第17卷 第6期　　自 动 化 学 报　　Vol. 17, No. 6
1991年11月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Nov., 1991

摄动系统的多回路鲁棒控制[1)]

戴连奎　吕勇哉
(浙江大学工业控制研究所，杭州)

摘　　要

本文针对动态特性未知的参数摄动系统，研究了多回路鲁棒控制问题. 在摄动系统开环稳定的假设下，证明了控制问题存在解的充分必要条件，并提出了相应的控制器参数在线综合算法.

关键词: 摄动系统，分散鲁棒控制，多回路控制结构，鲁棒性.

一、引　　言

针对线性定常多变量系统的伺服控制问题，Davison[1,2] 提出了"鲁棒控制器"的概念，并给出了实现鲁棒控制的条件. 对于某一线性定常被控过程，假设存在某一控制器，当过程参数在某一狭小的邻域内发生摄动时，此控制器仍能使闭环系统具有良好的渐近跟踪性能与调节性能；则称该控制器为"鲁棒控制器". 基于这些结果，Davison[3,4] 研究了动力学特性未知的线性定常系统的鲁棒控制问题.

然而，实际工业过程所发生的参数摄动可能是很大的，并不象 Davison 所假设的那种小范围邻域摄动. 本文针对动态特性未知的具有大范围参数摄动的被控系统，提出了多回路鲁棒控制问题. 在被控系统全局稳定的假设下，本文证明了控制问题存在解的条件，并提出了相应的控制器参数在线综合算法.

二、问题的提出

假设一个被控过程开环稳定，且可描述为以下具有N个控制站的线性时不变系统：

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{N} b_i u_i + E\boldsymbol{\omega}, \\
y_i &= c_i\boldsymbol{x} + d_i u_i + f_i\boldsymbol{\omega}, \\
e_i &= y_i - y_i^r,\ i = 1, 2, \cdots, N.
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中 $\boldsymbol{x} \in R^n$ 为状态；$\boldsymbol{\omega} \in R^q$ 为过程未知扰动；u_i、y_i、y_i^r、e_i 分别为第 i 个控制站的控制

本文于1989年12月28日收到.
1) 本文的研究工作得到国家自然科学基金和中国石化总公司的资助.

变量、被控变量、设定值与控制误差，均为标量.

令

$$B \triangleq (b_1, b_2, \cdots, b_N),$$

$$D \triangleq \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & d_N \end{pmatrix}, \ C \triangleq \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}.$$

假设(1)式中各系数阵(包括系统的阶次)均是未知的，且各系数阵参数存在一定范围内的摄动，即

$$A \in \bar{A} \subset R^{n\times n}, \ B \in \bar{B} \subset R^{n\times N},$$
$$C \in \bar{C} \subset R^{N\times n}, \ D \in \bar{D} \subset R^{N\times N}.$$

其中 $\bar{A}$、$\bar{B}$、$\bar{C}$、$\bar{D}$ 分别为各系数阵的有限摄动区域，并假设 $\bar{A}$、$\bar{B}$、$\bar{C}$、$\bar{D}$ 均为凸集. 另外，假定 y_i, $i=1,2,\cdots,N$, 均是实际可测量的.

现在考虑以下的分散鲁棒控制问题：考虑未知过程(1)式，寻求N个线性时不变输出反馈单回路局部控制器使得

1) 对于任一系数阵 $A\in\bar{A}$、$B\in\bar{B}$、$C\in\bar{C}$、$D\in\bar{D}$，闭环系统均为渐近稳定；

2) 对于摄动域内的任一系数阵 A、B、C、D，当扰动 ω 与设定值 y_i^r 发生阶跃变化时，均有 $\lim\limits_{t\to\infty} e_i(t)=0$, $i=1,2,\cdots,N$, 以后称这一性质为终值无偏性；

3) 当各系数阵在摄动区域内发生摄动时，即 $A\to A'\in\bar{A}$, $B\to B'\in\bar{B}$, $C\to C'\in\bar{C}$, $D\to D'\in\bar{D}$, 闭环系统仍是渐近稳定且终值无偏的，以后称这一性质为鲁棒性；

4) 设 $S_1,\cdots,S_N$ 为依次投入的各单回路控制器，要求在整个综合过程中，闭环系统总是渐近稳定的，且由 $S_1,\cdots,S_l(l\leqslant N)$ 与被控过程所组成的系统均具有渐近稳定性、终值无偏性与大范围鲁棒性.

考虑未知过程(1)式，作以下变换：

$$T \triangleq D - CA^{-1}B,$$

即

$$T_{ij} \triangleq \begin{cases} d_i - c_i A^{-1} b_i, & i=j, \\ -c_i A^{-1} b_j, & i\neq j, \end{cases}$$
$$i,j=1,2,\cdots,N.$$

其中T为摄动系统的静态增益阵，T_{ij} 为 $(u_j - y_i)$ 通道的静态增益. 由被控过程全局稳定的假设知，以上变换恒存在.

设摄动域 $\bar{A}$、$\bar{B}$、$\bar{C}$、$\bar{D}$ 经以上变换所对应的映射为 $\bar{T}$，而 T_{ij} 将对应 $\bar{T}_{ij}$, $i,j=1,2,\cdots,N$, 其中 $\bar{T}_{ij}$ 为 T_{ij} 的最大连通摄动域. 显然，由 $\{\bar{T}_{ij}, \ i,j=1,2,\cdots,N\}$ 所组成的 $N\times N$ 维超盒将包含 $\bar{T}$，为讨论方便，令

$$\bar{T} \triangleq \{T_{ij} | T_{ij}\in\bar{T}_{ij}, \ i,j=1,2,\cdots,N\}.$$

定理 1 给出了当对象特性发生大范围摄动时，前述多回路结构下的鲁棒控制问题存在解的条件.

定理 1. 对于开环稳定的被控过程(1)式，存在多回路鲁棒控制器的充分必要条件是

满足以下N个条件：

$$\Delta i \triangleq \det\begin{pmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{i1} & \cdots & T_{ii} \end{pmatrix} \neq 0, \ \forall T_{ij} \in \overline{T}_{ij}. \tag{2}$$

$$i,j = 1,2,\cdots,N.$$

因 $\overline{T}_{ij}$ 为凸集，上式等价于 Δi 不变号且不为零.

在证明定理 1 前，首先来证明引理 1.

引理 1. 考虑某一开环全局稳定的摄动系统 $\Sigma\ (A,B,C,D)$，其中 $A \in \overline{A} \subset R^{n\times n}$，$B \in \overline{B} \subset R^{n\times m}$，$C \in \overline{C} \subset R^{r\times n}$，$D \in \overline{D} \subset R^{r\times m}$；而对应的静态增益阵为 $T \in \overline{T} \subset R^{r\times m}$. 假设

1) $\mathrm{Rank}(T) = \gamma$，$\forall T \in \overline{T}$；

2) $\exists K \in R^{m\times r}$，使 TK 为渐近阵，$\forall T \in \overline{T}$；则存在某一标量 $\varepsilon^* > 0$，使以下增广系统全局稳定.

$$A^* \triangleq \begin{pmatrix} A & \varepsilon BK \\ C & \varepsilon DK \end{pmatrix}, \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^*],$$

$$\forall A \in \overline{A}, \ \forall B \in \overline{B}, \ \forall C \in \overline{C}, \ \forall D \in \overline{D}.$$

证明. 对于摄动域内的任一系数阵 A、B、C、D，由假设条件可知，A 与 TK 均为渐近稳定阵. 令 $F \triangleq TK$，则存在对称正定阵 M、Q 使下式成立：

$$\begin{cases} A^{\tau}M + MA = -I, \\ F^{\tau}Q + QF = -I. \end{cases} \tag{3}$$

对 A^* 作相似变换，$A^* \to P^{-1}A^*P$，其中

$$P = \begin{bmatrix} I & -A^{-1}BK \\ 0 & -\dfrac{I}{\varepsilon} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon > 0,$$

则

$$P^{-1}A^*P = \begin{pmatrix} A + \varepsilon A^{-1}BKC & \varepsilon A^{-1}BK(D - CA^{-1}B)K \\ \varepsilon C & \varepsilon(D - CA^{-1}B)K \end{pmatrix}.$$

代入 F，得

$$P^{-1}A^*P = \begin{pmatrix} A + \varepsilon A^{-1}BKC & \varepsilon A^{-1}BKF \\ \varepsilon C & \varepsilon F \end{pmatrix}. \tag{4}$$

由于 $P^{-1}A^*P$ 与 A^* 等效，故对系统 $\dot{\boldsymbol{z}} = P^{-1}A^*P\boldsymbol{z}$，取以下的李亚普诺夫函数：

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{z}^{\tau}(t)\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}\boldsymbol{z}(t).$$

由 $M = M^{\tau} > 0$，$Q = Q^{\tau} > 0$，必有 $V \geqslant 0$，$\forall \boldsymbol{z} \in R^{n+r}$，当且仅当 $\boldsymbol{z} = 0$ 时，$\boldsymbol{v}$ 才为零，则

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t) = \boldsymbol{z}^{\tau}(t)W\boldsymbol{z}(t).$$

其中

$$W \triangleq (P^{-1}A^*P)^\tau \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} (P^{-1}A^*P).$$

代入(4)式后,得

$$W = \begin{pmatrix} A^\tau M + MA + \varepsilon G & \varepsilon H \\ \varepsilon H^\tau & \varepsilon(F^\tau Q + QF) \end{pmatrix}.$$

其中 $G \triangleq (A^{-1}BKC)^\tau M + MA^{-1}BKC$, $H = MA^{-1}BKF + C^\tau Q$

将(3)式代入上式，整理得

$$\frac{W}{\varepsilon} = \begin{pmatrix} -I/\varepsilon + G & H \\ H^\tau & -I \end{pmatrix}.$$

故

$$\frac{1}{\varepsilon}\dot{\boldsymbol{v}}(t) = (\boldsymbol{z}_1^\tau(t)\boldsymbol{z}_2^\tau(t)) \begin{pmatrix} -I/\varepsilon + G & H \\ H^\tau & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1(t) \\ \boldsymbol{z}_2(t) \end{pmatrix},$$

或者

$$\dot{\boldsymbol{v}}/\varepsilon = \boldsymbol{z}_1^\tau(-I/\varepsilon + G)\boldsymbol{z}_1 + 2\boldsymbol{z}_1^\tau H\boldsymbol{z}_2 - \boldsymbol{z}_2^\tau\boldsymbol{z}_2.$$

1) 若 $\boldsymbol{z}_1 = 0$, 则 $\dot{\boldsymbol{v}}/\varepsilon = -\boldsymbol{z}_2^\tau\boldsymbol{z}_2 \leqslant 0$;

2) 若 $\boldsymbol{z}_1 \neq 0$, 则存在某一标量 $\varepsilon^* > 0$, 使

$$\dot{\boldsymbol{v}}/\varepsilon < 0, \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^*].$$

即 $\forall A \in \bar{A}$, $\forall B \in \bar{B}$, $\forall C \in \bar{C}$, $\forall D \in \bar{D}$, 存在某一标量 $\varepsilon^*(A,B,C,D) > 0$,使

$$\dot{\boldsymbol{v}}/\varepsilon < 0, \ \forall \boldsymbol{z} \in R^{n+r}, \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^*].$$

当且仅当 $\boldsymbol{z} = 0$ 时, $\dot{\boldsymbol{v}}/\varepsilon = 0$. 由李亚普诺夫稳定性判定定理知 A^* 稳定.

令

$$\varepsilon^*_{\min} = \min_{\substack{A \in \bar{A}, B \in \bar{B}, \\ C \in \bar{C}, D \in \bar{D}}} \varepsilon^*(A,B,C,D).$$

则 $\forall A \in \bar{A}$, $\forall B \in \bar{B}$, $\forall C \in \bar{C}$, $\forall D \in \bar{D}$, 以下增广系统均稳定:

$$A^* = \begin{pmatrix} A & \varepsilon BK \\ C & \varepsilon DK \end{pmatrix}, \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^*_{\min}].$$ 证毕

引理 1 表明,对于一个开环稳定的具有大范围参数摄动的被控过程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} + E\boldsymbol{\omega},$$
$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{u} + F\boldsymbol{\omega},$$
$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^r.$$

其中 $\boldsymbol{y}(t)$、$\boldsymbol{y}^r(t)$、$\boldsymbol{e}(t)$ 分别为被控变量,设定值与控制误差. 如果存在某一常数阵 K, 使得与静态增益 T 的乘积 TK 在整个摄动区域内均为渐近稳定阵，则存在某一积分控制器

$$\boldsymbol{u} = \varepsilon K\boldsymbol{z}(t), \ \dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{e}(t),$$
$$\varepsilon \in (0, \varepsilon^*_{\min}],$$

使以下闭环系统在摄动区域内均为稳定:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & \varepsilon BK\\ C & \varepsilon DK\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}E\omega\\ F\omega-y^s\end{pmatrix}. \tag{5}$$

当扰动 ω 与设定值 y^s 发生阶跃变化时，由于(5)式渐近稳定，因而 $e(t)=\dot{z}(t)=0$，当 $t\to\infty$ 时，可见系统(5)式是终值无偏的.

另外，因闭环系统在摄动区域内均为渐近稳定，故当系数阵 A、B、C、D 在摄动域内缓慢变化时，系统(5)式均为渐近稳定且终值无偏，即具有全局范围内的鲁棒性.

定理 1 的证明.　　. 令 $T^i\triangleq\begin{pmatrix}T_{11}\cdots T_{1i}\\ \vdots\ \ \ddots\ \ \vdots\\ T_{i1}\cdots T_{ii}\end{pmatrix}$.

若 T^i 可逆，则

$$\det T^{i+1}=\det T^i\times\det\hat{T}_{i+1,i+1}. \tag{6}$$

其中

$$\hat{T}_{i+1,i+1}=T_{i+1,i+1}-T^*_{i+1,i}(T^i)^{-1}T^*_{i,i+1}.$$

这里 $T^*_{i+1,i}=(T_{i+1,1}\cdots T_{i+1,i})$，$T^*_{i,i+1}=(T_{1,i+1}\cdots T_{i,i+1})^\tau$.
而 $\hat{T}_{i+1,i+1}$ 实质上为局部控制器 $S_1,S_2,\cdots,S_i$ 闭合时，u_{i+1} 对 y_{i+1} 的静态增益.

必要性. 若存在某一摄动状态使 $\det T^i=0$，则由文献[3]的定理 2 可知，不存在任一反馈阵使闭环系统同时具有渐近稳定性、终值无偏性与鲁棒性，故条件(2)式必要.

充分性. 假设条件(2)式成立. 即 T_{11} 在摄动范围内符号不变且不包含零，令 $K_1=-\mathrm{sgn}(T_{11})$，其中 $\mathrm{sgn}(\cdot)$ 为符号函数. 则 $T_{11}K_1$ 在摄动范围内保持负值. 根据引理 1 的结论，存在某一单回路控制器 S_1，使得由 S_1 与被控过程所组成的闭环系统在整个摄动区域内均具有渐近稳定性，而被控变量 y_1 具有终值无偏性，跟踪设定值 y_1^s 的变化.

当 $S_1,\cdots,S_i(i\geqslant 1)$ 处于闭环时，u_{i+1} 对 y_{i+1} 的静态增益 $\hat{T}_{i+1,i+1}$ 为

$$\hat{T}_{i+1,i+1}=\det T^{i+1}/\det T^i.$$

由条件 (2) 式知 $\hat{T}_{i+1,i+1}$ 在摄动范围内符号不变且不包含零点，若令 $K_{i+1}=-\mathrm{sgn}(\hat{T}_{i+1,i+1})$，则 $\hat{T}_{i+1,i+1}K_{i+1}$ 在摄动范围内保持负值. 同样应用引理 1，则存在某一反馈控制器S_{i+1}，使得由 S_1, $S_2,\cdots$, S_{i+1} 与被控过程所组成的闭环系统在整个摄动区域内均具有渐近稳定性与终值无偏性.

根据数学归纳法原理可知：如果条件(2)式成立，则存在N个控制器 $S_1,S_2,\cdots,S_N$ 使得闭环系统在整个摄动区域内均具有渐近稳定性与终值无偏性.

证毕

三、摄动系统多回路控制系统设计

如果条件 (2) 成立，则可依次设计各 SISO 局部控制器并“在线”整定控制器参数，以实现对摄动系统的分散鲁棒控制，如图 1 所示.

下面以 PI 控制律为例，说明“在线”整定过程.

首先对于控制器 S_1，选取控制律为

$$u_1 = -\varepsilon_1 \mathrm{sgn}(T_{11})\left(e_1(t) + \frac{1}{T_{I,1}}\int_0^t e_1(\tau)d\tau\right).$$

其中 $\varepsilon_1 > 0$，$T_{I,1} > 0$ 均为 S_1 的可调参数，“在线”整定 ε_1，$T_{I,1}$ 以使闭环系统具有满意的响应，同时对过程特性的摄动均能保证闭环系统的稳定性。

其次对控制器 $S_i, i = 2,\cdots,N$，选择控制律为

$$u_i = -\varepsilon_i \mathrm{sgn}(\hat{T}_{ii})\left(e_i(t) + \frac{1}{T_{I,i}}\int_0^t e_i(\tau)d\tau\right).$$

其中 $\hat{T}_{ii}$ 为 $S_1,\cdots,S_{i-1}$ 处于闭环时，通道 $u_i - y_i$ 之间的静态增益，而条件(2)式也保证 $\mathrm{sgn}(\hat{T}_{ii})$ 不变且不包含零，$\forall T_{kj} \in \overline{T}_{kj}$，$k,j = 1,2,\cdots,i$。这里，$\varepsilon_i > 0$，$T_{I,i} > 0$，均为 S_i 的可调参数，在 $S_1,\cdots,S_{i-1}$ 处于闭环时，以 $S_1,\cdots,S_{i-1}$ 与过程所组成的系统为被控对象，“在线”整个可调参数 ε_i，$T_{I,i}$ 在保证闭环系统的稳定性的前提下使闭环系统具有满意的响应。这里“闭环系统”是指由 $S_1,\cdots,S_i$ 与过程所组成的系统。

许多复杂工业过程严格地说应该描述为具有强耦合的非线性时变系统。但是一个非线性时变系统通常可以逐步线性化而成为时变线性化系统。而且当工作点在一定范围内缓慢变化时，时变线性化系统又可等价为系数阵存在一定范围摄动的线性时不变系统。因此，前面所研究的问题适合于一大类非线性时变系统。

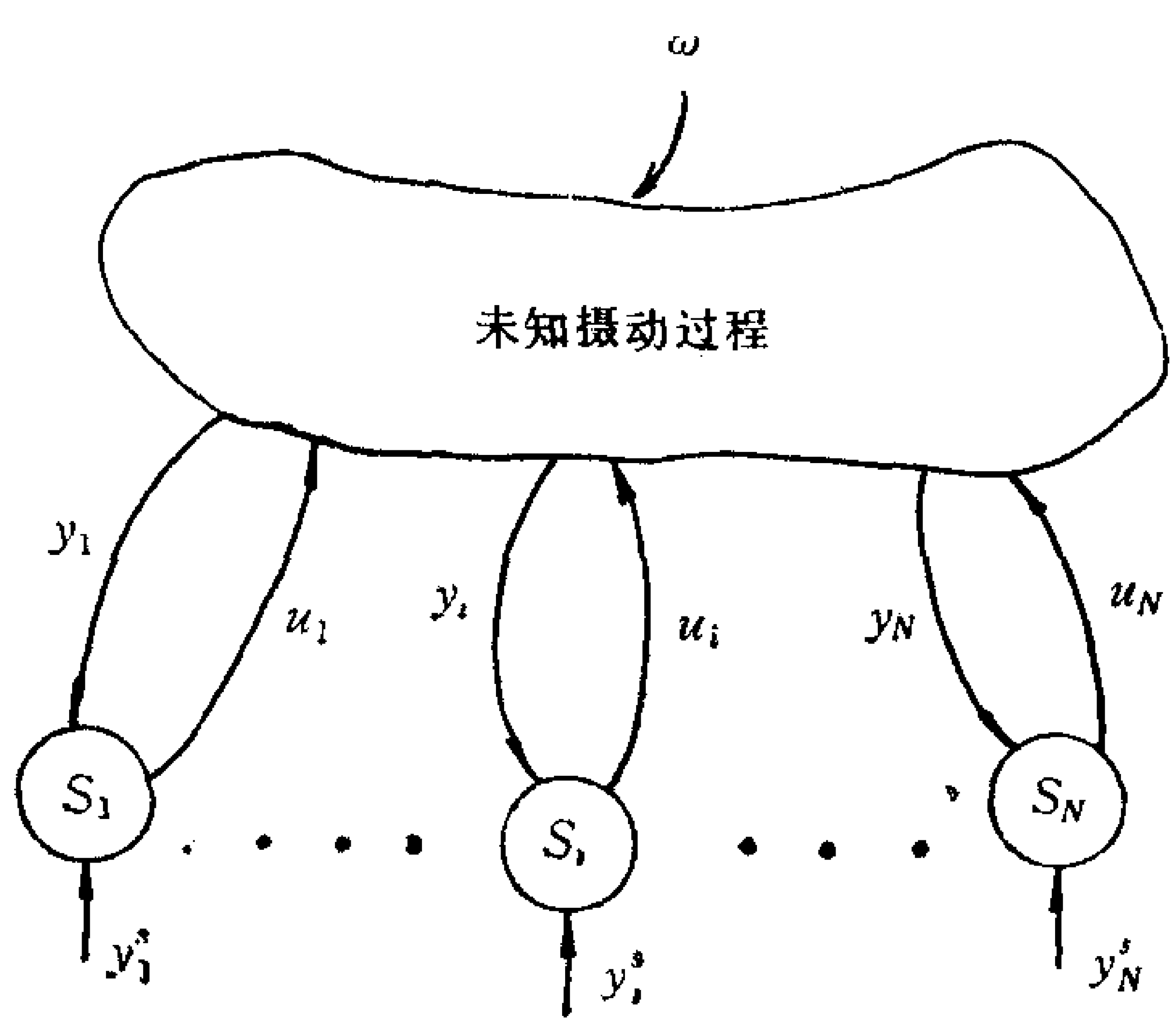


图 1 摄动系统的多回路鲁棒控制

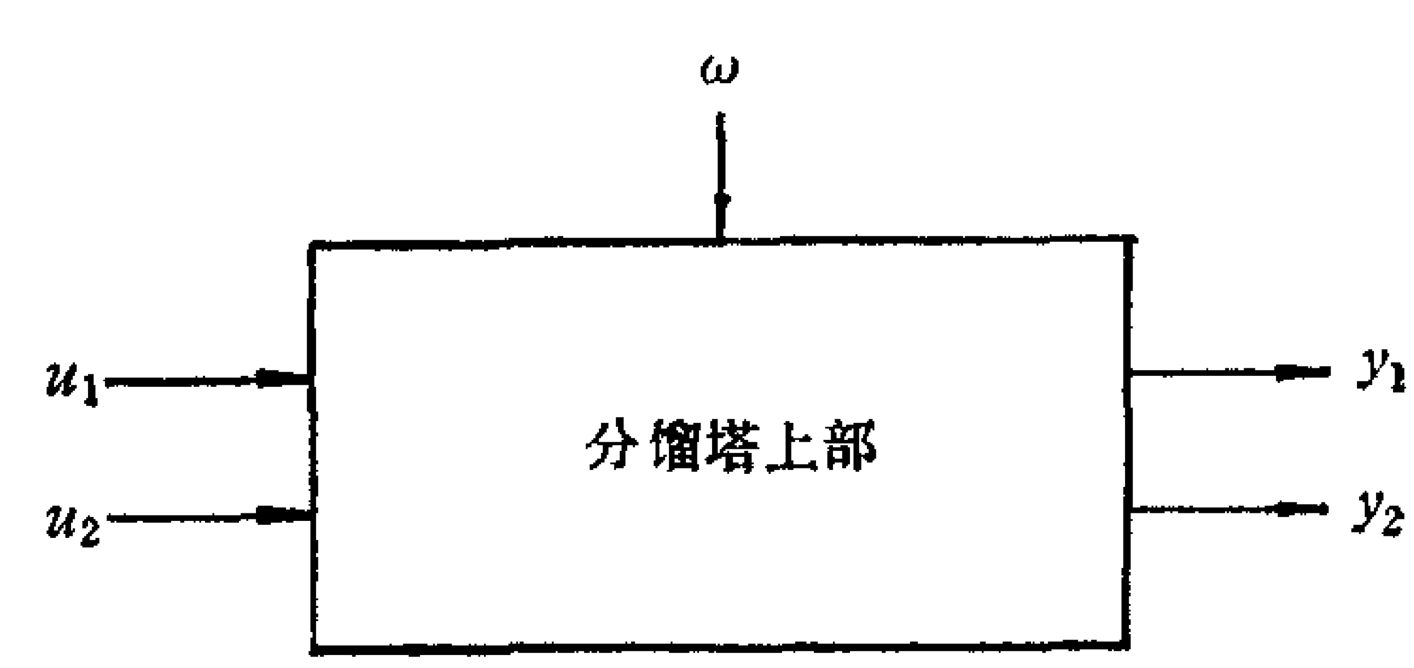


图 2 分馏塔上部温度控制问题

四、数 值 例 子

催化裂化装置分馏塔上部温度控制问题可用图 2 表示。其中 y_1、y_2 分别为塔顶温度与轻柴油馏出塔板温度，u_1、u_2 分别为塔顶回流量与一中段回流量，ω 为未知扰动。现要求设计某控制系统以实现 y_1、y_2 的高精度定值控制。

依据系统分析，输入输出之间具有以下的静态增益矩阵，而且该过程为开环稳定系统。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

其中 $T_{11} = -1.2 \sim -0.5℃/\%$，$T_{12} = -0.8 \sim -0.4℃/\%$，

$T_{21} = -0.5 \sim -0.3℃/\%$，$T_{22} = -1.6 \sim -1.0℃/\%$。

由于$T_{11} < 0$，$T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} > 0$ 恒成立，应用定理 1 可知图 3 所选择的分散控制结构是可行的，由此设计了相应的多回路控制系统。

以近似模型(8)为例，运用"在线"整定算法获得了如图 4 所示的仿真结果。

$$\begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{T_{11}}{2s+1} & \dfrac{T_{12}}{(2s+1)(6s+1)} \\ \dfrac{T_{21}}{(2s+1)(6s+1)} & \dfrac{T_{22}}{2s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1(s) \\ \omega_2(s) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

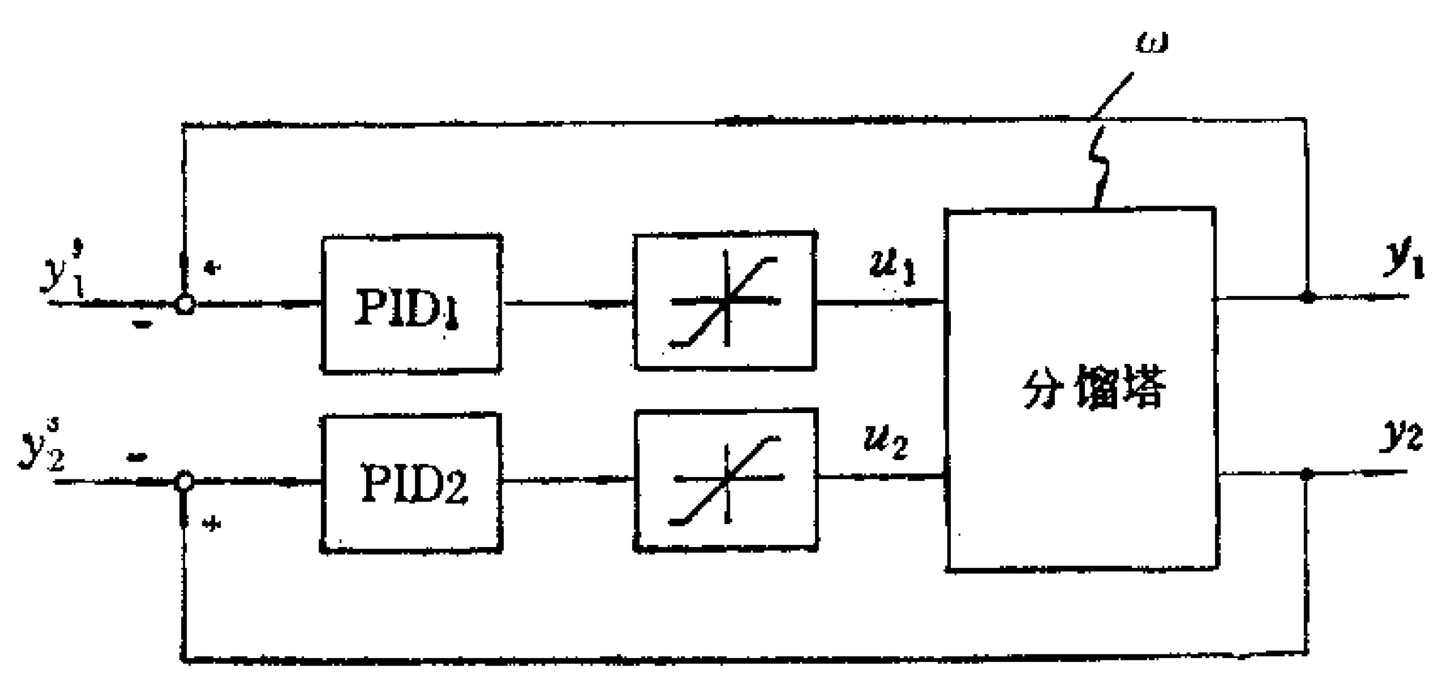
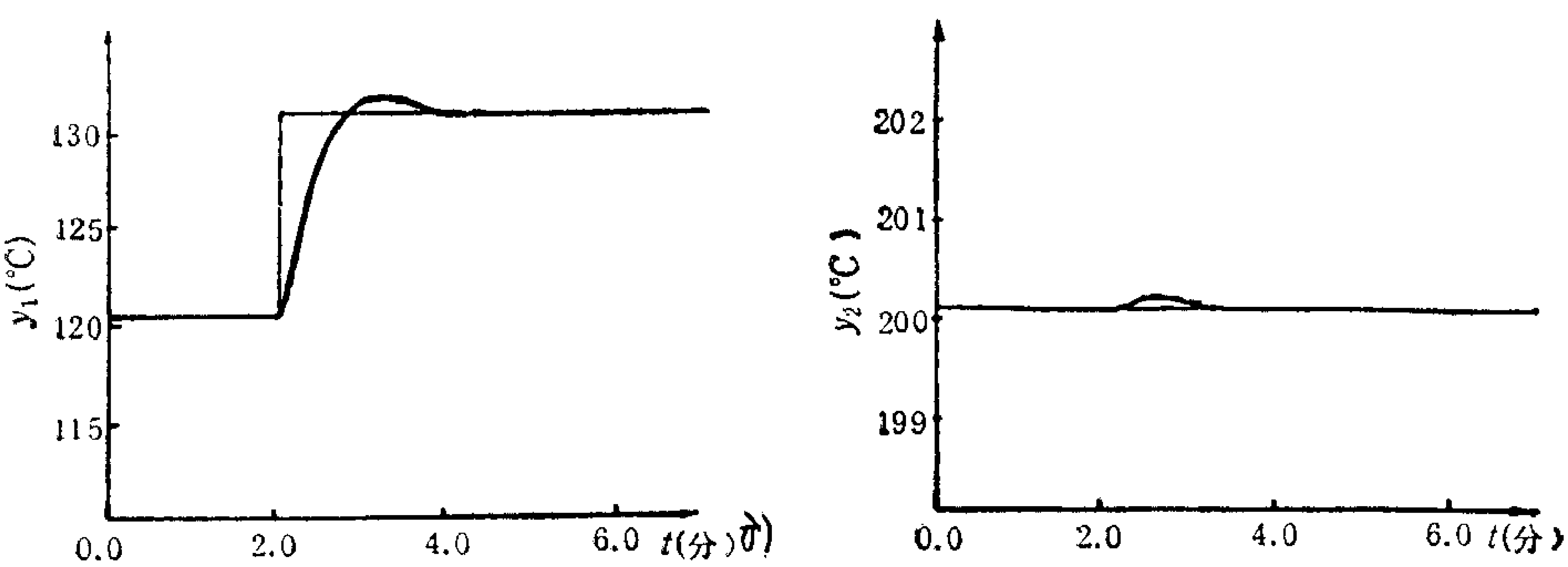
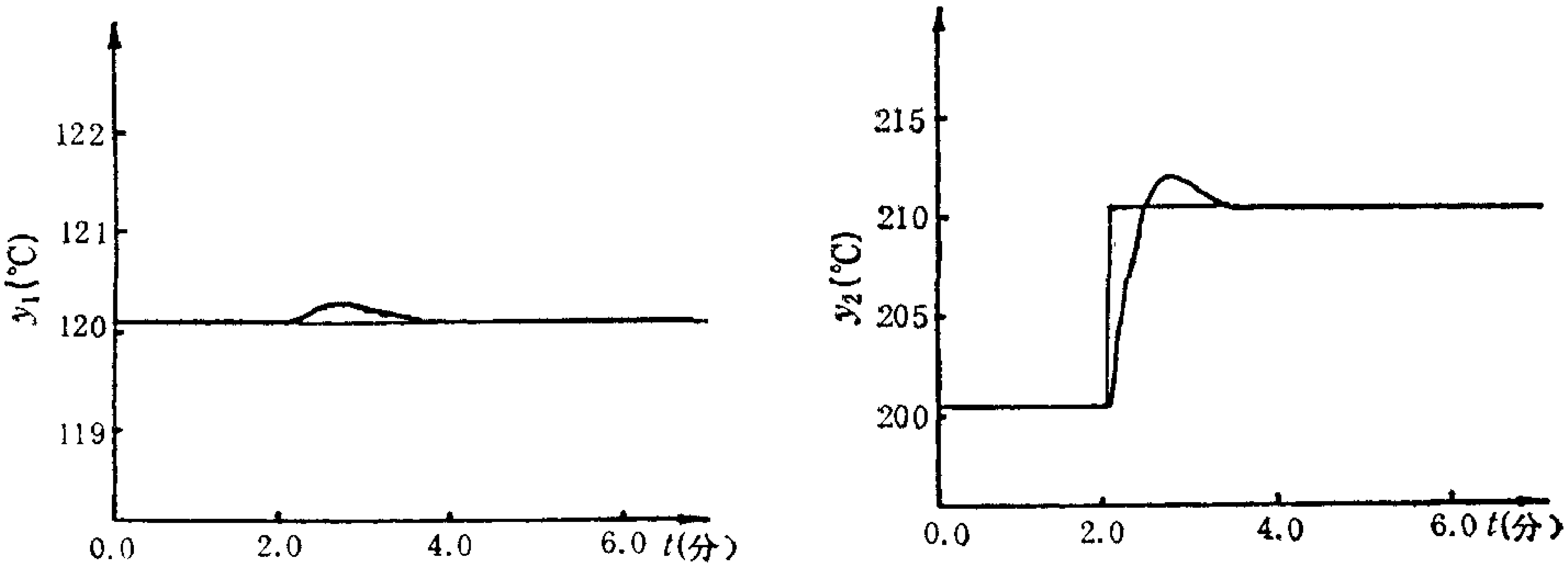


图 3　分馏塔多回路控制系统



(a)



(b)

图 4　分馏塔控制系统的仿真实验

(a) $\Delta y_1^s = 10$，$\Delta y_2^s = 0$，$\omega_1 = \omega_2 = 0$　(b) $\Delta y_1^s = 0$，$\Delta y_2^s = 10$，$\omega_1 = \omega$，

参 考 文 献

[1] Davison, E. J., The Robust Control of a Servomechanism Problem for Linear Time-Invariant Multivariable Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-21(1976), 25—34.

[2] Davison, E. J., The Robust Decentralized Control of a General Servomechanism Problem, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-21(1976) 14—24.

[3] Davison, E. J., Multivariable Tuning Regulators: The Feedforward and Robust Control of a General Servomechanism Problem, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-21(1976), 35—47.

[4] Davison, E. J., Decentralized Robust Control of a Unknown Systems Using Tuning Regulators, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-23(1978), 276—289.

ROBUST CONTROL OF PERTURBED SYSTEMS USING MULTILOOP TUNING REGULATORS

Dai Liankui Lu Yongzai

(Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract

This paper addressed the problem of determining a robust multiloop controller for a parameter-perturbed system with unknown process dynamics. For a perturbed system being open-loop stable, the necessary and sufficient conditions for a solution to the exist of the problem have been obtained. The robust multiloop controller can be synthesized by "on line" tuning approach.

Key words: Parameter-perturbed systen; decentraalized robust control; multiloop control structure; robustness.