第 28 卷 第 1 期
2002 年 1 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 28, No. 1
Jan., 2002

研究简报

基于 LMI 的不确定性关联时滞大系统的分散鲁棒控制[1)]

桂卫华 谢永芳 吴 敏 陈 宁
（中南大学信息科学与工程学院 长沙 410083）
（E-mail：whgui@mail.csut.edu.cn）

关键词 数值界不确定性，时滞，分散控制，线性矩阵不等式，鲁棒性
中图分类号 TP273

DECENTRALIZED ROBUST CONTROL FOR UNCERTAIN INTERCONNECTED SYSTEMS WITH TIME-DELAY BASED ON LMI APPROACH

GUI Wei-Hua XIE Yong-Fang WU Min CHEN Ning
(College of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083)
(E-mail: whgui@mail.csut.edu.cn)

Key words Value bounded uncertainty, time-delay, decentralized control, linear matrix inequality, robustness

1 引言

由于系统模型中往往含有不确定性和关联时滞，因而对不确定性时滞系统鲁棒控制的研究具有理论价值和实际意义. 在实际系统中，不确定项往往具有数值界表达形式[1]，这种表达形式不需要满足匹配条件，更具有一般性. 本文应用 LMI 方法[2,3]研究一类具有数值界，可不满足匹配条件的时变不确定性关联时滞大系统的分散鲁棒稳定化问题，得到了其可分散状态反馈镇定的充分条件，提出了该类大系统的分散鲁棒控制器的 LMI(Linear Matrix Inequality)设计方法，与以前黎卡提方程方法[4~6]相比，不需预先调整多个参数，计算简单，应用方便.

2 问题描述

考虑一类由 N 个子系统 L_i 构成的具有数值界可不满足匹配条件的不确定性关联时滞

1）国家“八六三”应用基础研究基金(863-511-9845-003)、(863-511-945-014)资助.
收稿日期 1999-07-14 收修改稿日期 2000-06-22

大系统 L,其子系统方程为

$$L_i:\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=[A_{ii}+\Delta A_{ii}]\boldsymbol{x}_i(t)+[B_i+\Delta B_i]\boldsymbol{u}_i(t)+\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\boldsymbol{x}_j(t-\tau_{ij}),\quad i=1,2,\cdots,N \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}_i(t)\in R^{n_i}$,$\boldsymbol{u}_i(t)\in R^{m_i}$分别为状态和控制向量; A_{ij},B_i 有适当的维数, A_{ii},B_i 代表标称系统;(A_{ii},B_i)是可控的, A_{ij}为第 j 个子系统对第 i 个子系统的关联作用矩阵, $\tau_{ij}\geqslant 0$ 表示关联项中的滞后时间. $\Delta A_{ii},\Delta B_i$ 为时变不确定项,它们有如下数值界

$$|\Delta A_{ii}|<D_{ii},\quad |\Delta B_i|<E_i,\quad i,j=1,2,\cdots,N \tag{2}$$

其中 D_{ij},E_i 为具有非负元素的实常数矩阵,并分别与 $\Delta A_{ii},\Delta B_i$ 同维. $|\Delta|<\bar{\Delta}$ 的含义是: $|e_{ij}|\leqslant\bar{e}_{ij}$, $i,j=1,2,\cdots,N$; $e_{ij},\bar{e}_{ij}$分别为矩阵 $\Delta,\bar{\Delta}$ 的第 ij 个对应元素.

本文的目的是对每一个子系统设计一个局部无记忆状态反馈控制律

$$\boldsymbol{u}_i(t)=K_i\boldsymbol{x}_i(t) \tag{3}$$

其中 $K_i\in R^{mi\times ni}$为局部反馈增益矩阵,使所得出的闭环复合大系统(4)稳定.

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=[A_{ii}+\Delta A_{ii}]\boldsymbol{x}_i(t)+[B_i+\Delta B_i]K_i\boldsymbol{x}_i(t)+\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\boldsymbol{x}_j(t-\tau_{ij}) \tag{4}$$

在以下讨论中,引进一个两值函数 $\delta(\cdot)$,定义为

$$\delta(E)=\begin{cases}0, & E=0,\\ 1, & E\neq 0.\end{cases}$$

引理 1[6]. 若 $n\times m$ 阶矩阵 ΔA 满足 $|\Delta A|<D$,则

$$\Omega(D)\geqslant\Delta A\Delta A^{\mathrm{T}},\quad \Gamma(D)\geqslant\Delta A^{\mathrm{T}}\Delta A,$$

式中

$$\Omega(D)=\begin{cases}\|DD^{\mathrm{T}}\|I, & \|DD^{\mathrm{T}}\|I<n\,\mathrm{diag}(DD^{\mathrm{T}}),\\ n\,\mathrm{diag}(DD^{\mathrm{T}}), & 其它,\end{cases}$$

$$\Gamma(D)=\begin{cases}\|D^{\mathrm{T}}D\|I, & \|D^{\mathrm{T}}D\|I<m\,\mathrm{diag}(D^{\mathrm{T}}D),\\ m\,\mathrm{diag}(D^{\mathrm{T}}D), & 其它,\end{cases}$$

这里 $\mathrm{diag}(R)=\mathrm{diag}(r_{11},r_{22},\cdots,r_{nn})$,其中 $R=(r_{ij})$为 n 阶对称实阵.

引理 2. 设 Y,Q 是具有适当维数的向量或矩阵,其中 $Q>0$, α,β 是给定的正数,则有

$$Y^{\mathrm{T}}Y<\alpha I\text{ 当且仅当}\begin{bmatrix}-\alpha I & Y^{\mathrm{T}}\\ Y & -I\end{bmatrix}<0,$$

$$Q^{-1}<\beta I\text{ 当且仅当}\begin{bmatrix}Q & I\\ I & \beta I\end{bmatrix}>0.$$

3 鲁棒稳定化控制器设计

定理 1. 对不确定性关联时滞大系统(1),如果存在矩阵 $Y_i\in R^{m_i\times n_i}$对称正定矩阵 $X_i,Z_i\in R^{n_i\times n_i}$及正数 α_i,β_i 使得下述线性矩阵不等式组(LMIs)

$$\begin{bmatrix}\bar{A}_{ii} & A_{i1}X_1 & A_{i2}X_2 & \cdots & A_{iN}X_N\\ X_1A_{i1}^{\mathrm{T}} & -\delta(A_{i1})Z_1 & & & \\ X_2A_{i2}^{\mathrm{T}} & & -\delta(A_{i2})Z_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ X_NA_{iN}^{\mathrm{T}} & & & & -\delta(A_{iN})Z_n\end{bmatrix}<0 \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha_i I & X_i\Gamma(D_{ii})^{\frac{1}{2}} \\ \Gamma(D_{ii})^{\frac{1}{2}}X_i & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} -\beta_i I & Y_i\Gamma(E_i)^{\frac{1}{2}} \\ \Gamma(E_i)^{\frac{1}{2}}Y_i^{\mathrm{T}} & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{7}$$

成立,则大系统(1)是分散能稳定化的,且 $K_i=Y_iX_i^{-1}$ 是系统(1)的一个分散稳定化控制律.其中

$$\overline{A}_{ii} = X_iA_{ii}^{\mathrm{T}} + A_{ii}X_i + Y_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}} + B_iY_i + 2I + \alpha_iI + \beta_iI + \sum_{j=1}^{N}\delta(A_{ji})Z_i.$$

证明. 在定理 1 的条件下,取控制律(3),其闭环复合系统为(4). 取 Lyapunov 函数

$$V(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}P_i\boldsymbol{x}_i + \sum_{j=1}^{N}\int_{t-\tau_{ij}}^{t}\delta(A_{ij})\boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}H_j\boldsymbol{x}_j\mathrm{d}\tau_i\right),$$

其中 P_i,H_j 为正定对称矩阵. 则沿系统(4)的导数

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\boldsymbol{x}) = &\sum_{i=1}^{n}\left\{\dot{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}P_i\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}P_i\dot{\boldsymbol{x}}_i+\sum_{j=1}^{N}\delta(A_{ij})\boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}H_j\boldsymbol{x}_j-\sum_{j=1}^{N}\delta(A_{ij})\boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}(t-\tau_{ij})H_j\boldsymbol{x}_j(t-\tau_{ij})\right\} = \\
&\sum_{i=1}^{N}\Big\{\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}(A_{ii}^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_{ii}+\Delta A_{ii}^{\mathrm{T}}P_i+P_i\Delta A_{ii}+K_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iB_iK_i+K_i^{\mathrm{T}}\Delta B_i^{\mathrm{T}}P_i+P_i\Delta B_iK_i)\boldsymbol{x}_i+ \\
&\sum_{j=1}^{N}2\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}P_iA_{ij}\boldsymbol{x}_j(t-\tau_{ij})+\sum_{j=1}^{N}\delta(A_{ij})\boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}H_j\boldsymbol{x}_j-\sum_{j=1}^{N}\delta(A_{ij})\boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}(t-\tau_{ij})H_j\boldsymbol{x}_j(t-\tau_{ij})\Big\} \leqslant \\
&\sum_{i=1}^{N}\Big\{\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}(A_{ii}^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_{ii}+K_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iB_iK_i+2P_iP_i+\Gamma(D_{ii})+K_i^{\mathrm{T}}\Gamma(E_i)K_i)\boldsymbol{x}_i+ \\
&\sum_{j=1}^{N}2\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}P_iA_{ij}\boldsymbol{x}_j(t-\tau_{ij})+\sum_{j=1}^{N}\delta_i(A_{ij})\boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}H_j\boldsymbol{x}_j-\sum_{j=1}^{N}\delta_i(A_{ij})\boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}(t-\tau_{ij})H_j\boldsymbol{x}_j(t-\tau_{ij})\Big\}
\end{aligned} \tag{8}$$

由引理 1 可知,$\Gamma(D_{ii})$,$\Gamma(E_i)$均为正定或半正定矩阵,可分解为 $\Gamma(D_{ii})=\Gamma(D_{ii})^{\frac{1}{2}}\Gamma(D_{ii})^{\frac{1}{2}}$,$\Gamma(E_i)=\Gamma(E_i)^{\frac{1}{2}}\Gamma(E_i)^{\frac{1}{2}}$,故存在 $\alpha_i>0,\beta_i>0$ 使得

$$\Gamma(D_{ii})<\alpha_iP_iP_i,\quad K_i^{\mathrm{T}}\Gamma(E_i)K_i<\beta_iP_iP_i \tag{9}$$

由式(9)可得到

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\boldsymbol{x}) < &\sum_{i=1}^{N}\Big\{\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}(A_{ii}^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_{ii}+K_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iB_iK_i+(2+\alpha_i+\beta)P_iP_i+K_i^{\mathrm{T}}\Gamma(E_i)K_i)\boldsymbol{x}_i+ \\
&\sum_{j=1}^{N}2\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}P_iA_{ij}\boldsymbol{x}_j(t-\tau_{ij})+\sum_{j=1}^{N}\delta(A_{ij})\boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}H_j\boldsymbol{x}_j-\sum_{j=1}^{N}\delta(A_{ij})\boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}(t-\tau_{ij})H_j\boldsymbol{x}_j(t-\tau_{ij})\Big\} = \\
&\sum_{i=1}^{N}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_i(t)\\ \boldsymbol{x}_1(t-\tau_{i1})\\ \boldsymbol{x}_2(t-\tau_{i2})\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_N(t-\tau_{iN})\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}
\begin{bmatrix}\widetilde{A}_{ii} & P_iA_{i1} & P_iA_{i2} & \cdots & P_iA_{iN}\\ A_{i1}^{\mathrm{T}}P_i & -\delta(A_{i1})H_1 & & & \\ A_{i2}^{\mathrm{T}}P_i & & -\delta(A_{i2})H_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ A_{iN}^{\mathrm{T}}P_i & & & & -\delta(A_{iN})H_N\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_i(t)\\ \boldsymbol{x}_1(t-\tau_{i1})\\ \boldsymbol{x}_2(t-\tau_{i2})\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_N(t-\tau_{iN})\end{bmatrix},
\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{A}_{ii}=A_{ii}^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_{ii}+K_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iB_iK_i+2P_iP_i+\alpha_iP_iP_i+\beta_iP_iP_i+\sum_{i=1}^{N}\delta(A_{ji})H_i$.

由 Lyapunov 稳定性原理知,如果

$$\begin{bmatrix} \widetilde{A}_{ii} & P_iA_{i1} & P_iA_{i2} & \cdots & P_iA_{iN} \\ A_{i1}^{\mathrm{T}}P_i & -\delta(A_{i1})H_1 & & & \\ A_{i2}^{\mathrm{T}}P_i & & -\delta(A_{i2})H_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ A_{iN}^{\mathrm{T}}P_i & & & & -\delta(A_{iN})H_N \end{bmatrix} < 0 \tag{10}$$

则系统(1)是稳定的.

对式(10)左边的矩阵分别左乘和右乘矩阵 block-diag$(P_i^{-1}, P_1^{-1}, P_2^{-1}, \cdots, P_N^{-1})$可得

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_{ii} & A_{i1}P_1^{-1} & A_{i2}P_2^{-1} & \cdots & A_{iN}P_N^{-1} \\ P_1^{-1}A_{i1}^{\mathrm{T}} & -\delta(A_{i1})P_1^{-1}H_1P_1^{-1} & & & \\ P_2^{-1}A_{i2}^{\mathrm{T}} & & -\delta(A_{i2})P_2^{-1}H_2P_2^{-1} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ P_N^{-1}A_{iN}^{\mathrm{T}} & & & & -\delta(A_{iN})P_N^{-1}H_NP_N^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{11}$$

其中 $\hat{A}_{ii} = P_i^{-1}A_{ii}^{\mathrm{T}} + A_{ii}P_i^{-1} + P_i^{-1}K_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}} + B_iK_iP_i^{-1} + 2I + \alpha_iI + \beta_iI + \sum_{i=1}^{N}\delta(A_{ji})P_i^{-1}H_iP_i^{-1}$，记 $X_i = P_i^{-1}$，$Y_i = K_iP_i^{-1}$，$Z_i = P_i^{-1}H_iP_i^{-1}$，则 $X_i > 0$，$Z_i > 0$，由式(11)可知式(5)成立.

式(11)等价于 $X_i\Gamma(D_{ii})X_i < \alpha_iI$，$Y_i^{\mathrm{T}}\Gamma(E_i)^{\mathrm{T}}Y_i < \beta_iI$，由引理 2 可知当且仅当式(6)，(7)成立时，式(9)成立，由此即得证定理之结论. 证毕.

定理 1 给出了大系统(1)存在分散鲁棒稳定化控制器的一个充分条件. 在实际工程应用中，为了保证系统良好的动态性能和抑制测量噪声，常采用较小反馈增益的控制律[7,8]. 考虑

$$Y_i^{\mathrm{T}}Y_i < \theta_iI, \quad X_i^{-1} < \gamma_iI \tag{12}$$

其中 $\theta_i > 0$，$\gamma_i > 0$，则 $K_i^{\mathrm{T}}K_i = \theta_iX_i^{-1}Y_i^{\mathrm{T}}Y_iX_i^{-1} < \theta_i\gamma_i^2I$. 故可通过使得 θ_i，γ_i 的极小化来获得具有较小增益的反馈矩阵，即

$$\min\left(\sum_{i=1}^{N}\theta_i + \sum_{i=1}^{N}\gamma_i\right)$$

约束条件为：式(5)～(7)和式(13).

$$\begin{bmatrix} -\theta_iI & Y_i^{\mathrm{T}} \\ Y_i & -I \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} X_i & I \\ I & \gamma_iI \end{bmatrix} > 0 \tag{13}$$

这是一个具有 LMIs 约束的凸优化问题，可以用 LMI 工具软件直接求解. 若该问题有解，则 $K_i = Y_iX_i^{-1}$ 提供了一个具有较小反馈增益参数的分散稳定化控制律.

4 结束语

针对有数值界不确定线性关联时滞大系统，给出了分散鲁棒控制器，其存在性依赖于相应的 LMIs 的解. 通过求解受 LMI 约束的凸优化问题，提出了具有较小反馈增益的 LMI 设计方法. 该方法没有参数调整过程，求解应用方便，值得在国内推广.

参 考 文 献

1 Mehdi D, Hamid M A, Perrin F. Robustness and optimality of linear quadratic controller for uncertain systems. *Au-*

tomatica, 1996, **32**(7): 1081～1083

2 Boyd S *et al*. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM, Philadelphia, 1994

3 谢永芳，桂卫华，吴敏. 基于线性矩阵不等式的分散 H_2/H_∞ 控制的次优设计. 自动化学报，2000，**26**(2):263～266

4 Trinh H, Aldeen M A. A comment on "Decentralized stabilization of large scale interconnected systems with delays". *IEEE Trans. Autom. Control*, 1995, **40**(5): 914～916

5 俞立，陈国定. 一类关联时滞系统的分散稳定化控制器设计. 控制与决策，1997，**12**(5):559～564

6 刘新宇，高立群，张文力. 不确定线性组合系统的分散镇定与输出跟踪. 信息与控制，1998，**27**(5):342～350

7 Makarand S Phatak, S Sathiya Keerthi. Gain optimization under control structure and stability region constraints. *Int. J. Control*, 1996, **63**(5): 849～864

8 Xie Y F, Gui H, Liu X Y, Wu M. Decentralized robust stabilizing control design for interconnected time-varying uncertain systems. 控制理论与应用，1999，**16**(6):903～906

桂卫华　教授、博士生导师. 目前主要研究方向为工业大系统递阶和分散控制理论及应用、鲁棒控制、复杂生产过程建模与控制.

谢永芳　1999 年毕业于中南工业大学信息科学与工程学院，获工学博士学位. 主要研究方向为分散控制和鲁棒控制、H_∞ 控制理论及应用、生产过程控制.

吴　敏　1996 年至 1999 年为日本东京工业大学客座研究员，1999 年获博士学位. 现为中南工业大学信息工程学院教授、博士生导师. 目前主要研究方向为鲁棒控制、智能控制和非线性控制.

陈　宁　1995 年获中南工业大学自控系工学硕士学位，现为该校信息科学与工程学院教师，在读博士. 研究方向为 LMI 方法及应用、大系统分散控制、H_∞ 控制和结构奇异值控制.