第51卷第2期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.51, No.2
2008年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Mar., 2008

文章编号: 0583-1431(2008)02-0281-10 **文献标识码: A**

同分布 ρ 混合序列的矩完全收敛性

陈平炎

暨南大学数学系 广州 510630
E-mail: chenpingyan@263.net

柳向东

暨南大学统计学系 广州 510630
E-mail: tliuxd@jnu.edu.cn

摘　要 获得了同分布 ρ 混合序列的矩完全收敛性成立的充分必要性条件, 推广和改进了已有的结果.

关键词 ρ 混合序列; 完全收敛性; 矩完全收敛性
MR(2000) 主题分类 60F15, 60E05
中图分类 O211.4

Complete Moment Convergence for Sequence of Identically Distributed ρ-Mixing Random Variables

Ping Yan CHEN

Department of Mathematics, Jinan University, Guangzhou 510630*, P. R. China*
E-mail: chenpingyan@263.net

Xiang Dong LIU

Department of Statistics, Jinan University, Guangzhou 510630*, P. R. China*
E-mail: tliuxd@jnu.edu.cn

Abstract The sufficient and necessary conditions of complete moment convergence for sequence of identically distributed ρ-mixing random variables are obtained, which extent and generalize the well-known results.

Keywords ρ-mixing random variable; complete convergence; complete moment convergence
MR(2000) Subject Classification 60F15, 60E05
Chinese Library Classification O211.4

1 引言及主要结果

完全收敛性的概念是由许宝禄和 Robbins [1] 引入的, 它已成为了概率极限理论中一个重要概念. 称随变量序列 $\{U_n, n \geq 1\}$ 完全收敛于常数 C, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|U_n - C| > \varepsilon\} < \infty.$$

收稿日期: 2006-07-06; 接受日期: 2007-07-25
基金项目: 国家自然科学基金资助项目

许宝禄和 Robbins [1] 最先获得了零均值方差有限的独立同分布的随机变量序列部分和算术平均的完全收敛性结果. 至今, 他们的结果已经被推广到了很多情形, 如文 [2–5] 等关于独立时的实值情形或取值于 Banach 空间值情形的结果, 文 [5–7] 等关于混合情形的结果. 特别值得一提的是 Katz [2], Baum 和 Katz [3] 获得了如下的结果: 设 $\{X, X_n, n \geq 1\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 对任意 $n \geq 1$, 部分和为 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. 如果 $0 < p < 2$, $r \geq 1$, 则 $E|X|^{rp} < \infty$ 当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\{|S_n - nb| > \varepsilon n^{1/p}\} < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{1.1}$$

或

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\Big\{ \max_{1 \leq k \leq n} |S_k - kb| > \varepsilon n^{1/p} \Big\} < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{1.2}$$

其中当 $rp \geq 1$ 时, $b = EX$; 当 $0 < rp < 1$, $b = 0$.

Chow [8] 讨论了矩完全收敛性的结果: 设 $\{X, X_n, n \geq 1\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 对任意 $n \geq 1$, 部分和为 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. 如果 $0 < p < 2$, $r > 1$, $rp \geq 1$, 则当时 $E\{|X|^{rp} + |X| \log(1 + |X|)\} < \infty$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-1/p} E\Big\{ \max_{1 \leq k \leq n} |S_k - kEX| - \varepsilon n^{1/p} \Big\}_+ < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{1.3}$$

其中如果 $x \geq 0$, 则 $x_+ = x$; 如果 $x < 0$, 则 $x_+ = 0$.

王定成和苏淳 [9] 把 Chow [8] 的结果推广到了型 -p Banach 空间情形, 得到了充分必要性的结果. Chen [10] 把王定成和苏淳 [10] 的结果推广到了没有附加几何假设条件的 Banach 空间情形. Li 和 Zhang [11] 在较强的矩条件下讨论了负相依随机变量序列滑动平均和的结果. 王定成和赵武 [12] 则讨论了负相依随机变量序列的矩完全收敛性, 得到了充分必要性结果.

最近 Li 和 Spătaru [13] 获得了完全收敛性的积分形式: 设 $\{X, X_n, n \geq 1\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 对任意 $n \geq 1$, 部分和为 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. 如果 $0 < p < 2$, $r \geq 1$, $q > 0$, 则

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\{|S_n - nb| > x^{1/q} n^{1/p}\} dx < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0$$

当且仅当

$$\begin{cases} E|X|^{rp} < \infty, & \text{if} \quad 0 < q < rp, \\ E|X|^{rp} \log(1 + |X|) < \infty, & \text{if} \quad q = rp, \\ E|X|^q < \infty, & \text{if} \quad q > rp, \end{cases}$$

其中当 $rp \geq 1$ 时, $b = EX$; 当 $0 < rp < 1$, $b = 0$.

矩完全收敛性和完全收敛性的积分形式不但都是完全收敛结果的深化, 而两者之间可以说是等价的. 事实上, Chen 和 Wang [14] 得到了如下结果: 设 $a_n > 0$, $b_n > 0$, $q > 0$, $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是任一随机变量序列, 则下面陈述等价

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n P\{|Z_n| > x^{1/q} b_n\} dx < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n E\{b_n^{-1} |Z_n| - \varepsilon\}_+^q < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

本文在同分布 ρ 混合情形下, 推广和改进 Chow [8] 或 Li 和 Spătaru [13] 的结果.

总设 $\{X_n, n\geq 1\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量序列. 若 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ- 代数, 记 $L^p(\mathscr{A})$ $(p>0)$ 是所有 $\mathscr{A}$ 可测的 p 阶矩有限的随机变量的全体. 称序列 $\{X_n, n\geq 1\}$ 是 ρ 混合的, 如果

$$\rho(n)=\sup_{k\geq 1}\sup_{X\in L^2(\mathscr{F}_1^k),Y\in L^2(\mathscr{F}_{n+k}^\infty)}\left\{\frac{|EXY-EXEY|}{\sqrt{E(X-EX)^2E(Y-EY)^2}}\right\}\to 0,\quad n\to\infty,$$

其中 $\mathscr{F}_m^n=\sigma(X_m,\dots,X_n)$.

ρ 混合的概念是 Kolmogorov 和 Rozanov [15] 在 1960 年引入的. 到目前为此, 有关 ρ 混合序列的极限结果已极为丰富, 如 ρ 混合序列的中心极限定理, 弱不变原理, 大数定律, 完全收敛性定理和强不变原理 (分别见邵启满 [6], 邵启满 [7, 16, 17] 或见陆传荣和林正炎的专著 [18]). 这些结果的取得归功于一系列 ρ 混合随机变量序列的概率不等式和矩不等式, 如邵启满 [7] 获得了下面的的结果:

引理 1.1 设 $\{X_n, n\geq 1\}$ 是 ρ 混合的随机变量序列, $s\geq 2$. 若 $EX_n=0$, $EX_n^s<\infty\,(n\geq 1)$, 则存在仅依赖于 s 和 $\rho(\cdot)$ 正常数 $K=K(s,\rho(\cdot))$, 使得对任意 $n\geq 1$, 有

$$\begin{aligned}E\max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{i=1}^k X_i\right|^s\leq K\Bigg\{&\exp\left(K\sum_{i=0}^{[\log n]}\rho(2^i)\right)\left(n\max_{1\leq i\leq n}E|X_i|^2\right)^{s/2}\\&+n\exp\left(K\sum_{i=0}^{[\log n]}\rho^{2/s}(2^i)\right)\max_{1\leq i\leq n}E|X_i|^s\Bigg\},\end{aligned}\tag{1.4}$$

其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分.

下面陈述本文主要结果.

由于矩完全收敛性和完全收敛性的积分形式等价, 因此只写出矩完全收敛性的结果. 如果把矩完全收敛性换成完成收敛性的积分形式, 下面的定理也是成立的.

定理 1.1 设 $r>1$, $0<p<2$, $q>0$, $\{X, X_n, n\geq 1\}$ 是同分布的 ρ 混合随机变量序列, 对任意 $n\geq 1$, 部分和为 $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$. 混合系数满足 $\sum_{n=1}^\infty \rho^{2/s}(2^n)<\infty$, 其中当 $\max\{rp,q\}<2$ 时, $s=2$; 当 $\max\{rp,q\}\geq 2$ 时, $s>\max\{(r-1)(1/p-1/2)^{-1},rp,q\}$, 则下列陈述等价

$$\begin{cases}E|X|^{rp}<\infty, & \text{if}\quad 0<q<rp,\\ E|X|^{rp}\log(1+|X|)<\infty, & \text{if}\quad q=rp,\\ E|X|^q<\infty, & \text{if}\quad q>rp,\end{cases}\tag{1.5}$$

$$\sum_{n=1}^\infty n^{r-2-q/p}E\Big\{\max_{1\leq k\leq n}|S_k-kb|-\varepsilon n^{1/p}\Big\}_+^q<\infty,\quad\forall\,\varepsilon>0,\tag{1.6}$$

$$\sum_{n=1}^\infty n^{r-2}E\Big\{\sup_{k\geq n}k^{-1/p}|S_k-kb|-\varepsilon\Big\}_+^q<\infty,\quad\forall\,\varepsilon>0,\tag{1.7}$$

其中如果 $0<p<1$, $b=0$; 如果 $1\leq p<2$, $b=EX$; $x_+^q=(x_+)^q$.

如果 $r=1$, 则有

定理 1.2 设 $0<p<2$, $q>0$, $\{X, X_n, n\geq 1\}$ 是同分布的 ρ 混合随机变量序列, 对任意 $n\geq 1$, 部分和为 $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$. 混合系数满足 $\sum_{n=1}^\infty \rho^{2/s}(2^n)<\infty$, 其中当 $q<2$ 时, $s=2$; 当

$q \geq 2$ 时, $s > q$, 则下列陈述等价

$$\begin{cases} E|X|^p < \infty, & \text{if} \quad 0 < q < p, \\ E|X|^p \log(1+|X|) < \infty, & \text{if} \quad q = p, \\ E|X|^q < \infty, & \text{if} \quad q > p, \end{cases} \tag{1.8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-q/p} E\Big\{ \max_{1\leq k\leq n} |S_k - kb| - \varepsilon n^{1/p} \Big\}_+^q < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{1.9}$$

其中如果 $0 < p < 1$, $b = 0$; 如果 $1 \leq p < 2$, $b = EX$.

定理 1.3 设 $0 < p < 2$, $q > 0$, $\{X, X_n, n \geq 1\}$ 是同分布的 ρ 混合随机变量序列, 对任意 $n \geq 1$, 部分和为 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. 混合系数满足 $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^{2/s}(2^n) < \infty$, 其中当 $q < 2$ 时, $s = 2$; 当 $q \geq 2$ 时, $s > q$, 则下列陈述等价

$$\begin{cases} E|X|^p \log(1+|X|) < \infty, & \text{if} \quad 0 < q < p, \\ E|X|^p \log^2(1+|X|) < \infty, & \text{if} \quad q = p, \\ E|X|^q < \infty, & \text{if} \quad q > p, \end{cases} \tag{1.10}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-q/p} (\log n) E\Big\{ \max_{1\leq k\leq n} |S_k - kb| - \varepsilon n^{1/p} \Big\}_+^q < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{1.11}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} E\Big\{ \sup_{k\geq n} k^{-1/p} |S_k - kb| - \varepsilon \Big\}_+^q < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{1.12}$$

其中如果 $0 < p < 1$, $b = 0$; 如果 $1 \leq p < 2$, $b = EX$.

本文约定, $I(\cdot)$ 代表示性函数, C 代表正常数, 它在不同的地方可代表不同的值.

2 定理的证明

定理 1 的证明 首先证 (1.5) $\Rightarrow$ (1.6). 不妨设 $b = 0$, 因

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-q/p} E\Big\{ \max_{1\leq k\leq n} |S_k| - \varepsilon n^{1/p} \Big\}_+^q \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-q/p} \int_0^{\infty} P\Big\{ \max_{1\leq k\leq n} |S_k| - \varepsilon n^{1/p} > t^{1/q} \Big\} dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-q/p} \bigg(\int_0^{n^{q/p}} P\Big\{ \max_{1\leq k\leq n} |S_k| > \varepsilon n^{1/p} + t^{1/q} \Big\} dt + \int_{n^{q/p}}^{\infty} P\Big\{ \max_{1\leq k\leq n} |S_k| > \varepsilon n^{1/p} + t^{1/q} \Big\} dt \bigg) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\Big\{ \max_{1\leq k\leq n} |S_k| > \varepsilon n^{1/p} \Big\} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-q/p} \int_{n^{q/p}}^{\infty} P\Big\{ \max_{1\leq k\leq n} |S_k| > t^{1/q} \Big\} dt \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

当 $rp \geq 1$ 时, 由 Shao [7] 的定理 3.1 或由文 [18, 推论 8.4.1] 知, 由 $E|X|^{rp} < \infty$ 及 $EX = 0$, 有 $I_1 < \infty$; 当 $0 < rp < 1$ 时, 由 Markov 不等式及标准的计算, 有

$$I_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \bigg(nP\{|X| > n^{1/p}\} + P\Big\{ \max_{1\leq k\leq n} \Big| \sum_{i=1}^{k} X_i I(|X_i| \leq n^{1/p}) \Big| > \varepsilon n^{1/p} \Big\} \bigg)$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\Big(nP\{|X|>n^{1/p}\}+Cn^{-1/p}E\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k}X_iI(|X_i|\le n^{1/p})\Big|\Big)\\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1}P\{|X|>n^{1/p}\}+C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1-1/p}E|X|I(|X|\le n^{1/p})\\
&\le CE|X|^{rp}<\infty.
\end{aligned}
$$

总之, 我们有 $I_1<\infty$, 于是只须证明 $I_2<\infty$. 由于

$$
P\Big\{\max_{1\le k\le n}|S_k|>t^{1/q}\Big\}\le nP\{|X|>t^{1/q}\}+P\Big\{\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k}X_iI(|X_i|\le t^{1/q})\Big|>t^{1/q}\Big\}.
$$

因此

$$
\begin{aligned}
I_2 &\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1-q/p}\int_{n^{q/p}}^{\infty}P\{|X|>t^{1/q}\}dt\\
&\quad+\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-q/p}\int_{n^{q/p}}^{\infty}P\Big\{\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k}X_iI(|X_i|\le t^{1/q})\Big|>t^{1/q}\Big\}dt\\
&=I_3+I_4.
\end{aligned}
$$

先证 $I_3<\infty$. 由微分中值定理及标准的计算, 有

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1-q/p}\sum_{m=n}^{\infty}\int_{m^{q/p}}^{(m+1)^{q/p}}P\{|X|>t^{1/q}\}dt\\
&\le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1-q/p}\sum_{m=n}^{\infty} m^{q/p-1}P\{|X|>m^{1/p}\}\\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m^{q/p-1}P\{|X|>m^{1/p}\}\sum_{n=1}^{m} n^{r-1-q/p}\\
&\le \begin{cases}
C\sum_{m=1}^{\infty} m^{r-1}P\{|X|>m^{1/p}\}, & \text{if}\quad q<rp,\\
C\sum_{m=1}^{\infty} \log(1+m)P\{|X|>m^{1/p}\}, & \text{if}\quad q=rp,\\
C\sum_{m=1}^{\infty} m^{q/p-1}P\{|X|>m^{1/p}\}, & \text{if}\quad q>rp
\end{cases}\\
&\le \begin{cases}
CE|X|^{rp}<\infty, & \text{if}\quad q<rp,\\
CE|X|^{q}\log(1+|X|)<\infty, & \text{if}\quad q=rp,\\
CE|X|^{q}<\infty, & \text{if}\quad q>rp.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

其次来证明 $I_4<\infty$. 注意到当 $0<p<1$ 时, 由控制收敛定理, 有

$$
\begin{aligned}
\max_{t\ge n^{q/p}}\max_{1\le k\le n}\Big|t^{-1/q}\sum_{i=1}^{k}EX_iI(|X_i|\le t^{1/q})\Big| &\le \max_{t\ge n^{q/p}} nt^{-1/q}E|X|I(|X|\le t^{1/q})\\
&\le \max_{t\ge n^{q/p}} n\int_0^1 P\{|X|>t^{1/q}x\}dx\\
&\le \int_0^1 nP\{|X|>n^{1/p}x\}dx\to 0;
\end{aligned}
$$

当 $1 \le p < 2$ 时, 由 $EX = 0$, 有

$$\begin{aligned}
\max_{t \ge n^{q/p}} \max_{1 \le k \le n} \left| t^{-1/q} \sum_{i=1}^{k} EX_i I(|X_i| \le t^{1/q}) \right| &= \max_{t \ge n^{q/p}} \max_{1 \le k \le n} \left| t^{-1/q} \sum_{i=1}^{k} EX_i I(|X_i| > t^{1/q}) \right| \\
&\le \max_{t \ge n^{q/p}} n t^{-1/q} E|X| I(|X| > t^{1/q}) \\
&\le n^{1-1/p} E|X| I(|X| > n^{1/p}) \\
&\le E|X|^p I(|X| > n^{1/p}) \to 0.
\end{aligned}$$

因此当 n 足够大时, 对 $t \ge n^{q/p}$, 有

$$\begin{aligned}
&P\left\{ \max_{1 \le k \le n} \left| \sum_{i=1}^{k} X_i I(|X_i| \le t^{1/q}) \right| > t^{1/q} \right\} \\
&\quad \le P\left\{ \max_{1 \le k \le n} \left| \sum_{i=1}^{k} (X_i I(|X_i| \le t^{1/q}) - EX_i I(|X_i| \le t^{1/q})) \right| > t^{1/q}/2 \right\}. \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

如果 $\max\{rp, q\} < 2$, 由 (2.1) 式, Markov 不等式, 引理 1.1, 微分中值定理及标准的计算有

$$\begin{aligned}
I_4 &\le C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-q/p} \int_{n^{q/p}}^{\infty} P\left\{ \max_{1 \le k \le n} \left| \sum_{i=1}^{k} (X_i I(|X_i| \le t^{1/q}) - EX_i I(|X_i| \le t^{1/q})) \right| > t^{1/q}/2 \right\} dt \\
&\le C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-q/p} \int_{n^{q/p}}^{\infty} t^{-2/q} E \max_{1 \le k \le n} \left| \sum_{i=1}^{k} (X_i I(|X_i| \le t^{1/q}) - EX_i I(|X_i| \le t^{1/q}) \right|^2 dt \\
&\le C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-q/p} \int_{n^{q/p}}^{\infty} n t^{-2/q} E|X|^2 I(|X| \le t^{1/q}) dt \\
&= C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1-q/p} \sum_{m=n}^{\infty} \int_{m^{q/p}}^{(m+1)^{q/p}} t^{-2/q} E|X|^2 I(|X| \le t^{1/q}) dt \\
&\le C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1-q/p} \sum_{m=n}^{\infty} m^{q/p-2/p-1} E|X|^2 I(|X| \le (m+1)^{1/p}) \\
&= C \sum_{m=1}^{\infty} m^{q/p-2/p-1} E|X|^2 I(|X| \le (m+1)^{1/p}) \sum_{n=1}^{m} n^{r-1-q/p} \\
&\le \begin{cases}
C \sum_{m=1}^{\infty} m^{r-2/p-1} E|X|^2 I(|X| \le (m+1)^{1/p}), & \text{if } q < rp, \\
C \sum_{m=1}^{\infty} m^{q/p-2/p-1} \log(1+m) E|X|^2 I(|X| \le (m+1)^{1/p}), & \text{if } q = rp, \\
C \sum_{m=1}^{\infty} m^{q/p-2/p-1} E|X|^2 I(|X| \le (m+1)^{1/p}), & \text{if } q > rp
\end{cases} \\
&\le \begin{cases}
CE|X|^{rp} < \infty, & \text{if } q < rp, \\
CE|X|^q \log(1+|X|) < \infty, & \text{if } q = rp, \\
CE|X|^q < \infty, & \text{if } q > rp.
\end{cases}
\end{aligned}$$

如果 $\max\{rp, q\} \ge 2$, 由 (2.1) 式, Markov 不等式, 引理 1.1 对 $s > \max\{(r-1)(1/p-1/2)^{-1}, rp, q\}$,

有

$$\begin{aligned}
I_4 &\le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-q/p}\int_{n^{q/p}}^{\infty} P\Big\{\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k}(X_iI(|X_i|\le t^{1/q})-EX_iI(|X_i|\le t^{1/q})\Big|>t^{1/q}/2\Big\}dt\\
&\le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-q/p}\int_{n^{q/p}}^{\infty} t^{-s/q}\{n^{s/2}(E|X|^2I(|X|\le t^{1/q}))^{s/2}+nE|X|^sI(|X|<t^{1/q})\}dt\\
&\le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r+s/2-2-q/p}\int_{n^{q/p}}^{\infty} t^{-s/q}(E|X|^2I(|X|\le t^{1/q}))^{s/2}dt\\
&\quad + C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1-q/p}\int_{n^{q/p}}^{\infty} t^{-s/q}E|X|^sI(|X|<t^{1/q})dt\\
&= I_5+I_6.
\end{aligned}$$

由于 $\max\{rp,q\}\ge 2$, 因而

$$E|X|^2I(|X|\le t^{1/q})\le E|X|^2<\infty,$$

于是有

$$I_5\le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r+s/2-2-q/p}(-t^{-s/q+1})|_{n^{q/p}}^{\infty}=C\sum_{n=1}^{\infty} n^{r+s/2-2-s/p}<\infty.$$

类似在情形 $\max\{rp,q\}<2$ 时 $I_4<\infty$ 可证 $I_6<\infty$. 因此完成了 (1.5) $\Rightarrow$ (1.6) 的证明.

其次证 (1.6)$\Rightarrow$(1.7). 因为

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}E\Big\{\sup_{k\ge n}k^{-1/p}|S_n|-\varepsilon\Big\}_+^q &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\int_0^{\infty}P\Big\{\sup_{k\ge n}k^{-1/p}|S_k|>\varepsilon+t^{1/q}\Big\}dt\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=2^{i-1}}^{2^i} n^{r-2}\int_0^{\infty}P\Big\{\sup_{k\ge n}k^{-1/p}|S_k|>\varepsilon+t^{1/q}\Big\}dt\\
&\le C\sum_{i=1}^{\infty}2^{i(r-1)}\int_0^{\infty}P\Big\{\sup_{k\ge 2^{i-1}}k^{-1/p}|S_n|>\varepsilon+t^{1/q}\Big\}dt\\
&\le C\sum_{i=1}^{\infty}2^{i(r-1)}\sum_{j=i}^{\infty}\int_0^{\infty}P\Big\{\max_{2^{j-1}\le k<2^j}k^{-1/p}|S_k|>\varepsilon+t^{1/q}\Big\}dt\\
&\le C\sum_{j=1}^{\infty}2^{j(r-1)}\int_0^{\infty}P\Big\{\max_{1\le k\le 2^j}|S_k|>(\varepsilon+t^{1/q})2^{(j-1)/p}\Big\}dt\\
&\le C\sum_{j=1}^{\infty}2^{j(r-1-q/p)}\int_0^{\infty}P\Big\{\max_{k\le 2^j}|S_k|>2^{(j-1)/p}\varepsilon+y^{1/q}\Big\}dy\quad (y=2^{(j-1)q/p}t)\\
&\le C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2-q/p}\int_0^{\infty}P\Big\{\max_{k\le n}|S_k|>2^{-2/p}n^{1/p}\varepsilon+y^{1/q}\Big\}dy\\
&= C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2-q/p}E\Big\{\max_{1\le k\le n}|S_k|-\varepsilon_0 n^{1/p}\Big\}_+^q<\infty\ (\varepsilon_0=2^{-2/p}\varepsilon),
\end{aligned}$$

于是由 (1.6) 知 (1.7) 式成立.

最后证 (1.7) ⇒ (1.5). 由 (1.7) 式显然有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} E\Big\{\sup_{k\ge n} k^{-1/p}|S_{k+1}-(k+1)b|-\varepsilon\Big\}_+^q<0,\quad \forall\varepsilon>0.$$

由上式及 (1.7) 式可推出

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} E\Big\{\sup_{k\ge n} k^{-1/p}|X_k-b|-\varepsilon\Big\}_+^q<\infty,\quad \forall\varepsilon>0. \tag{2.2}$$

由 (2.2), $E(\sup_{k\ge 1} k^{-1/p}|X_k-b|)^q<\infty$, 因此存在 $M>0$, 使得对每个 $n\ge 1$, 有

$$P\Big\{\sup_{k\ge n} k^{-1/p}|X_k-b|>M\Big\}\le 1/2. \tag{2.3}$$

注意到 $\{\max_{2^i\le k<2^{(i+1)}} k^{-1/p}|X_k-b|,\, i\ge 1\}$ 是一个 ρ 混合序列, 其混合系数满足

$$\sum_{i=1}^{\infty}\rho(i)<\infty.$$

于是由张立新和闻继威 [19] 的引理 A.5 和引理 A.6 有对任意 $m\ge 1$ 及 $t>0$, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=m}^{\infty} P\Big\{\max_{2^i\le k<2^{(i+1)}} k^{-1/p}|X_k-b|>M+t^{1/q}\Big\}\\ &\quad\le 2P\Big\{\sup_{i\ge m}\max_{2^i\le k<2^{(i+1)}} k^{-1/p}|X_k-b|>M+t^{1/q}\Big\}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

由 (2.3) 式知对任意 $i\ge 1$,

$$P\Big\{\max_{2^i\le k<2^{(i+1)}}|X_k-b|>M2^{(i+1)/p}\Big\}\le P\Big\{\max_{2^i\le k<2^{(i+1)}} k^{-1/p}|X_k-b|>M\Big\}\le 1/2. \tag{2.5}$$

于是由引理 2.1 及张立新和闻继威 [19] 的引理 A.6, 对任意 $i\ge 1$ 及 $t>0$, 有

$$2^iP\{|X|>(M+t^{1/q})2^{(i+1)/p}\}\le 2P\Big\{\max_{2^i\le k<2^{(i+1)}}|X_k-b|>(M+t^{1/q})2^{(i+1)/p}\Big\}. \tag{2.6}$$

在 (2.2) 式中取 $\varepsilon=M$, 由 (2.4) 及 (2.6) 式, 并应用到微分中值定理, 有

$$\begin{aligned}\infty&>\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}E\Big\{\sup_{k\ge n} k^{-1/p}|X_k-b|-M\Big\}_+^q\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=2^{m-1}}^{2^m-1} n^{r-2}E\Big\{\sup_{k\ge n} k^{-1/p}|X_k-b|-M\Big\}_+^q\\
&\ge C\sum_{m=1}^{\infty}2^{m(r-1)}E\Big\{\sup_{k\ge 2^m} k^{-1/p}|X_k-b|-M\Big\}_+^q\\
&=C\sum_{m=1}^{\infty}2^{m(r-1)}\int_0^{\infty}P\Big\{\sup_{k\ge 2^m} k^{-1/p}|X_k-b|>M+t^{1/q}\Big\}dt\\
&=C\sum_{m=1}^{\infty}2^{m(r-1)}\int_0^{\infty}P\Big\{\sup_{i\ge m}\max_{2^i\le k<2^{(i+1)}} k^{-1/p}|X_k-b|>M+t^{1/q}\Big\}dt\\
&\ge C\sum_{m=1}^{\infty}2^{m(r-1)}\sum_{i=m}^{\infty}\int_0^{\infty}P\Big\{\max_{2^i\le k<2^{(i+1)}} k^{-1/p}|X_k-b|>M+t^{1/q}\Big\}dt \qquad (\text{by } (2.4))\\
&\ge C\sum_{i=1}^{\infty}2^{i(r-1)}\int_0^{\infty}P\Big\{\max_{2^i\le k<2^{(i+1)}}|X_k-b|>(M+t^{1/q})2^{i+1}\Big\}dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq C\sum_{i=1}^{\infty}2^{ir}\int_0^{\infty}P\{|X-b|>(M+t^{1/q})2^{(i+1)/p}\}dt \qquad \text{(by (2.6))}\\
&=C\sum_{i=1}^{\infty}2^{i(r-q/p)}\int_0^{\infty}P\{|X-b|>M2^{(i+1)/p}+s^{1/q}\}ds \quad (s=t2^{(i+1)q/p})\\
&\geq C\sum_{i=1}^{\infty}2^{i(r-q/p)}\int_{M^q2^{iq/p}}^{\infty}P\{|X-b|>M2^{(i+1)/p}+s^{1/q}\}ds\\
&=C\sum_{i=1}^{\infty}2^{i(r-q/p)}\sum_{j=i}^{\infty}\int_{M^q2^{jq/p}}^{M^q2^{(j+1)q/p}}P\{|X-b|>M2^{(i+1)/p}+s^{1/q}\}ds\\
&\geq \sum_{i=1}^{\infty}2^{i(r-q/p)}\sum_{j=i}^{\infty}\int_{M^q2^{jq/p}}^{M^q2^{(j+1)q/p}}P\{|X-b|>M2^{(i+1)/p}+s^{1/q}\}ds\\
&\geq C\sum_{i=1}^{\infty}2^{i(r-q/p)}\sum_{j=i}^{\infty}2^{jq/p}P\{|X-b|>M2^{(j+1)/p+1}\}\\
&=C\sum_{j=1}^{\infty}2^{jq/p}P\{|X-b|>M2^{(j+1)/p+1}\}\sum_{i=1}^{j}2^{i(r-q/p)}\\
&\geq\begin{cases}
C\sum_{j=1}^{\infty}2^{jr}P\{|X-b|>M2^{(j+1)/p+1}\}\geq CE|X|^{rp}, & \text{if } q<rp,\\
C\sum_{j=1}^{\infty}2^{jr}(1+j)P\{|X-b|>M2^{(j+1)/p+1}\}\geq CE|X|^{q}(\log(1+|X|)), & \text{if } q=rp,\\
C\sum_{j=1}^{\infty}2^{jq/p}P\{|X-b|>M2^{(j+1)/p+1}\}\geq CE|X|^{q}, & \text{if } q>rp.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

从而定理得证.

定理 1.2 和定理 1.3 的证明是类似的, 从而略去.

注 1 从定理的证明来看, 关键是用到了 Rosenthal 型矩最大值不等式, 即引理 1.1. 其它的混合或相依随机变量序列如 φ 混合随机变量序列, 负相依随机变量序列, ρ^* 混合随机变量序列也有相应的 Rosenthal 型矩最大值不等式 (见文 [5, 20–21]), 因而本文定理 1.1– 定理 1.3 对这些混合或相依的随机变量序列也是成立的. 特别, 在负相依情形下, 本文讨论了 $q\geq rp$ 等情形时的结果, 而王定成和赵武 [12] 则没有.

参 考 文 献

[1] Hsu P. L., Robbins H., Complete convergence and the law of large numbers, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 1947, **33**: 25–31.

[2] Katz M. L., The probability in the tail of distribution, *Ann. Math. Statist.*, 1963, **34**: 12–318.

[3] Baum L. E., Katz M. L., Convergence rate in the law of large numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1965, **120**: 108–123.

[4] Bai Z. D., Su C., On the complete convergence for independent sums, *Science in China, Ser. A*, 1985, **5**: 399–412 (in Chinese).

[5] Shao Q. M., A moment inequality and its applications, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 1988, **31**(6): 736–747.

[6] Shao Q. M., On the complete convergence for ρ-mixing sequences, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 1988, **32**(3): 377–393.

[7] Shao Q. M., Maximal inequality for partial sums of ρ-mixing sequences, *Ann. Probab.*, 1995, **23**(2): 948–965.

[8] Chow Y. S., On the rate of moment complete convergence of sample sums and extremes, *Bull. Inst. Math. Acta. Sinica*, 1988, **16**: 177–201.

[9] Wang D. C., Su C., Moment complete convergence for B-valued IID random elements sequence, *Acta Math. Appl. Sinica*, 2004, **27**: 440–448 (in Chinese).

[10] Chen P. Y., Complete moment convergence for sequences of independent random elements in Banach spaces, *Stochastic Anal. Appl.*, 2006, **24**: 999–1010.

[11] Li Y. X., Zhang L. X., Complete moment convergence of moving-average processes under dependent assumptions, *Statist. Probab. Lett.*, 2004, **70**: 191–197.

[12] Wang D. C., Zhao W., Moment Complete Convergence for Sums of a Sequence of NA Random Variables, *Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities*, 2006, **21**(4): 445–450 (in Chinese).

[13] Li D. L., Spătaru A., Refinement of convergence rates for tail probabilities, *J. Theor. Probab.*, 2005, **18**: 933–947.

[14] Chen P. Y., Wang D. C., Convergence Rates for Probabilities of Moderate Deviations for Moving Average Processes, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2008, **4**.

[15] Kolmogorov A. N., Rozanov G., On the strong mixing conditions of a stationary Gaussian process, *Probab. Theory Appl.*, 1960, **2**(2): 222–227 (in Russian).

[16] Shao Q. M., Note on invariance principle for ρ-mixing sequence, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 1988, **9**(3): 409–412.

[17] Shao Q. M., Amost sure invariance principles for mixing sequences of random variables, *Stochastic Processes Appl.*, 1993, **48**(2): 319–334.

[18] Lu C. R., Lin Z. Y., The limit theory for mixing dependent random variables, Beijing: Science Press, 1997 (in Chinese).

[19] Zhang L. X., Wen J. W., Strong laws for sums of B-valued mixing random fields, *Chinese Ann. Math., Chinese Series*, 2001, **20**(2): 205–216 (in Chinese).

[20] Shao Q. M., A comparison theorem on inequalities between negatively associated and independent random variables, *J. Theor. Probab.*, 2002, **13**: 343–356.

[21] Utev S., Peligrad M., Maximal inequalities and an invariance principle for a class of weakly dependent random variables, *J. Theor. Probab.*, 2003, **16**(1): 101–115.