第16卷 第1期 自动化学报 Vol. 16, No. 1
1990年1月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1990

一种求二值图象欧拉数的并行快速算法

陈鸣华 阎平凡
(清华大学)

摘要

本文给出了一个求方格(Square grid)上二值化图象欧拉数的并行快速算法，并通过将方格上的二值图象转化成数字图来引用图论方法对该算法进行了证明，且给出了若干实例以说明算法的有效性.

关键词——欧拉数,图象分析,二值图象,方格,算法.

一、引言

在许多图象分析问题中,一个二值图象的欧拉数往往是一个可提供重要信息的参量.当图象中各连通分量是单连通的(空洞数为零),则此时欧拉数等于连通分量的个数,故欧拉数可直接用于对连通分量进行计数.由于计算连通分量的个数在图象分析中是一个很常用的基本运算,并有着广泛的应用背景(如生物医学图象分析中的颗粒计数等).因此,如何构造快速算法来实时计算二值图象的欧拉数,有其实用价值.

近来,"位面"(bit-plane)计算机已被广泛应用于许多实际场合.它仅包括几个二值矩阵(位面),面与面之间可并行做一些简单的运算,如位移、逻辑与、逻辑或等.本文中求欧拉数的算法只用了移位运算和逻辑与运算，故很容易由这种简单的硬件快速实现.

二、算法推导

文[2]中 Serra 对在六边形格子上的二值图象欧拉数作了讨论.由于常见图象都是基于正方形格子系统,故这里来推导正方形格子上二值图象欧拉数的算法.二值图象是 Z^2 的一个子集[1].为了便于引用图论方法来对算法进行证明,不妨将二值图象 X 转化为一个方格图(square graph),其定义如下:

定义. X 是 Z^2 中的一个子集,对任意 x_i、$x_j \in X$,若 x_i 与 x_j 是4——相邻的,则加入一条边 e_{ij},把 x_i 和 x_j 连接起来;于是,X 的方格图 $G(X, E)$ 是由 X 的点作为顶点,以所有 $e_{ij} \in E$ 作为边而构成的图(graph).图1给出了上述定义的示意图.显然,$X \in S(Z^2)$ ($S(Z^2)$ 是 Z^2 中所有子集)的欧拉数就等于图 $G(X, E)$ 的欧拉数,故可以通过求 $G(X, E)$ 的欧拉数来求得二值图象 X 的欧拉数.不妨设 X 是4——相邻的,且 X^c 是8——相邻的,则有

本文于1987年3月2日收到.

定理. 一个方格图 $G(X, E)$ 的连通分量数、洞数、顶点数、基本方格数和边数分别记为 n、h、v、s 和 e，则下式恒成立：

$$n - h = v + s - e - 1. \qquad (1)$$

证明．构造集合序列

$$X = X_v \supset X_{v-1} \supset \cdots \supset X_1 \supset X_0,$$

其中 X_{k-1} 是通过删去 X_k 的一个顶点而构成的；与集合序列相对应的方格图序列为 $G(X_i, E_i)$，$i = 0, 1, 2, \cdots, v$．可用归纳法来证明式(1)：

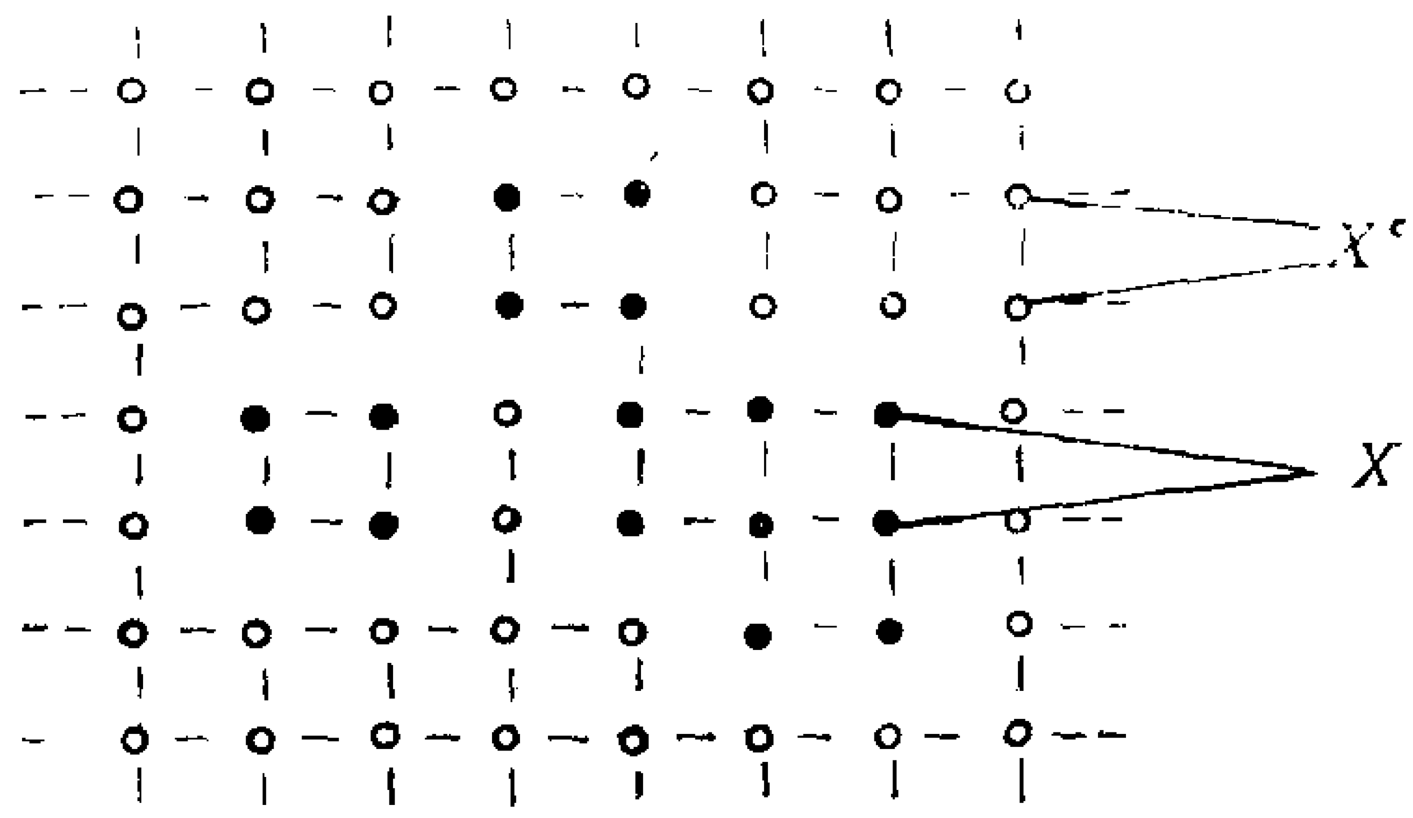


图 1　与 X 和 X^c 相伴的方格图

当 $i = 0$（空集）和 $i = 1$ 时，有式(1)成立；

设当 $i = k$ 时式(1)仍成立，则在 $G(X_k, E_k)$ 上加一个顶点 x_{k+1} 来构成 $G(X_{k+1}, E_{k+1})$；

在方格系统上，加入一个新点 x_{k+1} 的方式可归为图 2 所示的六个基本类型（或模拟一个 $90°$ 的旋转）．

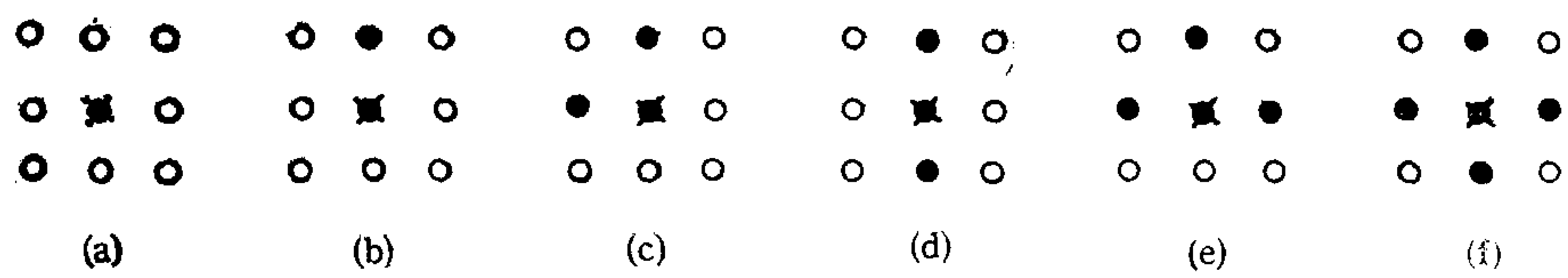


图 2　加入一个新点 x_{k+1} 的方式

■——点 x_{k+1}，●——X 的中点，○——X^c 的中点

因此，问题转化为如何证明在图 2 中 (a) 到 (f) 各情况下，式(1)均成立．对于(a)，加入一个新点 x_{k+1} 后引起的增量变化为

$$\Delta n = 1, \quad \Delta h = 0, \quad \Delta v = 1,$$
$$\Delta s = \Delta e = 0,$$

于是有 $\Delta(n - h) = \Delta(v + s - e)$，故(1)式仍成立．

完全类似的方法可证，在 (b)—(f) 各情况下(1)式总成立．于是由归纳法有，对任意的自然数 i，$G(X_i, E_i)$ 中各量满足式(1)．

三、实　　现

由上述的证明几乎可直接得到数字化算法．由(1)式，欧拉数由 v、s、e 三个量确定，而对于方格上的二值图象，这三个量可以很容易地给出其数字化形式，即：

$$v = \mathcal{N}(1), \quad s = \mathcal{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad e = \mathcal{N}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathcal{N}(11).$$

其中 $\mathcal{N}(\#)$ 表示图象中形如“#”结构之个数．例如，对于 $\mathcal{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的计算，设基

本方格的原点是其左上角，则位于点 $x=(i,\ j)$ 的基本方格由下述点构成：

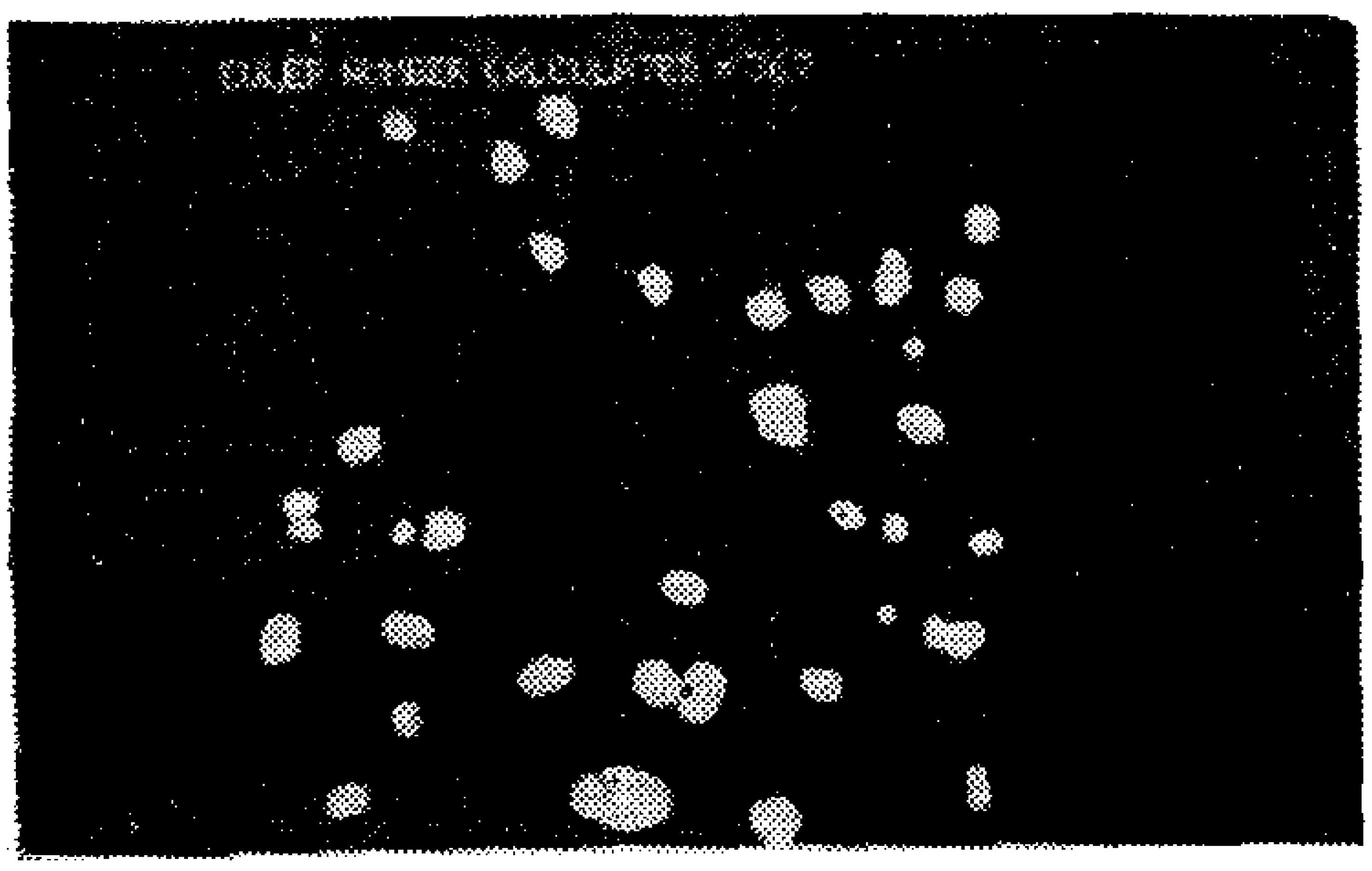
$$[(i,j),(i+1,j),(i,j+1),(i+1,j+1)]\triangleq[x,\ L(x),\ R(x),\ LR(x)].$$

定义一个布尔函数如下：

$$F(x)=[x\wedge L(x)\wedge R(x)\wedge LR(x)],$$

其中“$\wedge$”表示逻辑与运算．故如果 x 点处有一个基本方格，则 $F(x)=1$，否则为零．因此只要计算图象中 $F(x)$ 为 1 的点数便可求出量 s.

用两个二值矩阵 A 和 B 来完成上述运算．A 作为累加器，B 产生移位的图象并和 A 中的原图象做逻辑与运算，做完规定次数的操作后对图象中 $F(x)=1$ 的点进行计数得出结果．图 3 中给出了两个实际计算的结果，是在 I^2S 图象系统上实现的，但只使用了该系统的两个二值矩阵(图形面)和“移位”、“逻辑与”这两个简单功能．由于对 $F(x)=1$ 的点之计数是利用直方图来间接求出的，不是精确值，故求出的欧拉数有些误差．



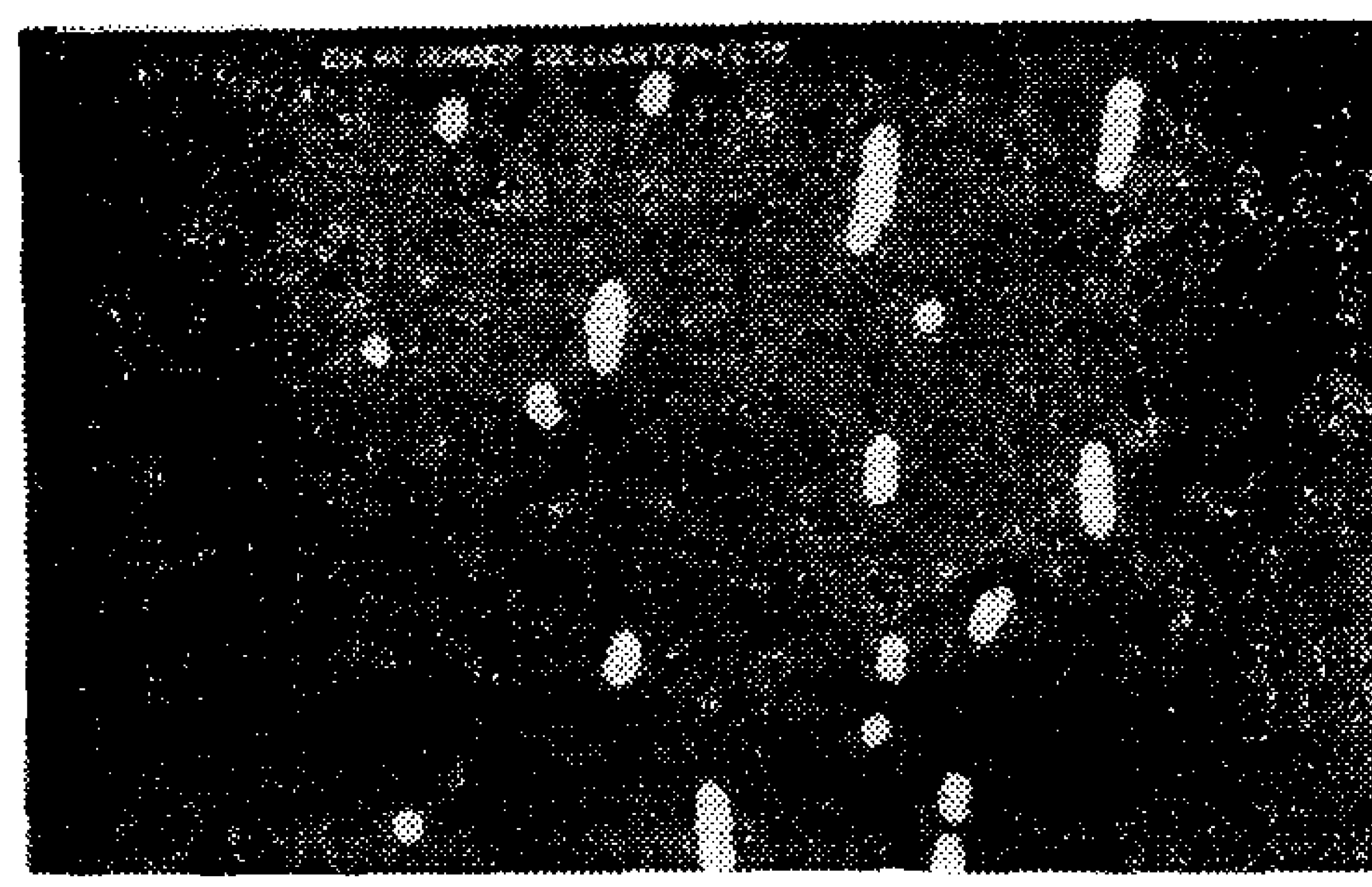


图 3 算法实现结果两例

参 考 文 献

[1] Rosenfeld, A. and Kak, A. C., Digital Image Processing (2nd. ed.), Academic Press, New York, 1982.

[2] Serra, J., Image Analysis and Mathematical Morphology, Academic Press, London, 1982.

A FAST ALGORITHM FOR THE CALCULATION OF THE EULER NUMBER OF A BINARY IMAGE

Chen Minghua Yan Pingfan

(Tsinghua University)

Abstract

This paper presents a fast parallel algorithm to calculate the Euler number of a binary image on a square grid system. The proof of the algorithm is given by transforming the binary image into a graph and employing graph theory methods. The algorithm has been implemented and examples are given to show its validity.

Key words ——Euler number; image analysis; binary image; square grid; algorithm