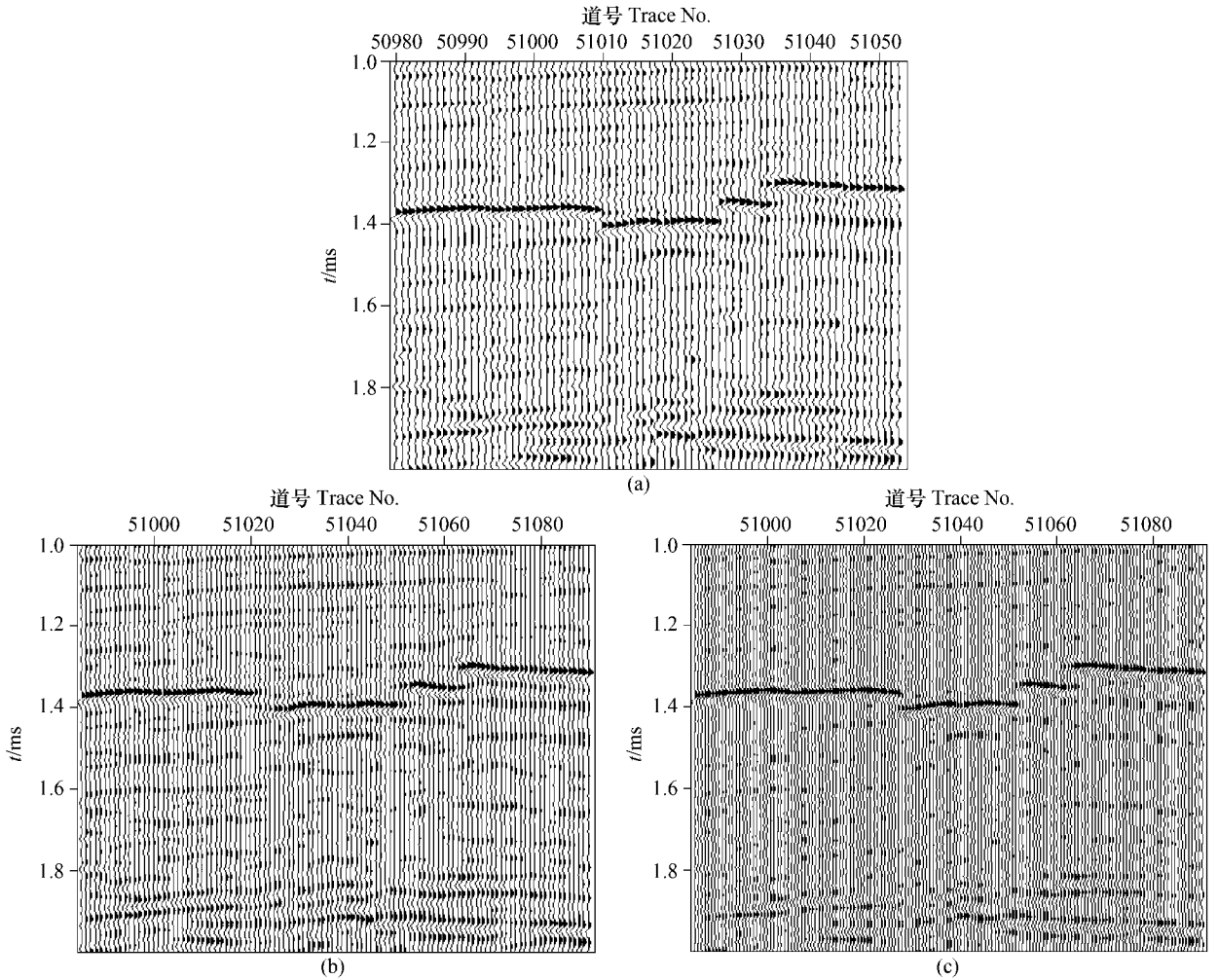


图 4 (a)某油田实际二维不规则资料 (b)基于非均匀快速傅里叶变换的最小二乘反演重建结果, (c)常规的最小二乘反演重建结果.

Fig. 4 (a) The raw 2-D uneven seismic data from one oil-field, (b) Its reconstruction by the least squares inversion based on NFFT, (c) Its reconstruction by the conventional least squares inversion.

很好地连续性,原始图像的构造特征在重建后的图像中更加明显,变化更加自然.而常规最小二乘反演法的重建结果不能很好的恢复同相轴的信息.

6 结 论

本文所提的基于非均匀快速傅里叶变换的最小二乘反演法,假定重建的地震数据在空间是带限的,由不完整的非均匀地震数据反演重建完整的均匀地震数据.反演重建中,引入自适应 DFT 加权范数正则化约束,使得重建结果带限,并受功率谱支持和谱形状约束.从非假频的低频信号计算出的加权算子可以有效地削减高频信号的假频现象.非均匀数据的傅里叶变换采用非均匀快速傅里叶变换算法,极

大地提高了计算速度.反演求解中,采用预条件共轭梯度法迭代求解,保证解的稳定和收敛速度.理论模型和实际资料试验表明本文方法计算稳定,速度快,精度高、实用性强.

参考文献 (References)

- [1] Jakubowicz H. Wavefield reconstruction. Soc. Explor. Geophys. Ann. Internat. Mtg., Expanded Abstracts, 1994. 1557 ~ 1560
- [2] Larner K, Gibson B, Rothman D. Trace interpolation and the design of seismic surveys. *Geophysics*, 1981, **46**(4): 407 ~ 409
- [3] Lu L. Application of local slant-stack to trace interpolation. Soc. Explor. Geophys. Ann. Internat. Mtg., Expanded Abstracts, 1985. 560 ~ 562
- [4] King G A, Leong T K, Flinchbaugh B E. The role of interpolation in seismic resolution. Soc. Explor. Geophys. Ann. Internat. Mtg., Expanded Abstracts. 1984

- [5] Monk D, McBeath R G, Wason C B. Interpolation of aliased seismic traces. US Patent, 1993. 5235556
- [6] Claerbout J, Nichols D. Interpolation beyond aliasing by($t-x$)domain in PEFs. 53rd Ann. Internat. Mtg., Eur. Assn. Geosci. Eng., Expanded Abstracts, 1991. 1 ~ 10
- [7] 国九英, 周兴元, 俞寿朋. FX 域等道距道内插. 石油地球物理勘探, 1996, **31**(1): 28 ~ 34
Guo J Y, Zhou X Y, Yu S P. Iso-interval trace interpolation in $F-X$ domain. *Oil Geophysical Prospecting* (in Chinese), 1996, **31**(1): 28 ~ 34.
- [8] 国九英, 周兴元. FK 域等道距道内插. 石油地球物理勘探, 1996, **31**(2): 211 ~ 218
Guo J Y, Zhou X Y. Iso-interval trace interpolation in $F-K$ domain. *Oil Geophysical Prospecting* (in Chinese), 1996, **31**(2): 211 ~ 218
- [9] Spitz S. Seismic trace interpolation in the $f-x$ domain. *Geophysics*, 1991, **56**(6): 785 ~ 794
- [10] Ji J. Interpolation using prediction-error filter simulation(PEFs). Soc. Explor. Geophys. Ann. Internat. Mtg., Expanded Abstracts, 1993. 1170 ~ 1173
- [11] Soubaras R. Spatial interpolation of aliased seismic data. Soc. Explor. Geophys. Ann. Internat. Mtg., Expanded Abstracts, 1997. 1167 ~ 1190
- [12] Thorson J R, Claerbout J F. Velocity-stack and slant stack stochastic inversion. *Geophysics*, 1985, **50**(12): 2727 ~ 2741
- [13] Kabir M M N, Verschuur D J. Restoration of missing offsets by parabolic Radon transform. *Geophysical Prospecting*, 1995, **43**: 347 ~ 368
- [14] Ronen J. Wave equation trace interpolation. *Geophysics*, 1987, **52**(7): 973 ~ 984
- [15] Chemingui N, Biondi B. Handling the irregular geometry in wide-azimuth surveys. Soc. Explor. Geophys. Ann. Internat. Mtg., Expanded Abstracts, 1999. 32 ~ 35
- [16] Pieprzak A W, McClean J W. Trace interpolation of severely aliased events. Soc. Explor. Geophys. Ann. Internat. Mtg., Expanded Abstracts, 1988. 658 ~ 660
- [17] Pieprzak A W, McClean J W. Interpolation of severely aliased events. US Patent, 1990 A922465
- [18] Liu B, Sacchi M. Minimum weighted norm interpolation of seismic data with adaptive weights. Soc. Explor. Geophys. Ann. Internat. Mtg., Expanded Abstracts, 2001. 1921 ~ 1924
- [19] Wang Y H. Sparseness-constrained least-squares inversion: Application to seismic wave reconstruction. *Geophysics*, 2003, **68**(5): 1633 ~ 1638
- [20] Trad D Q, Ulrych T J, Sacchi M D. Accurate interpolation with high-resolution time-variant Radon transforms. *Geophysics*, 2002, **67**(4): 644 ~ 656
- [21] Duijndam A, Schonewille M. Nonuniform Fast Fourier Transform. Soc. Explor. Geophys. Ann. Internat. Mtg., Expanded Abstracts, 1997. 1135 ~ 1138
- [22] 孟小红, 胡朝顺, 刘海英等. 利用非均匀快速傅里叶变换进行地球物理数据插值. 长春科技大学学报, 2000, **30**(增刊): 150 ~ 153
Meng X H, Hu C S, Liu H Y, et al. The application of unouniform fast fourier transform to interpolation of geophysical data. *Journal of Changchun University of Science and Technology*(in Chinese), 2000, **30**(Suppl.): 150 ~ 153
- [23] 李冰, 刘洪, 李幼铭. 三维地震数据离散光滑插值的共轭梯度法. 地球物理学报, 2002, **45**(5): 691 ~ 699
Li B, Liu H, Li Y M. 3-D seismic data discrete smooth interpolation using conjugate gradient. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2002, **45**(5): 691 ~ 699
- [24] 刘喜武, 刘洪, 刘彬. 反假频非均匀地震数据重建方法研究. 地球物理学报, 2004, **47**(2): 299 ~ 305
Liu X W, Liu H, Liu B. A study on algorithm for preconstruction of de-alias uneven seismic data. *Chinese J. Geophys.*(in Chinese), 2004, **47**(2): 299 ~ 305
- [25] Duijndam A J W, Schonewille M A. Nonuniform fast Fourier transform. *Geophysics*, 1999, **64**(2): 539 ~ 551

(本文编辑 汪海英)