

# 双连杆柔性臂轨迹跟踪的鲁棒控制<sup>1)</sup>

李元春

(吉林工业大学控制科学与工程系 长春 130025)

陆佑方

(吉林工业大学理学院 长春 130025)

唐保健

(吉林工业大学控制科学与工程系 长春 130025)

**摘 要** 研究了双连杆柔性臂轨迹跟踪的鲁棒控制问题。基于假设模态法和奇异摄动法,导出了双连杆柔性臂系统的动力学方程,并将系统模型分离为慢变和快变两个子系统。针对柔性臂的特点,提出了关节角的补偿控制思想,并且给出了补偿控制算法。对两个子系统分别采用滑模变结构控制和  $H^\infty$  控制,由此得到的组合控制使系统精确跟踪目标轨迹。研制了双连杆柔性臂实验台,并对文中提出的方法进行了实验。

**关键词** 双连杆柔性臂,轨迹跟踪控制,鲁棒控制。

## ROBUST CONTROL FOR TRAJECTORY TRACKING OF A TWO-LINK FLEXIBLE MANIPULATOR

LI Yuanchun

(Dept. Control Science & Engineering, Jilin University of Technology, Changchun 130025)

LU Youfang

(College of Sciences, Jilin University of Technology, Changchun 130025)

TANG Baojian

(Dept. Control Science & Engineering, Jilin University of Technology, Changchun 130025)

**Abstract** In this paper, the robust problem for trajectory tracking of a two link flexible manipulator is studied. Based on assumed mode method and singular perturbation method, dynamical equations of a two link flexible manipulator are derived, and the system is divided into a fast subsystem and a slow subsystem. Considering the characteristics of a flexible manipulator, a compensated controller is designed for each joint angle. Sliding mode variable structure control and  $H^\infty$  control are adopted respectively in the two sub-systems which together can follow the trajectory accurately. A two-link flexible manipulator station is manufactured for experiments using the method.

1)国家自然科学基金资助项目。

**Key words** Two-link flexible manipulator, trajectory tracking control, robust control.

## 1 引言

柔性机械臂是一个强耦合、非线性、时变的多输入多输出分布参数系统. 这类系统的固有特点是其大幅整体运动与小幅弹性振动的耦合, 并且具有逆运动学不确定性及多种不确定因素, 其动力学行为相当复杂. 针对这样一个复杂的控制对象, 同时控制连杆的整体运动及由弹性引起的振动是非常困难的<sup>[1]</sup>. 近年来, 柔性机械臂系统的控制问题已得到广泛关注, 现已提出许多控制方法, 如变结构控制<sup>[3]</sup>, 自适应控制<sup>[4]</sup>, 奇异摄动控制<sup>[5]</sup>等. 但是, 对既包含大范围整体运动, 又包含小范围弹性振动的柔性臂系统, 通过一种控制策略来达到系统控制要求是非常困难的.

本文基于假设模态法和奇异摄动理论, 将系统分为慢变和快变两个子系统. 在设计慢变子系统控制器时, 考虑了由非线性机械结构引起的结构不确定性, 利用滑模变结构控制方法设计了鲁棒控制器. 快变子系统是由弹性模态组成的高维系统, 但通常希望对其降维系统设计控制器. 此时, 非结构不确定性主要由未建模动力学产生. 因此, 在设计快变子系统控制器时, 利用  $H^\infty$  控制理论设计了鲁棒控制器, 用于克服非结构不确定性和扰动的影响. 另外, 针对柔性臂的特点, 提出了轨迹跟踪的准静态补偿控制思想, 并且给出了补偿控制算法.

## 2 数学模型

考虑在垂直平面内运动的双连杆柔性臂系统, 动坐标系选为假想刚体坐标系, 如图1所示. 在小变形假定情况下, 采用 Lagrange 假设模态法, 可得系统动力学方程为<sup>[6]</sup>

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + K\mathbf{q} = B\boldsymbol{\tau}, \quad (1)$$

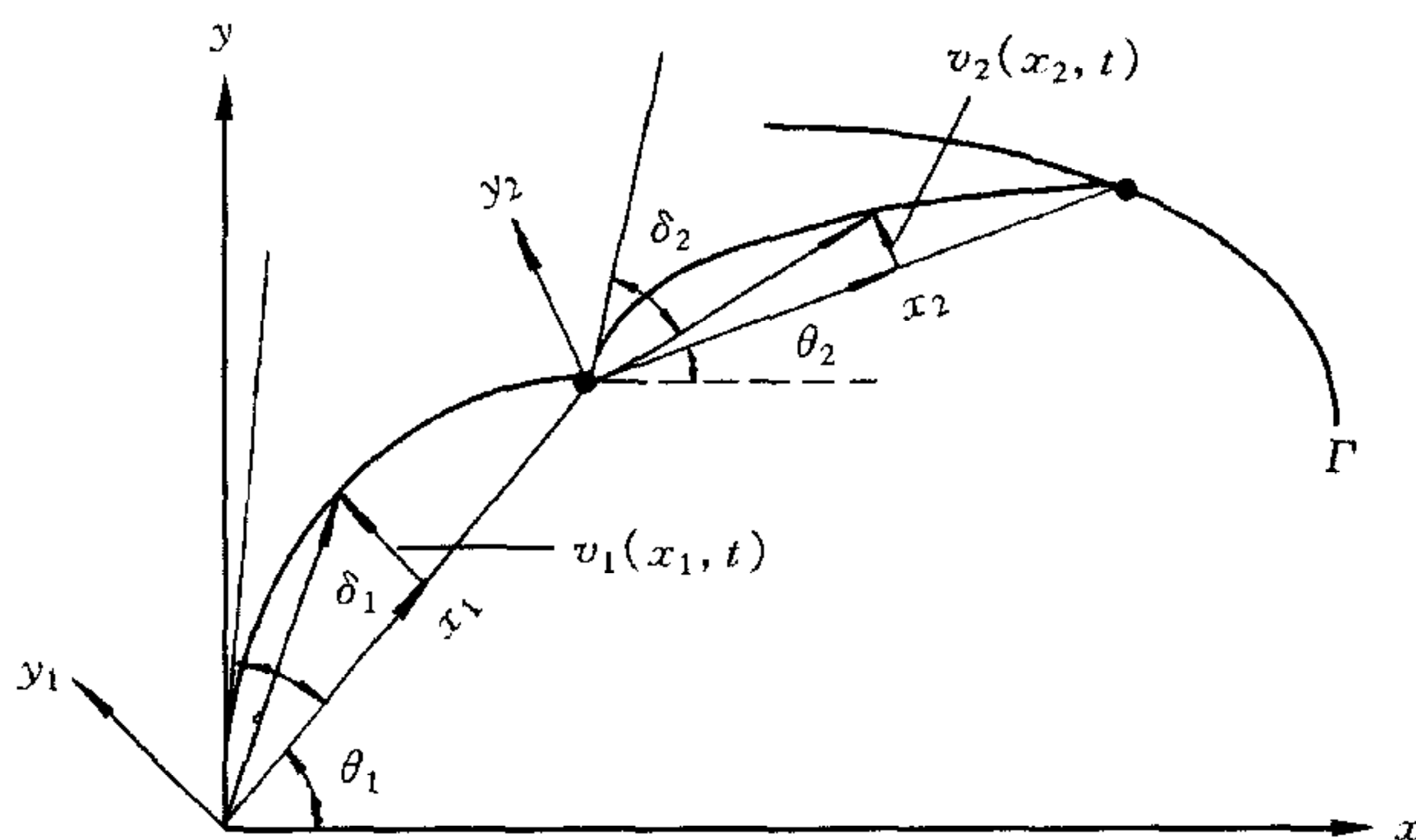


图1 双连杆柔性臂

或写成分块矩阵形式

$$\begin{bmatrix} M_{11}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}) & M_{12}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}) \\ M_{21}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}) & M_{22}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \\ f_2(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) \\ g_2(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\tau}, \quad (2)$$



其中  $q = [\theta^T, p^T]^T$ ,  $\theta = [\theta_1, \theta_2]^T$  为假想刚性关节角矢量,  $p = [p_{11}, \dots, p_{1n_1}, p_{21}, \dots, p_{2n_2}]^T$  为 2 个连杆弹性模态坐标矢量,  $K_1 = \text{diag}(k_{11}, \dots, k_{1n_1}, k_{21}, \dots, k_{2n_2})$  为刚度矩阵,  $B = [B_1^T, B_2^T]^T$  为系数矩阵.

连杆在动坐标系中的相对挠度

$$v_i(x_i, t) = \sum_{j=1}^{n_i} \varphi_j(x_i) p_{ij}(t) \quad (i = 1, 2), \quad (3)$$

其中  $\varphi_{ij}(x_i)$  为假设模态函数,  $p_{ij}(t)$  为模态坐标.

基于奇异摄动法将系统(2)分离为慢变和快变两个子系统. 令  $k = \min_{i=1,2} \{k_{ij}\}$ ,  $\mu = \frac{1}{k}$ ,

$\tilde{K} = \mu K_1$ ,  $z = \frac{1}{\mu} p$ ,  $H(\theta, p) = M^{-1}(\theta, p)$ , 则由式(2)得出系统奇异摄动模型

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & -H_{11}(\theta, \mu z) f_1(\theta, \dot{\theta}) - H_{12}(\theta, \mu z) f_2(\theta, \dot{\theta}) - H_{11}(\theta, \mu z) g_1(\theta, \dot{\theta}, \mu z, \mu \dot{z}) - \\ & H_{12}(\theta, \mu z) g_2(\theta, \dot{\theta}, \mu z, \mu \dot{z}) - H_{12}(\theta, \mu z) \tilde{K} z + H_{11}(\theta, \mu z) B_1 \tau + H_{12}(\theta, \mu z) B_2 \tau, \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \mu \ddot{z} = & -H_{21}(\theta, \mu z) f_1(\theta, \dot{\theta}) - H_{22}(\theta, \mu z) f_2(\theta, \dot{\theta}) - H_{21}(\theta, \mu z) g_1(\theta, \dot{\theta}, \mu z, \mu \dot{z}) - \\ & H_{22}(\theta, \mu z) g_2(\theta, \dot{\theta}, \mu z, \mu \dot{z}) - H_{22}(\theta, \mu z) \tilde{K} z + H_{21}(\theta, \mu z) B_1 \tau + H_{22}(\theta, \mu z) B_2 \tau. \end{aligned} \quad (4b)$$

令  $\mu = 0$ , 并考虑到  $[M_{11}^s(\theta, 0)]^{-1} = H_{11}^s(\theta, 0) - H_{12}^s(\theta, 0) [H_{22}^s(\theta, 0)]^{-1} H_{21}^s(\theta, 0)$ , 则式(4)变成等价刚性臂(即慢变子系统)的动力学方程

$$M_{11}^s(\theta, 0) \ddot{\theta}^s = -f_1^s(\theta, \dot{\theta}) + B_1^s \tau^s, \quad (5)$$

其中上标“s”表示该量在慢时标(即  $\mu = 0$ )中计算.

在边界层上引入伸长时标  $\hat{t} = t / \sqrt{\mu}$ , 靠近边界层的区域  $\mu \rightarrow 0$ , 慢变量看做常数. 则由式(4)得快变子系统动力学方程

$$\frac{d^2 z^f}{d\hat{t}^2} = -H_{22}^f(\theta, 0) \tilde{K} z^f + [H_{21}^f(\theta, 0) B_1^f + H_{22}^f(\theta, 0) B_2^f] \tau^f, \quad (6)$$

其中上标“f”表示该量在快时标中计算,  $\tau^f = \tau - \tau^s$ .

### 3 轨迹跟踪的鲁棒控制

柔性臂轨迹跟踪控制系统的结构框图如图2所示. 准静态补偿控制用于补偿当前位置的准静态变形, 慢控制器用于控制柔性臂的整体运动, 快控制器用于控制柔性臂的弹性振动.

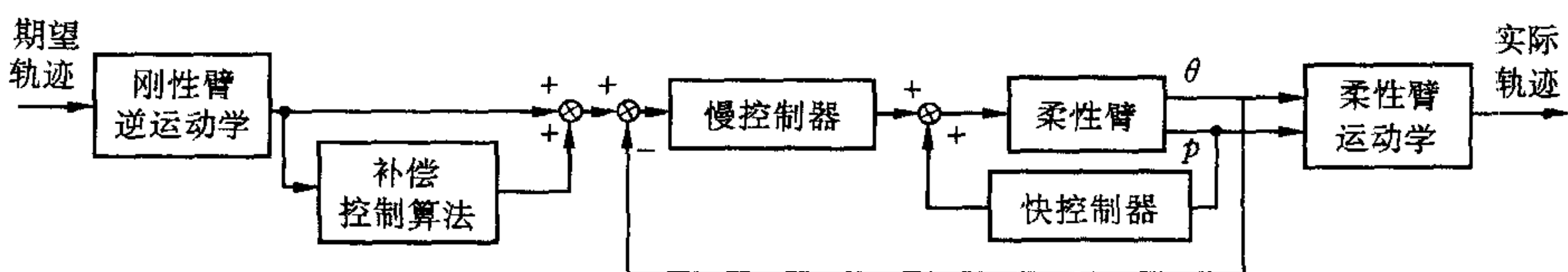


图2 轨迹跟踪控制系统结构框图

#### 3.1 轨迹跟踪的补偿控制

柔性臂在垂直平面内运动时,不同位置的弹性变形包括准静态和振动变形两部分,其中准静态变形与重力和刚体运动加速度有关.对于轨迹跟踪控制问题,一方面要抵消当前位置的准静态变形,另一方面要抑制弹性振动.下面给出补偿准静态变形的补偿控制方法.

对期望轨迹  $\Gamma_d(x_d, y_d)$ , 利用刚性臂逆运动学, 可求得广义坐标  $q_0 = (\theta_{10}, \theta_{20}, 0, \dots, 0)^T$ . 此时, 方程(1)可退化为刚性臂的动力学方程, 并可求得相应的控制力矩  $\tau_0$ . 但对柔性臂系统, 由于弹性变形  $v_1(x_1, t)$  和  $v_2(x_2, t)$  的存在, 广义坐标矢量会产生一定的偏差, 使实际运行的轨迹  $\Gamma(x, y)$  偏离  $\Gamma_d(x_d, y_d)$ .

设受弹性变形的影响, 广义坐标和广义力产生微小的变化, 即

$$q = q_0 + \Delta q, \quad (7)$$

$$\tau = \tau_0 + \Delta \tau, \quad (8)$$

其中  $\Delta q = (\Delta \theta_1, \Delta \theta_2, p_{11}, \dots, p_{1n_1}, p_{21}, \dots, p_{2n_2})^T$ ,  $\Delta \tau = (\Delta \tau_1, \Delta \tau_2)^T$ .

将式(7)和(8)代入式(1)中, 忽略高阶小量, 经整理得

$$A(q_0)\Delta \ddot{q} + E(q_0, \dot{q}_0)\Delta \dot{q} + F(q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0)\Delta q = D(q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0, \tau_0) + B\Delta \tau. \quad (9)$$

忽略  $\Delta \dot{q}$  及  $\Delta \ddot{q}$  引起动态力矩的影响, 得如下准静态方程

$$F(q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0)\Delta q = D(q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0, \tau_0). \quad (10)$$

由式(10)可求得

$$\Delta q = (\Delta \theta_1, \Delta \theta_2, p_{11}, \dots, p_{1n_1}, p_{21}, \dots, p_{2n_2})^T, \quad (11)$$

补偿后关节角的期望值为

$$\theta_1^d = \theta_{10} + \Delta \theta_1, \quad (12)$$

$$\theta_2^d = \theta_{20} + \Delta \theta_2. \quad (13)$$

### 3.2 慢变子系统控制器设计

略去变量的上下标, 将慢变子系统动力学方程(5)改写为

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + g(\theta) = u. \quad (14)$$

设慢变子系统(14)的有界估计误差为

$$\|M(\theta) - M_0(\theta)\| \leq \delta_1(\theta), \quad (15a)$$

$$\|g(\theta) - g_0(\theta)\| \leq \delta_2(\theta), \quad (15b)$$

$$\|C(\theta, \dot{\theta}) - C_0(\theta, \dot{\theta})\| \leq \delta_3(\theta, \dot{\theta}), \quad (15c)$$

其中  $M_0(\theta), C_0(\theta, \dot{\theta}), g_0(\theta)$  分别为  $M(\theta), C(\theta, \dot{\theta}), g(\theta)$  的标称值.

为设计变结构控制, 取滑模函数

$$s = \dot{e} + \Lambda e, \quad (16)$$

其中  $e = \theta - \theta_d, s = (s_1, s_2)^T, \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2), \lambda_i > 0 (i=1, 2)$ . 由上式可知, 当  $s \rightarrow 0$  时, 有  $e \rightarrow 0$  即  $\theta = \theta_d$ .

取正定函数

$$V = \frac{1}{2} s^T M(\theta) s. \quad (17)$$

由式(14)和(16), 并考虑到  $M(\theta) - 2C(\theta, \dot{\theta})$  为反对称阵, 则有

$$\dot{V} = s^T [u - C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}_d - M(\theta)\ddot{\theta}_d - g(\theta) + M(\theta)\Lambda\dot{e} + C(\theta, \dot{\theta})\Lambda e]. \quad (18)$$



考虑如下控制

$$u = M_0(\theta)(\ddot{\theta}_d - \Lambda \dot{e}) + C_0(\theta, \dot{\theta})(\dot{\theta}_d - \Lambda e) + g_0(\theta) - K_s s - \alpha \text{sgn}(s), \quad (19)$$

其中  $K_s$  为正定对称矩阵,  $\alpha$  为满足下式的任意常数

$$a \geq \delta_1(\theta)(\|\ddot{\theta}_d\| + \|\Lambda \dot{e}\|) + \delta_3(\theta, \dot{\theta})(\|\dot{\theta}_d\| + \|\Lambda e\|) + \delta_2(\theta). \quad (20)$$

将式(19)代入式(18),并考虑到  $s^T \text{sgn}(s) \geq \|s\|$ , 则有

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}(K_s) \|s\|^2, \quad (21)$$

其中  $\lambda_{\min}(K_s)$  为矩阵  $K_s$  的最小特征值. 综上所述,  $V$  是 Liapunov 函数, 并且只有当  $s=0$  时, 才有  $\dot{V}=0$ . 通过适当地选取  $\Lambda$  和  $\alpha$ , 可以满足系统的动态品质要求, 并使跟踪误差  $e \rightarrow 0$ .

### 3.3 快变子系统控制器设计

略去式(6)中变量的上标, 并将其写成状态方程

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tau_f, \quad (22)$$

其中  $x_1$  为有限维控制模态的状态矢量,  $x_2$  为剩余模态的状态矢量. 取各连杆根部的弯矩作为输出  $y$ , 即

$$y = \left( \frac{\partial^2 v_1(x_1, t)}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 v_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} \right)^T = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

其中矩阵  $C_1$  和  $C_2$  是与模态函数及应变片位置有关的常数阵.

由式(22)和(23)得快变子系统的传递函数矩阵

$$G(s) = [C_1 \quad C_2] \left[ sI - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

有限维控制模态的传递函数矩阵为  $G_0(s) = C_1 (sI - A_{11})^{-1} B_1$ , 则有

$$G(s) = [I + \Delta_m(s)] G_0(s), \quad (25)$$

其中  $\Delta_m(s)$  是反映非结构不确定性的乘法摄动. 设摄动  $\Delta_m(s)$  满足

$$\bar{\sigma}[\Delta_m(j\omega)] \leq |W_2(j\omega)|, \quad \forall \omega \in [0, \infty), \quad (26)$$

其中  $\bar{\sigma}[\cdot]$  表示最大奇异值,  $W_2(s)$  是描述未建模动态的权函数.

对满足式(26)的乘法摄动, 系统鲁棒稳定的条件为

$$\|W_2(s)T(s)\|_{\infty} < 1, \quad (27)$$

其中  $T(s) = [I + G_0(s)K(s)]^{-1} G_0(s)K(s)$  为补灵敏度函数.

快变子系统控制器除了对非结构不确定性具有鲁棒性外, 而且还要求在扰动信号的存在下, 对输出的影响尽量小, 即满足

$$\|W_1(s)S(s)\|_{\infty} < 1, \quad (28)$$

其中  $S(s) = [I + G_0(s)K(s)]^{-1}$  为灵敏度函数,  $W_1(s)$  是反应抑制扰动的权函数.

式(27)和(28)所表示的优化问题是典型的混合灵敏度问题. 此问题可以转化为标准  $H^{\infty}$  控制问题. 从而可求得快变子系统控制器  $K(s)$ .

## 4 实验

在垂直平面内运动的双连杆柔性臂实验台参数为: 第一根连杆长度  $L_1 = 0.5\text{m}$ , 弯曲

刚度  $EI_1 = 1901.3 \text{Nm}^2$ , 连杆质量  $M_1 = 2.1 \text{kg}$ , 末端质量  $m_1 = 12.1 \text{kg}$ ; 第二根连杆长度  $L_2 = 0.71 \text{m}$ , 弯曲刚度  $EI_2 = 225.31 \text{Nm}^2$ , 连杆质量  $M_2 = 0.79 \text{kg}$ , 末端质量  $m_2 = 2.4 \text{kg}$ . 两个关节均采用直流伺服电机驱动. 两个连杆的根部和中部均贴有应变电桥, 用于检测柔性臂的变形.

对于轨迹跟踪的补偿控制, 取一阶模态计算准静态变形补偿的理论值, 并通过实验进行修正. 慢变子系统控制律采用式(19)进行控制. 在设计快变子系统控制器时, 两连杆有限维控制模态均取一阶模态, 通过求解式(27)和(28), 可得到  $K(s)$ . 慢变子系统控制周期为  $10 \text{ms}$ , 快变子系统控制周期为  $5 \text{ms}$ .

#### 1) 末端做圆周运动的控制实验

圆心位于  $(1.3 \text{m}, 0.2 \text{m})$ , 半径为  $r = 0.1 \text{m}$ , 运行时间为  $5 \text{s}$ . 第一杆的初始角为  $20^\circ$ , 第二杆的初始角为  $0^\circ$ . 实验结果如图3所示.

#### 2) 末端做方形运动的控制实验

方形的四边长均为  $0.15 \text{m}$ , 每一边运行  $2 \text{s}$ . 第一杆的初始角为  $20^\circ$ , 第二杆的初始角为  $-10^\circ$ . 实验结果如图4所示.

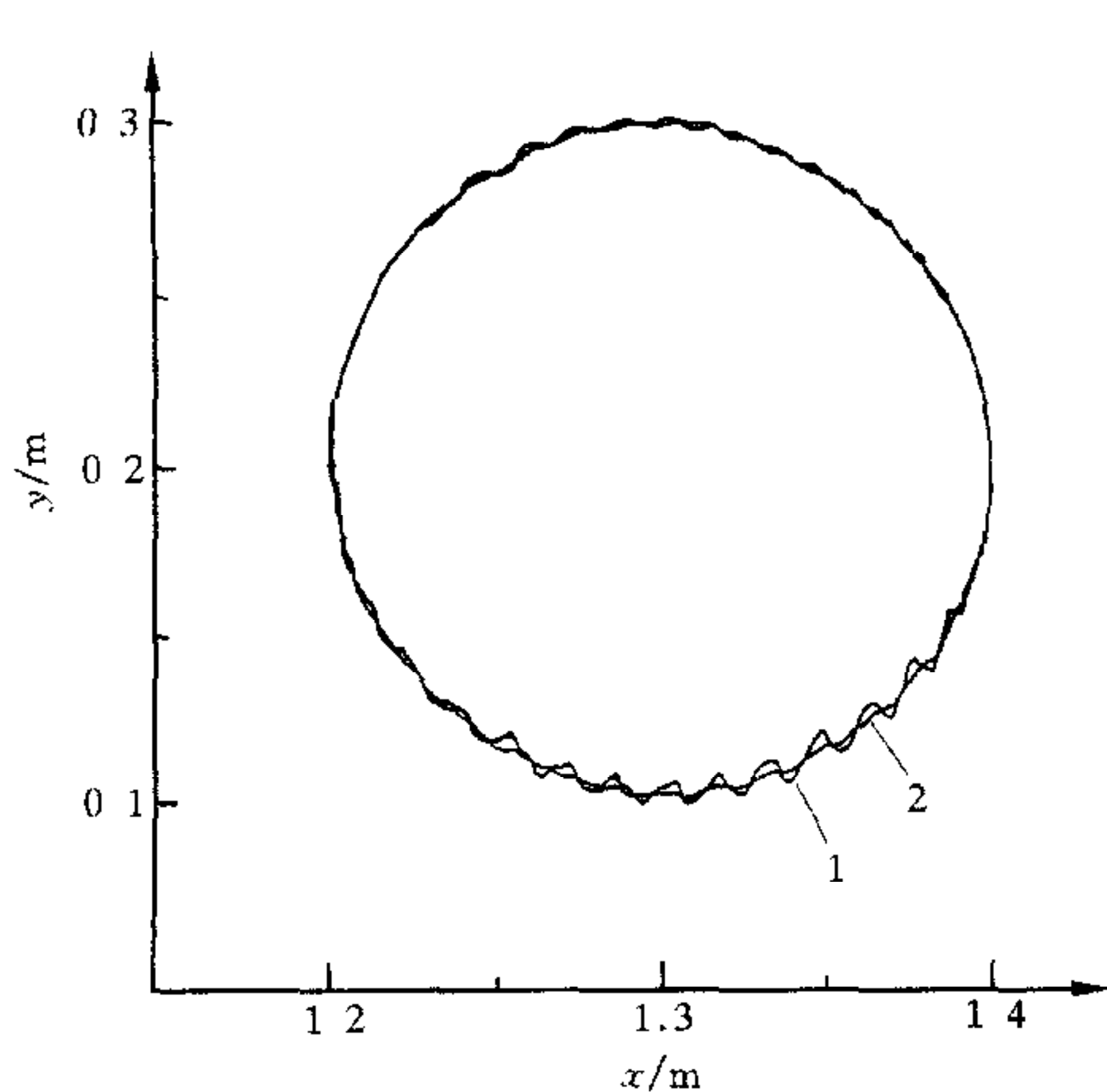


图3(a) 圆周轨迹实验(1——常规控制, 2——鲁棒控制)

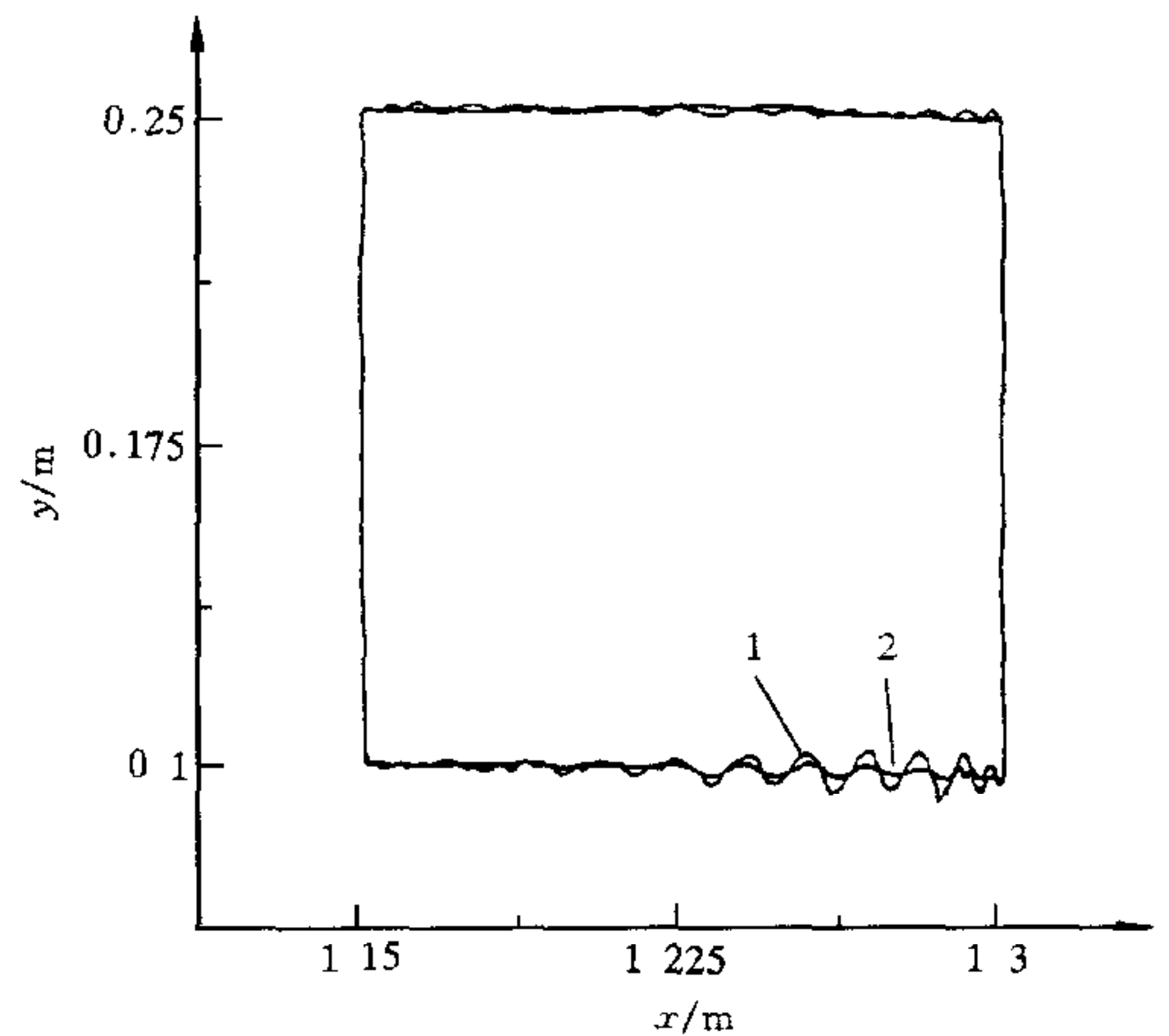


图4(a) 方形轨迹实验(1——常规控制, 2——鲁棒控制)

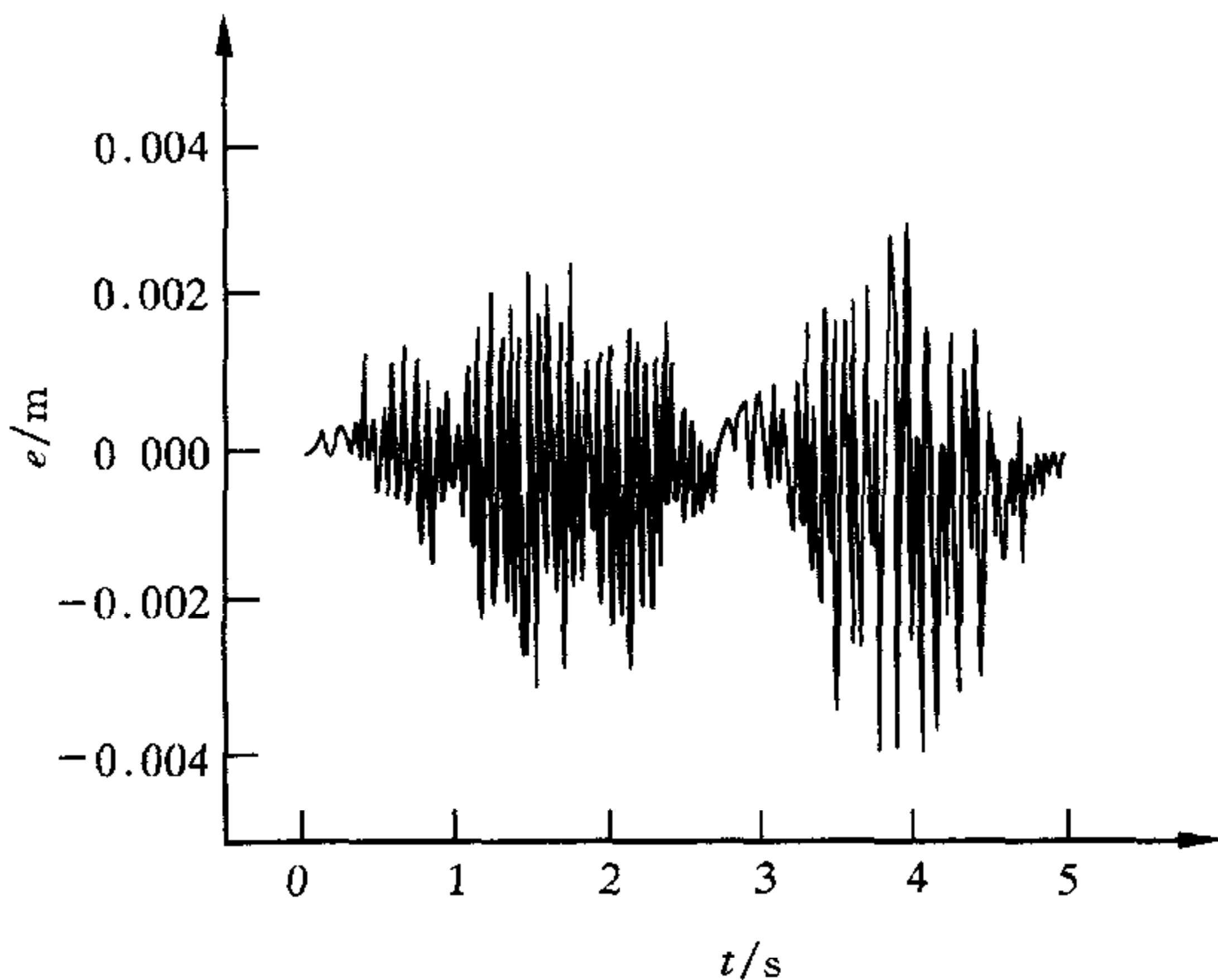


图3(b) 常规控制法向偏差

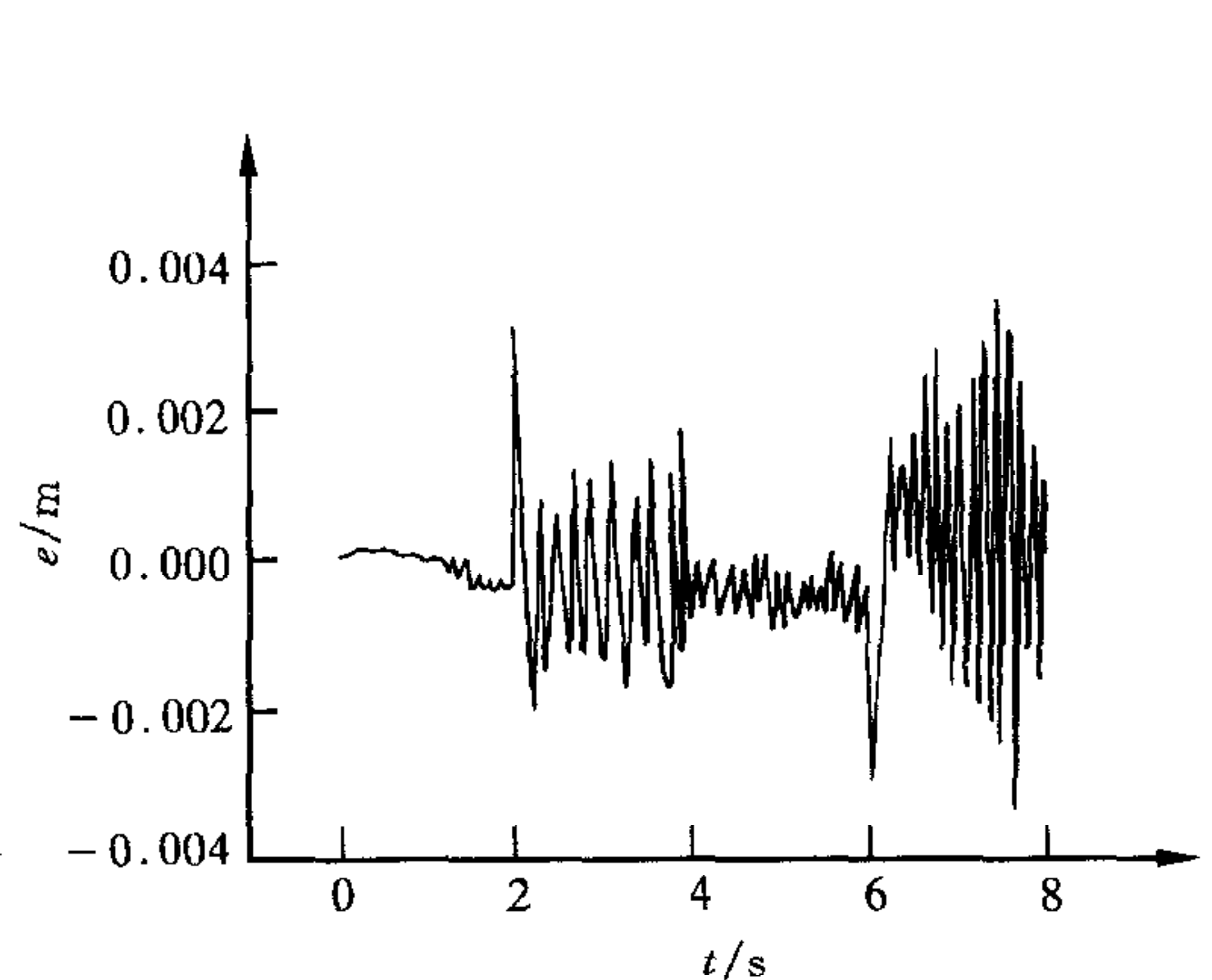


图4(b) 常规控制法向偏差(e)

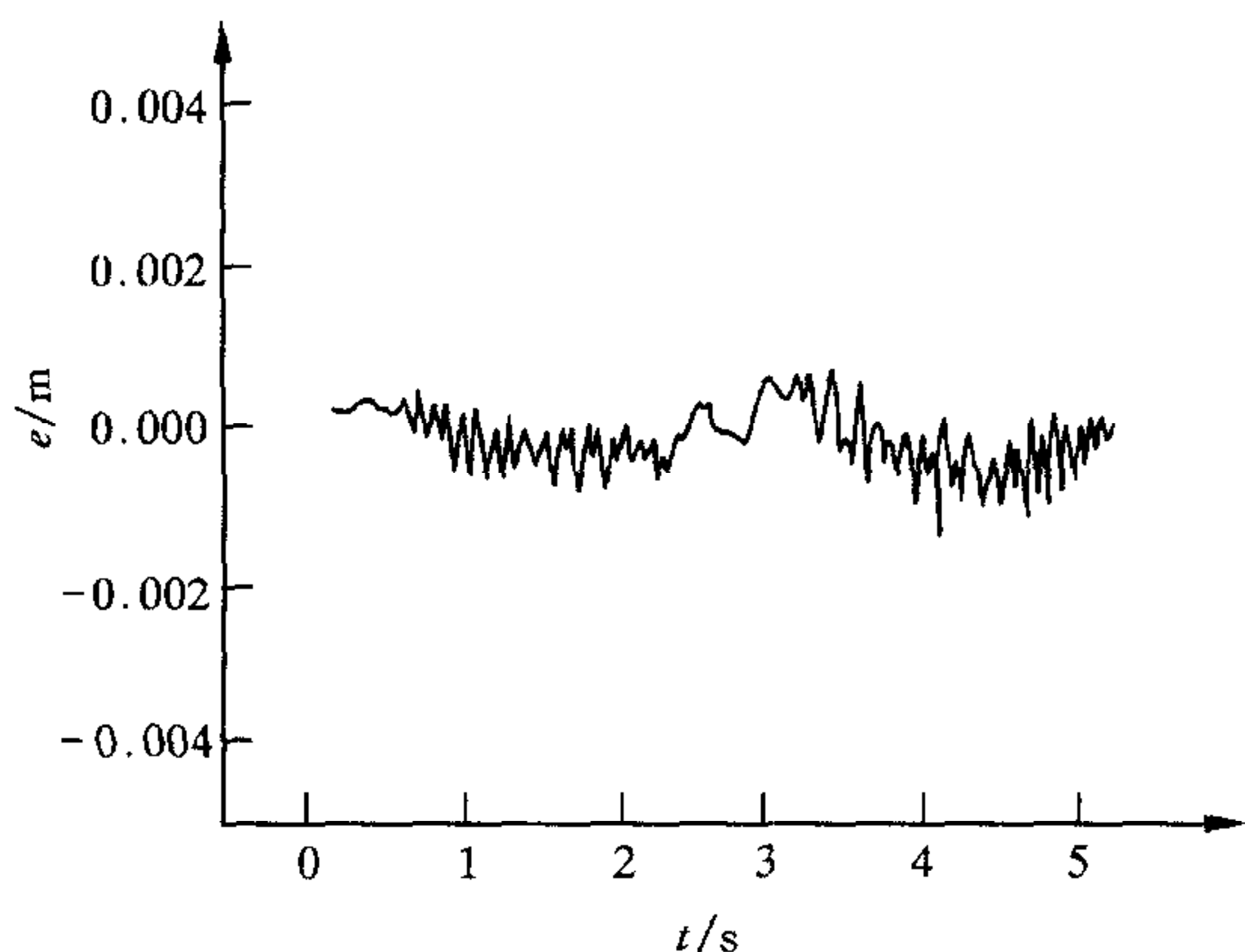


图3(c) 鲁棒控制法向偏差(e)

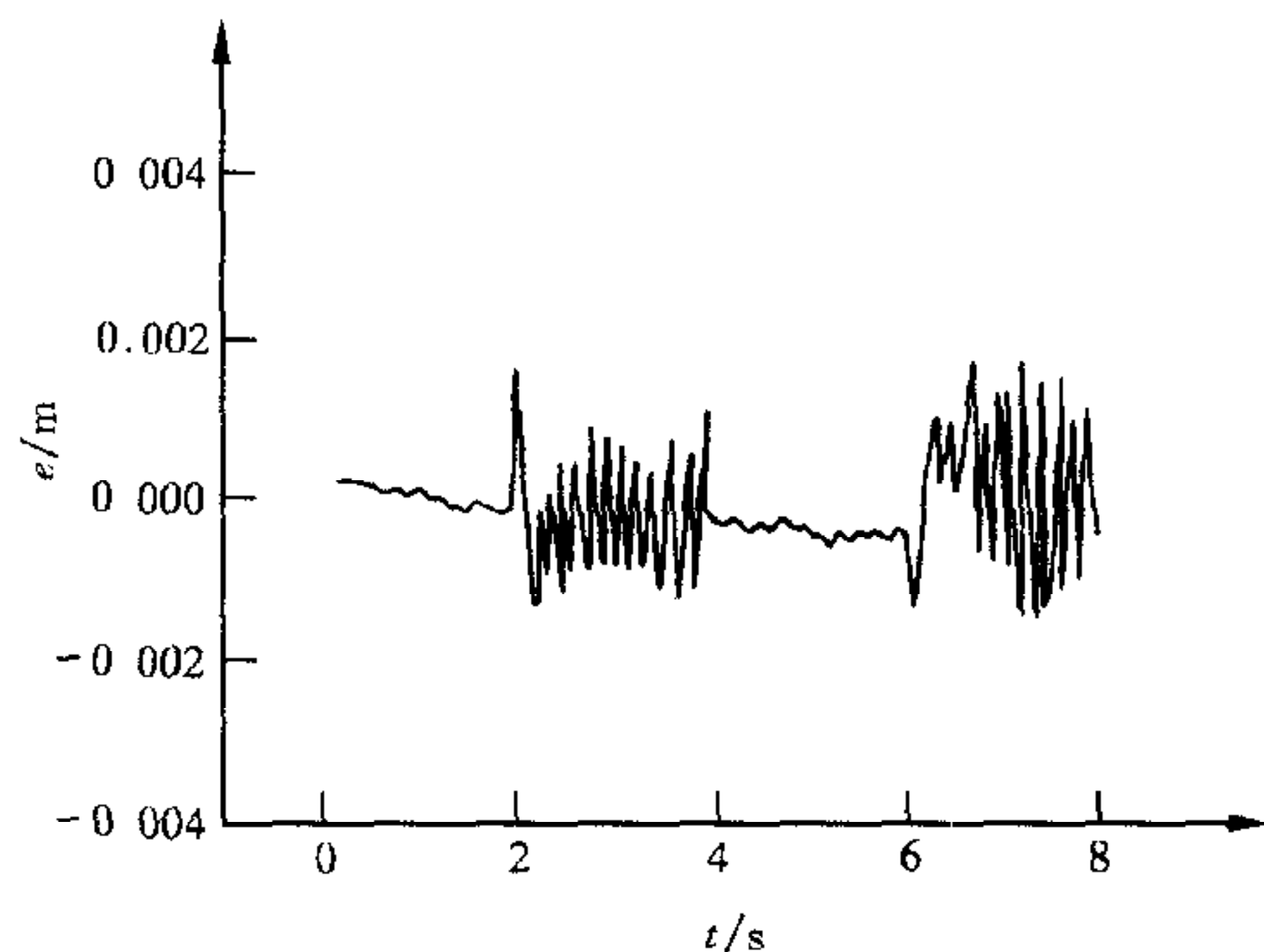


图4(c) 鲁棒控制法向偏差(e)

由实验结果可见,末端做圆周轨迹跟踪和方形轨迹跟踪时,用常规控制方法的法向偏差最大值分别为0.004m和0.00385m.用本文提出的控制方法时,法向偏差最大值分别为0.00125m和0.00165m,从轨迹法向偏差分析,分别抑制了53.9%和27.44%.实验结果表明,本文提出的控制方法能使末端较好地跟踪期望轨迹,并有效地抑制了弹性振动,获得了较好的控制效果.

### 参 考 文 献

- 1 Book W J. Control motion in an elastic world. *Trans. on ASME, J. of DSMC*, 1993, **115**:52-261
- 2 Fung E H K, Cheung F C. Variable structure tracking controller for a flexible one-link robot. In: *Proc. of IEEE Int. Conf. On System, Man and Cybernetics*, 1995, **5**:4458-4463
- 3 Feliu V, Rattan K S, Brown H B Jr. Adaptive control of a single-link flexible manipulator. *IEEE Control System Magazine*, 1990, **10**:29-33
- 4 Siciliano B, Book W J. A singular perturbation approach to control of lightweight flexible manipulator. *Int J Robot Research*, 1988, **7**:79-90
- 5 Chirinos L *et al.* Practical aspects on robust control strategies of a single link flexible manipulator. In: *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 1990, **2**:1489-1492
- 6 李元春,松野文俊等. 2自由度フレキシブルマニピュレータ軌道制御. 第十三回日本ロボット学会学术讲演会予稿集,1995,81-82

**李元春** 1962年生,1990年在哈尔滨工业大学获工学博士学位.现为吉林工业大学控制科学与工程系教授.主要研究兴趣是机器人控制和智能控制等方面的研究.

**陆佑方** 1936年生,1962年毕业于清华大学工程力学研究班.现为吉林工业大学理学院教授.主要研究兴趣是柔性多体系统动力学与控制等方面的研究.