

棱柱体明渠水面曲线的级数解法

张邦朝¹, 赵中丽²

(1. 云南农业大学科技处, 云南 昆明 650201; 2. 云南省水利水电学校, 云南 昆明 650202)

摘要: 根据水利工程的实际应用和所需的精度要求, 结合水力学所涉及各类不同因素及水流运动变化特点, 为寻求各型水面曲线的简捷计算方法, 在此引用级数的概念, 研究棱柱体明渠恒定渐变流水面曲线的解, 通过对已建成的十几个中小型水利工程实例和在教学实践中, 结合实际工程设计进行水面曲线简化计算的研究后, 认为棱柱体明渠水面曲线级数解是适宜于中小型水利工程精度要求、且计算方法简便快捷求解水面曲线解的又一种途径。

关键词: 棱柱体明渠; 水面曲线; 水力指数; 级数

中图分类号: TU 992.22 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004-390X(2007)06-0917-04

The Method on the Progressional Value of the Water Surface Line Which Lie in Prismatic Channel and the Application of it

ZHANG Bang-chao¹, ZHAO Zhong-li²

(1. Division Science and Technology, Yunnan Agricultural University, Kunming 650201, China;
2. School of Irrigation and Water Electricity of Yunnan Province, Kunming 650202, China)

Abstract: In according to the practical application in the Water conservancy engineering and precision demanded, combining with all kinds of different factors and changeable characteristics of fluid which involve in hydraulics. For finding out the simple and direct way on all kinds of curves of water, quoting the conception of progressional here, the solution of curve of prismatic channel gradual-varied steady flow are studied. After studying simplified calculation on curve of water to tens of middle and small water conservancy engineering practical examples and the use of combination in teaching and practice. It can be concluded that this progressional value satisfies the precision demand in the middle and small water conservancy engineering. The simple and direct calculation method is another way to solve the curve of water.

Key words: prismatic channel; curve of water; hydraulic index; progression

1 棱柱体明渠水面曲线基本微分方程求解分析

由水面曲线基本微分方程^[1~6]

$$\frac{dh}{dl} = \frac{i - \frac{Q^2}{K^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2 B}{gA^3}} \quad (1)$$

式中, h : 水深, L : 水面曲线长度, A : 明渠过水断面面积, i : 明渠底坡, K : 明渠水流流量模数^[1~3], B : 明渠水面宽度, Q : 明渠流量, α : 动能修正系数^[1~3], g : 重力加速度^[1~3]。

棱柱体明渠分正坡($i > 0$)、平坡($i = 0$)、逆坡($i < 0$)3种不同情况, 其中水面曲线微分方程的形式有所不同。现以正坡渠道($i > 0$)的情况进行分

收稿日期: 2007-04-03 修回日期: 2007-04-26

作者简介: 张邦朝(1953-), 男, 云南镇雄人, 助理研究员, 主要从事水利工程设计和教学研究。

析讨论。

当 $i > 0$ 时, $Q = K_0 \sqrt{h}$, 且棱柱体明渠中临界流的条件为: $\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{A_k^3}{B_k}$, 将这些条件代入微分方程

(1) 得正坡 ($i > 0$) 渠道水面曲线微分方程^[2~6]:

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{1 - (\frac{K_0}{K})^2}{1 - \frac{A_k^3}{B_k} \cdot \frac{B}{A^3}} \quad (2)$$

通过分析计算表明, 在棱柱体明渠中存在有以下近似关系^[5,6]:

$$\left(\frac{K_0}{K}\right)^2 = \left(\frac{h_0}{h}\right)^x \quad (3)$$

$$\frac{A_k^3}{B_k} \cdot \frac{B}{A^3} = \left(\frac{h_k}{h}\right)^y \quad (4)$$

以上(3), (4) 式中的 x, y 称为水力指数^[4~6], 在此将(3), (4) 式代入(2) 式整理后, 可得正坡明渠水面曲线的另一形式^[7,8]:

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{1 - \left(\frac{h_0}{h}\right)^x}{1 - \left(\frac{h_k}{h}\right)^y} \quad (5)$$

2 棱柱体明渠水面曲线级数解

正坡渠道 ($i > 0$) 情况, 若令 $\eta = \frac{h}{h_0}$, 则 $dh = h_0 d\eta$ ^[7,8], 于是(5) 式变为:

$$dl = \frac{h_0}{i} \left[\left(\frac{h_k}{h_0}\right)^y \cdot \frac{\eta^{x-y}}{1 - \eta^x} d\eta - \frac{\eta^x}{1 - \eta^x} d\eta \right] \quad (6)$$

将(6) 式积分后可得:

$$l = \frac{h_0}{i} \left[\left(\frac{h_k}{h_0}\right)^y \int \frac{\eta^{x-y}}{1 - \eta^x} d\eta - \int \frac{\eta^x}{1 - \eta^x} d\eta \right] = \frac{h_0}{i} \left[\left(\frac{h_k}{h_0}\right)^y \cdot f_1(\eta) - f_2(\eta) \right] \quad (7)$$

下面利用级数求解 $f_1(\eta)$ 和 $f_2(\eta)$, 分两种情况讨论^[1~4,7~10]。

2.1 b_1, C_1, C_2, C_3 型水面曲线

在 b_1, C_1, C_2, C_3 区, $h < h_0, \eta^x < 1$, 此时 $\frac{1}{1 - \eta^x}$ 可展开成无穷级数^[5~8]。则:

$$f_1(\eta) = \int \frac{\eta^{x-y}}{1 - \eta^x} d\eta = \int \eta^{x-y} (1 + \eta^x + \eta^{2x} + \eta^{3x} + \dots) d\eta = \int (\eta^{x-y} + \eta^{2x-y} + \eta^{3x-y} + \dots) d\eta$$

$$= \frac{\eta^{x-y+1}}{x-y+1} + \frac{\eta^{2x-y+1}}{2x-y+1} + \frac{\eta^{3x-y+1}}{3x-y+1} + \dots + c_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta^{nx-y+1}}{nx-y+1} + c_1 \quad (8)$$

$$f_2(\eta) = \int \frac{\eta^x}{1 - \eta^x} d\eta = \int \eta^x (1 + \eta^x + \eta^{2x} + \eta^{3x} + \dots) d\eta = \int (\eta^x + \eta^{2x} + \eta^{3x} + \dots) d\eta = \frac{\eta^{x+1}}{x+1} + \frac{\eta^{2x+1}}{2x+1} + \frac{\eta^{3x+1}}{3x+1} + \dots + c_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta^{nx+1}}{nx+1} + c_2 \quad (9)$$

将(8) 式(9) 式代入(7) 式中, 可得 $b_1, C_1, C_2, C_3 (h < h_0)$ 水面曲线方程的级数解^[5~9]:

$$l = \frac{h_0}{i} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{h_k}{h_0}\right)^y \cdot \frac{\eta^{nx-y+1}}{nx-y+1} - \frac{\eta^{nx+1}}{nx+1} \right] + C \quad (10)$$

对两个指定断面之流段积分^[7,8] 得:

$$\Delta l = l_2 - l_1 = \frac{h_0}{i} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{h_k}{h_0}\right)^y \cdot \frac{\eta_2^{nx-y+1} - \eta_1^{nx-y+1}}{nx-y+1} - \frac{\eta_2^{nx+1} - \eta_1^{nx+1}}{nx+1} \right] \quad (11)$$

2.2 a_1, a_2, a_3, b_2 型水面曲线

因 a_1, a_2, a_3, b_2 区内 $h > h_0$, 故作变量代换, 令

$\zeta = \frac{1}{\eta}$ 则(7) 式变为:

$$l = \frac{h_0}{i} \left[\left(\frac{h_k}{h_0}\right)^y \int \frac{\zeta^{y-2}}{1 - \zeta^x} d\zeta - \int \frac{\zeta^{-2}}{1 - \zeta^x} d\zeta \right] = \frac{h_0}{i} \left[\left(\frac{h_k}{h_0}\right)^y \cdot g_1(\zeta) - g_2(\zeta) \right] \quad (12)$$

因为 $h > h_0$, 故 $\zeta^x < 1, \frac{1}{1 - \zeta^x}$ 可展开成无穷级数^[7,8], 则:

$$g_1(\zeta) = \int \frac{\zeta^{y-2}}{1 - \zeta^x} d\zeta = \int \zeta^{y-2} (1 + \zeta^x + \zeta^{2x} + \dots) d\zeta = \frac{\zeta^{y-2}}{y-1} + \frac{\zeta^{x+y-1}}{x+y-1} + \frac{\zeta^{2x+y-2}}{2x+y-1} + \dots + C_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^{nx+y-1}}{nx+y-1} + C_1 \quad (13)$$

$$g_2(\zeta) = \int \frac{\zeta^{-2}}{1 - \zeta^x} d\zeta = \int \zeta^{-2} (1 + \zeta^x + \zeta^{2x} + \dots) d\zeta = \frac{\zeta^{-1}}{-1} + \frac{\zeta^{x-1}}{x-1} + \frac{\zeta^{2x-1}}{2x-1} + \dots + C_2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^{nx-1}}{nx-1} + C_2 \quad (14)$$

将(13),(14)代入(12)式中,可得出 a_1, a_2, a_3, b_2 型水面曲线的级数解^[7,8]。

$$l = \frac{h_0}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{h_k}{h_0} \right)^y \cdot \frac{\zeta^{nx+y-1}}{nx+y-1} - \frac{\zeta^{nx-1}}{nx-1} \right] + C \quad (15)$$

对两个指定断面之流段积分后^[4~6]可得:

$$\begin{aligned} \Delta l &= l_2 - l_1 \\ &= \frac{h_0}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{h_k}{h_0} \right)^y \cdot \frac{\zeta_2^{nx+y-1} - \zeta_1^{nx+y-1}}{nx+y-1} - \frac{\zeta_2^{nx-1} - \zeta_1^{nx-1}}{nx-1} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

式(10),(11)及(15),(16)即为棱柱体正坡($i > 0$)时明渠恒定渐变流水面曲线方程的级数解;对于平坡、逆坡明渠可用同样的方法推求出级数解。

3 工程应用举例(以 a_1 型雍水曲线计算为例)

如图 1 所示,已知渠道全长 3 386 m,渠道断面为梯形,边坡系数 $m = 2$,底宽 $b = 45$ m,底坡 $i = 1/3\ 000$,过流量 $Q = 500$ m³/s,闸前水深 $h = 8.95$ m,计算得正常水深 $h_0 = 4.85$ m,临界水深 $h_k = 2.25$ m,经计算分析得出水面曲线为 a_1 型雍水曲线。试推求此渠道的水面曲线。

解: a_1 型水面曲线定量计算,用公式(16)式进行。

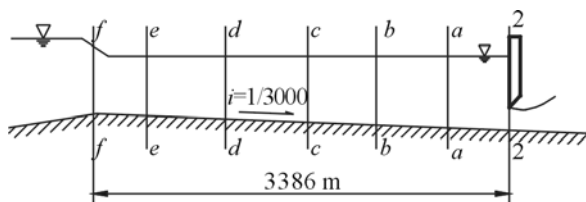


图 1

3.1 计算水力指数 x, y 值^[4~6]

设渠道水深接近均匀流水深,即 $h_1 = h_0 = 4.85$ m,已知闸前(渠末)水深 $h_2 = 8.95$ m,根据以上两个水深,由以下两式求出水力指数,然后在渠道各段中使用。

$$x = 2 \cdot \frac{\lg k_2 - \lg k_1}{\lg h_2 - \lg h_1} \quad (17)$$

$$y = \frac{\lg \frac{A_2^3}{B_2} - \lg \frac{A_1^3}{B_1}}{\lg h_2 - \lg h_1} \quad (18)$$

式中: $h_2 = 8.95$ m, $h_1 = 4.85$ m,相应的 $A_2 = 562.5$ m², $A_1 = 265.3$ m², $K_2 = 79\ 455.5$ m³/s, $B_2 = 80.8$ m, $K_1 = 26\ 641.6$ m³/s, $B_1 = 64.4$ m,

将以上各值代入(17),(18)式求得: $x = 3.56, y = 3.31$;

3.2 水面曲线计算

在(16)式中, $\zeta = \frac{h_0}{h}$,故可将式(16)改写成下式:

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{h_0}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{h_k}{h_0} \right)^y \cdot \frac{h_0^{nx+y-1}}{nx+y-1} \left(\frac{1}{h_2^{nx+y-1}} - \frac{1}{h_1^{nx+y-1}} \right) - \frac{h_0^{nx-1}}{nx-1} \left(\frac{1}{h_2^{nx-1}} - \frac{1}{h_1^{nx-1}} \right) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

式中, $h_0 = 4.85$ m, $i = 1/3000, h_k = 2.25, x = 3.56, y = 3.31$;

将各值分别代入式(19)后,可求出(表 1)中取不同 n 值时的得数($nx + y - 1, nx - 1$)。

表 1 水面曲线计算系数表

Tab. 1 The calculation charter of coefficient on the curve of Water

n	0	1	2	3	4	5	...
$nx + y - 1$	2.21	5.71	9.33	12.89	16.55	20.11	...
$nx - 1$	-1	2.56	6.12	9.68	13.24	16.80	...

在计算中,以闸前断面为控制断面 2-2,其水深为 $h_2 = 8.95$ m,将已知数据代入式(19)并加以整理后可得:

$$\begin{aligned} \Delta l &= 14\ 500 \times \{ 0.078 \times [14.828 \times (7.879 \times 10^{-3} - h_1^{-2.21}) + 1.569 \times 10^3 \times (3.221 \times 10^{-6} - h_1^{-5.77}) + 2.68 \times 10^5 \times (1.317 \times 10^{-9} - h_1^{-9.33}) + \dots] - [- \frac{1}{4.85} \times (8.95 - h_1) + 22.246 \times (3.659 \times 10^{-3} - h_1^{-2.56}) + 2.57 \times 10^3 \times (1.496 \times 10^{-6} - h_1^{-6.12}) + \dots] \} \end{aligned} \quad (20)$$

按水深分别为 $h_{1a} = 8.8$ m, $h_{1b} = 8.6$ m, $h_{1c} = 8.4$ m...,将渠道分为 $I_a - I_a, I_b - I_b, I_c - I_c, I_d - I_d$... 等断面。用式(20)分别求出 2-2 断面与 $I_a - I_a, I_b - I_b, I_c - I_c, I_d - I_d$... 等若干断面之间的距离 ΔL 值,将这些计算结果列入(表 2),再用内查法求出当渠长 $L = 3\ 386$ m 时渠首水深 $h = 7.97$ m,并以各断面的计算结果绘制出整段渠道的水面曲线(如图 1 所示)。

表 2 水面曲线计算成果表

Tab. 2 The calculation charter of results on the curve of water

断面 section	水深 depths h_1/m	ΔL (级数解) progression solution						水力指数法,分段求和法 waterpower exponent law partition summation method		
		$n=0$	$n=0, \dots, 1$	$n=0, \dots, 2$	$n=0, \dots, 3$	$n=0, \dots, 4$	$n=0, \dots, 5$	$n=0,$ waterpower exponent law	分段求和法 partition summation method	
$I_a - I_a$	8.8	445	496.8	502.8	503.5	504.0	504.0	...	505	513
$I_b - I_b$	8.6	1 037.7	1 163.5	1 178.7	1 180.6	1 180.8	1 180.8	...	1 195	1 190
$I_c - I_c$	8.4	1 629.9	1 836.1	1 862.3	1 865.6	1 866.1	1 866.2	...	1 860	1 880
$I_d - I_d$	8.2	2 221.5	2 515.1	2 554.2	2 559.5	2 560.2	2 560.3	...	2 560	2 580
$I_e - I_e$	8.0	2 812.3	3 201.3	3 255.7	3 263.5	3 264.6	3 264.7	...	3 290	3 290
$I_f - I_f$	7.95	2 960.0	3 374.0	3 432.7	3 441.1	3 442.3	3 442.3	...	3 430	3 440

3.3 计算结果分析

(1) 表 2 中分别列出了级数解法,水力指数解法和分段求和法的 3 种计算结果(水力指数法和分段求和法计算过程略)。3 种方法的计算结果基本相同。

(2) 公式(19)中的 n 值范围是 $0 \rightarrow \infty$, (表 2) 中分别列出了 $n=0, n=0, \dots, 1, n=0, \dots, 2, n=0, \dots, 3, n=0, \dots, 4, n=0, \dots, 5$ 等计算结果,从中可以看出当 $n > 3$ 后的计算结果变化不大,只在小数点后的量在发生微小增加的现象,说明 n 值取值范围的变化与 a_1 型雍水水面曲线的变化规律相吻合。

4 结语

用级数解法计算棱柱体明渠水面曲线,有以下特点:(1) 将已知的正常水深 h_0 , 临界水深 h_k , 渠道底坡 i , 控制断面水深 h_2 , 水力指数 x, y 及 n 的取值范围^[1-6] 等代入式(19) 并加以整理后,就可得到只有 h_1 一个未知数的方程式(如方程(20) 式)。此时,只需将不同的 h_1 值代入方程,就可以求出控制断面与各计算断面的间距 L 值。计算简便快捷,适用于手算及电算;(2) 级数解法与水力指数法相比,计算结果相近,计算过程简单,不需查图表;与分段求和法相比,可以避免对平均水力要素、水力半径 $\bar{R} = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$ 、流速 $\bar{V} = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$ 、谢才系数 $\bar{C} = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)$ 、平均水力坡降 $j = \frac{\bar{V}^2}{C^2 \cdot R}$ 等

计算要素^[1-6] 的重复计算,可以大大减少计算工作量;(3) 综上所述,说明利用级数解法计算水面曲线,具有既简便快捷、又能满足和达到工程要求精度、从而提高工作效率的优点,是一种值得推广应用的新方法。但在各种不同类型水面曲线的计算中,对 n 值的取值范围还有待于再结合大量试验作进一步的探讨。

[参考文献]

- [1] 华东水利学院. 水力学[M]. 北京: 科学出版社, 1979.
- [2] 刘润生,李家星,王培莉. 水力学[M]. 南京: 河海大学出版社, 1992.
- [3] 黄文煌. 水力学[M]. 北京: 人民教育出版社, 1981.
- [4] 武汉水利电力学院水力学教研室. 水力计算手册[M]. 北京: 水利出版社, 1980.
- [5] 吴持恭. 水力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [6] 赵振兴,何建京. 水力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
- [7] 同济大学数学教研室. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1989.
- [8] 四川矿业学院数学教研室. 数学手册[M]. 北京: 科学出版社, 1978.
- [9] 郭双,王忠新,于力,等. 棱柱体渠道水面曲线的分析与计算[J]. 水利科技与经济, 1999, 5(1): 20.
- [10] 叶达忠,张丽萍. 非均匀流水面曲线自动计算及绘图[J]. 广西水利水电, 2004, (2): 103 - 105.