第51卷第2期　　数 学 学 报 中 文 版　　Vol.51, No.2
2008年3月　　ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series　　Mar., 2008

文章编号: 0583-1431(2008)02-0365-06　　**文献标识码: A**

带对称齐次核的级数算子的范数刻画及其应用

洪　勇

广东商学院数学与计算科学系 广州 510320
E-mail: hongyong59@sohu.com

摘　要　对带对称齐次核 $K(m,n)$ 的级数算子 T: $T\{a_n\}=\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)a_n$, $\{a_n\}\in l_{\omega(n)}$, $l=\{\{a_n\}\,|\,a_n\geq 0,\ \sum_{n=1}^{\infty}\omega(n)a_n<+\infty\}$, 本文研究了 T 的范数刻画, 并讨论其应用.

关键词　对称齐次核; 级数算子; 算子有界; 范数
MR(2000) 主题分类　26D15
中图分类　O178

On the Norm of a Series Operator with a Symmetric and Homogeneous Kernel and Its Application

Yong HONG

Department of Mathematics, Guangdong Business College, Guangzhou 510320, *P. R. China*
E-mail: hongyong59@sohu.com

Abstract　For a series operator T with a symmetric and homogemecus rernel $k(m,n)$ defined by $T\{a_n\}=\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)a_n$, $\{a_n\}\in l_{\omega(n)}$, $lw(n)=\{\{a_n\}\,|\,a_n\geq 0,\ \sum_{n=1}^{\infty}\omega(n)\cdot a_n<+\infty\}$, the norm of T is given, and its applications are discussed.

Keywords　symmetric and homogeneous kernel; series operator; bounded operator; norm
MR(2000) Subject Classification　26D15
Chinese Library Classification　O178

1　引言与预备知识

设 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\omega(n)\geq 0$ $(n\in N)$, 定义带权的 Hilbert 序列集 $l^p_{\omega(n)}$:

$$l^p_{\omega(n)}=\left\{\{a_n\}\,|\,a_n\geq 0,\ \|\{a_n\}\|_{p,\omega}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\omega(n)a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty\right\}.$$

当 $\omega(n)=1$ 时, 记 $l^p=l^p_1$.

收稿日期: 2006-12-06; 接受日期: 2007-09-15
基金项目: 广东省高校自然科学研究重点 (05Z0261); 广东省自然科学基金 (06301003); 广东商学院重点项目

设 $K(m,n)$ 满足对称性 $K(m,n)=K(n,m)$ 及 λ 次齐次性 $K(tm,tn)=t^{\lambda}K(m,n)$, 称 $K(m,n)$ 为对称齐次核, 对 $\{a_n\}\in l^p_{\omega(n)}$, 定义级数算子 T:

$$T\{a_n\}=\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)a_n,\quad m\in N. \tag{1}$$

若存在常数 $M>0$, 使

$$\|T\{a_n\}\|_{q,\omega}\le M\|\{a_n\}\|_{p,\omega_1},\quad \{a_n\}\in l^p_{\omega_1(n)},$$

则称 T 为 $(l^p_{\omega_1}\to l^q_{\omega})$ 型有界算子, 全体 $(l^p_{\omega_1}\to l^q_{\omega})$ 型有界算子记为 $B(l^p_{\omega_1}\to l^q_{\omega})$. T 的范数定义为

$$\|T\|=\sup_{\{a_n\}\in l^p_{\omega_1}}\frac{\|T\{a_n\}\|_{q,\omega}}{\|\{a_n\}\|_{p,\omega_1}}.$$

设 $K(m,n)=\frac{1}{m+n}$, 我们有著名的 Hardy–Hilbert 不等式 [1]

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{m+n}\right)^p\le\left[\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\right]^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p, \tag{2}$$

其中的常数因子是最佳的. 由此可得

$$\|T\{a_n\}\|_p\le\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\|\{a_n\}\|_p,$$

且 $\|T\|=\pi/\sin(\pi/p)$. Hardy–Hilbert 不等式是分析学中的重要不等式, 关于它的推广与改进已有许多有价值的结果 [2−8]. 最近, 杨 [3] 在一定条件下得到

$$\sum_{m=1}^{\infty}n^{\frac{p\lambda}{2}-1}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(m+n)^{\lambda}}\right]^p<B^p\left(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}n^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1}a_n^p. \tag{3}$$

本文的任务是研究更广泛意义下的带对称齐次核的级数算子 T 的有界性, 并得到 T 的范数刻画, 同时讨论其应用.

引理 1.1 设 $a,b,p,q\in R$, $K(m,n)$ 满足对称性和 λ 次齐次性: $K(m,n)=K(n,m)$, $K(tm,tn)=t^{\lambda}K(m,n)$ $(t\in R)$. 若

$$k(b,p)=\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp}dt$$

收敛, 且 $bp+aq=2+\lambda$, 则 $k(b,p)=k(a,q)$.

证明 因为 $bp=2+\lambda-aq$, 于是

$$\begin{aligned}k(b,p)&=\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{aq-2-\lambda}dt=\int_0^{+\infty}K\Big(\frac{1}{t},1\Big)t^{aq-2}dt\\&=-\int_{+\infty}^{0}K(u,1)u^{2-aq}\frac{1}{u^2}du=\int_0^{+\infty}K(1,u)u^{-aq}du=k(a,q).\end{aligned}$$

2 带对称齐次核的级数算子的有界性及范数刻画

定理 2.1 设 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $a\in R$, $b\in R$, $\lambda\in R$, $1>bp>0$, $1>aq>0$, $\omega_1(n)=n^{1+\lambda+(a-b)p}$, $\omega(n)=n^{(1-p)(\lambda+1)+(a-b)p}$, 非负连续函数 $K(x,y)$ 分别关于 x 和 y 递减且满足

$$K(x,y)=K(y,x),\quad K(tx,ty)=t^{\lambda}K(x,y).$$

若

$$k(b,p)=\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp}dt,\quad k(a,q)=\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-aq}dt$$

收敛, 则算子 $T:T\{a_n\}=\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)a_n$, 满足

(i) $T\in B(l^p_{\omega_1}\to l^p_{\omega})$, 且

$$\|T\{a_n\}\|_{p,\omega}<k^{\frac{1}{p}}(b,p)k^{\frac{1}{q}}(a,q)\|\{a_n\}\|_{p,\omega_1},\quad \{a_n\}\in l^p_{\omega_1};\tag{4}$$

(ii) 若还有 $bp+aq=\lambda+2$, $K(1,t)\le M$ (常数), 则

$$\|T\|=\sup_{\{a_n\}\in l^p_{\omega_1}}\frac{\|T\{a_n\}\|_{p,\omega}}{\|\{a_n\}\|_{p,\omega_1}}=k(b,p).\tag{5}$$

证明 设 $\{a_n\}\in l^p_{\omega_1}$, 记

$$b_m=m^{(1-p)(\lambda+1)+(a-b)p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)a_n\right)^{p-1},\quad m\in N.$$

由 Holder 不等式, 有

$$\begin{aligned}\|T\{a_n\}\|^p_{p,\omega}&=\sum_{m=1}^{\infty}m^{(1-p)(\lambda+1)+(a-b)p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)a_n\right)^p\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)a_nb_m=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{n^a}{m^b}\right)\left(b_m\frac{m^b}{n^a}\right)K(m,n)\\&\le\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p\frac{n^{ap}}{m^{bp}}K(m,n)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}b_m^q\frac{m^{bq}}{n^{aq}}K(m,n)\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\left[\sum_{n=1}^{\infty}a_n^pn^{ap}\left(\sum_{m=1}^{\infty}K(m,n)m^{-bp}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{m=1}^{\infty}b_m^qm^{bq}\left(\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)n^{-aq}\right)\right]^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

由 $K(x,y)$ 关于 x 及 y 的递减性和 $bp>0$, $aq>0$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}K(m,n)m^{-bp}&<\sum_{m=1}^{\infty}\int_{m-1}^{m}K(n,t)t^{-bp}dt=\int_0^{+\infty}K(n,t)t^{-bp}dt\\&=n^{\lambda}\int_0^{+\infty}K\left(1,\frac{t}{n}\right)t^{-bp}dt=n^{1+\lambda-bp}\int_0^{+\infty}K(1,u)u^{-bp}du\\&=k(b,p)n^{1+\lambda-bp}.\end{aligned}$$

同理, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)n^{-aq}<k(a,q)m^{1+\lambda-aq},$$

于是可得

$$\begin{aligned}\|T\{a_n\}\|^p_{p,\omega}&<k^{\frac{1}{p}}(b,p)k^{\frac{1}{q}}(a,q)\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{1+\lambda+(a-b)p}a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}m^{1+\lambda+(b-a)q}b_m^q\right)^{\frac{1}{q}}\\&=k^{\frac{1}{p}}(b,p)k^{\frac{1}{q}}(a,q)\|\{a_n\}\|_{p,\omega_1}\|T\{a_n\}\|^{p-1}_{p,\omega}.\end{aligned}$$

由此得到 (4) 式.

(ii) 若还有 $bp+aq=\lambda+2$, 由引理 1, 有 $k(b,p)=k(a,q)$, 于是由 (4) 式, 得到

$$\|T\{a_n\}\|_{p,\omega}<k(b,p)\|\{a_n\}\|_{p,\omega_1}.$$

如果 (5) 式不成立, 则存在常数 $C<k(b,p)$, 使 $\|T\{a_n\}\|_{p,\omega}\le C\|\{a_n\}\|_{p,\omega_1}$, 于是

$$\sum_{m=1}^{\infty}m^{(1-p)(\lambda+1)+(a-b)p}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)a_n\Big)^p<C^p\sum_{n=1}^{\infty}n^{1+\lambda+(a-b)p}a_n^p=C^p\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1+apq}a_n^p$$

对充分小的 $\varepsilon>0$, 令 $a_n=n^{-(apq+\varepsilon)/p}$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1+apq}a_n^p=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1-\varepsilon}=1+\sum_{n=2}^{\infty}n^{-1-\varepsilon}<1+\int_1^{+\infty}t^{-1-\varepsilon}dt=1+\frac{1}{\varepsilon},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}m^{(1-p)(\lambda+1)+(a-b)p}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)a_n\Big)^p=\sum_{m=1}^{\infty}m^{(1-p)(\lambda+1)+(a-b)p}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)n^{-\frac{apq+\varepsilon}{p}}\Big)^p.$$

又因为

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)n^{-\frac{apq+\varepsilon}{p}}&>\int_1^{+\infty}K(m,t)t^{-\frac{apq+\varepsilon}{p}}dt\\&=m^{\lambda}\int_0^{+\infty}K\Big(1,\frac{t}{m}\Big)t^{-\frac{apq+\varepsilon}{p}}dt-m^{\lambda}\int_0^{1}K\Big(1,\frac{t}{m}\Big)t^{-\frac{apq+\varepsilon}{p}}dt\\&=m^{1+\lambda-\frac{apq+\varepsilon}{p}}\int_0^{+\infty}K(1,u)u^{-\frac{apq+\varepsilon}{pq}q}du-m^{1+\lambda-\frac{apq+\varepsilon}{p}}\int_0^{1/m}K(1,u)u^{-\frac{apq+\varepsilon}{p}}du\\&\ge m^{1+\lambda-\frac{apq+\varepsilon}{p}}k\Big(\frac{apq+\varepsilon}{pq},q\Big)-m^{1+\lambda-\frac{apq+\varepsilon}{p}}M\int_0^{1/m}u^{-\frac{apq+\varepsilon}{p}}du\\&=m^{1+\lambda-\frac{apq+\varepsilon}{p}}k\Big(a+\frac{\varepsilon}{pq},q\Big)-\frac{pM}{p-apq-\varepsilon}m^{\lambda},\end{aligned}$$

利用 $(x-y)^p(x>0,y>0)$ 关于变量 y 的泰勒展开式, 可得不等式 $(x-y)^p>x^p-px^{p-1}y$, 于是由此不等式, 可得

$$\begin{aligned}&\Big(\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)n^{-\frac{apq+\varepsilon}{p}}\Big)^p\\&\ge\Big[m^{1+\lambda-\frac{apq+\varepsilon}{p}}k\Big(a+\frac{\varepsilon}{pq},q\Big)-\frac{pM}{p-apq-\varepsilon}m^{\lambda}\Big]^p\\&\ge m^{p(1+\lambda)-apq-\varepsilon}k^p\Big(a+\frac{\varepsilon}{pq},q\Big)-\frac{p^2M}{p-apq-\varepsilon}m^{\lambda}\Big[m^{1+\lambda-\frac{apq+\varepsilon}{p}}k\Big(a+\frac{\varepsilon}{pq},q\Big)\Big]^{p-1}\\&=m^{p(1+\lambda)-apq-\varepsilon}k^p\Big(a+\frac{\varepsilon}{pq},q\Big)-\frac{p^2M}{p-apq-\varepsilon}k^{p-1}\Big(a+\frac{\varepsilon}{pq},q\Big)m^{\lambda+(p-1)(\lambda+1)-\frac{apq+\varepsilon}{q}},\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{\infty}m^{(1-p)(\lambda+1)+(a-b)p}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)a_n\Big)^p\\&\quad>k^p\Big(a+\frac{\varepsilon}{pq},q\Big)\sum_{m=1}^{\infty}m^{-1-\varepsilon}-\frac{P^2M}{p-apq-\varepsilon}k^{p-1}\Big(a+\frac{\varepsilon}{pq},q\Big)\sum_{m=1}^{\infty}m^{-(2-aq+\frac{\varepsilon}{q})}\\&\quad>\frac{1}{\varepsilon}k^p\Big(a+\frac{\varepsilon}{pq},q\Big)-O(1).\end{aligned}$$

综上可得

$$\frac{1}{\varepsilon}k^p\Big(a+\frac{\varepsilon}{pq},q\Big)-O(1)<C^p\Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big).$$

于是

$$k^p\Big(a+\frac{\varepsilon}{pq},q\Big)-\varepsilon O(1)<C^p(1+\varepsilon).$$

令 $\varepsilon\to 0^+$, 得 $k(a,q)\le C$, 即 $k(b,p)\le C$, 这是一个矛盾, 故 (5) 式成立.

3 应用

作为 (4) 和 (5) 式的应用, 定义 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的内积为

$$(\{a_n\},\{b_n\})=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n,\quad \{a_n\}\in l,\quad \{b_n\}\in l.$$

我们有如下定理

定理 3.1 设 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $a\in R$, $b\in R$, $\lambda\in R$, $0<bp<1$, $0<aq<1$, $\omega_1(n)=n^{1+\lambda+(a-b)p}$, $\omega_2(n)=n^{1+\lambda+(b-a)q}$, $K(x,y)$ 满足定理 2.1 的条件. 若

$$k(b,p)=\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp}dt,\quad k(a,q)=\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-aq}dt$$

收敛, 则算子 $T:T\{a_n\}=\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)a_n$ 满足

(i) 对于 $\{a_n\}\in l^p_{\omega_1},\{b_n\}\in l^q_{\omega_2}$, 有不等式

$$(T\{a_n\},\{b_n\})\le k^{\frac{1}{p}}(b,p)k^{\frac{1}{q}}(a,q)\|\{a_n\}\|_{p,\omega_1}\|\{b_n\}\|_{q,\omega_2};\tag{6}$$

(ii) 若还有 $bp+aq=\lambda+2$, $K(1,t)\le M$ (常数), 则

$$(T\{a_n\},\{b_n\})\le k(b,p)\|\{a_n\}\|_{p,\omega_1}\|\{b_n\}\|_{q,\omega_2},\tag{7}$$

其中 (7) 中的常数因子 $k(b,p)$ 是最佳的.

证明 设 $\omega(m)=m^{(1-p)(\lambda+1)+(a-b)p}$, 利用定理 2.1 的 (4) 式及 Holder 不等式, 有

$$\begin{aligned}(T\{a_n\},\{b_n\})&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)a_nb_m\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\Big(m^{-\frac{1+\lambda+(b-a)q}{q}}\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)a_n\Big)\big(m^{\frac{1+\lambda+(b-a)q}{q}}b_m\big)\\&\le\left[\sum_{m=1}^{\infty}m^{(p-1)(1+\lambda)+(a-b)p}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)a_n\Big)^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{m=1}^{\infty}m^{1+\lambda+(b-a)q}b_m^q\right]^{\frac{1}{q}}\\&=\|T\{a_n\}\|_{p,\omega}\|\{b_n\}\|_{q,\omega_2}\le k^{\frac{1}{p}}(b,p)k^{\frac{1}{q}}(a,q)\|\{a_n\}\|_{p,\omega_1}\|\{b_n\}\|_{q,\omega_2},\end{aligned}$$

故 (6) 成立.

容易地, 由 (6) 式也可导出 (4) 式, 故 (6) 与 (4) 式等价. 从而, 当 $bp+aq=2+\lambda$, $K(1,t)\le M$ 时, (7) 与 (5) 式等价, 故 (7) 式成立, 且 (7) 式中的常数因子是最佳的.

推论 3.1 设 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\{a_n\}\in l^p$, $\{b_n\}\in l^q$, 非负连续函数 $K(x,y)$ 满足

$$K(x,y)=K(y,x),\quad K(tx,ty)=t^{-1}K(x,y),\quad K(1,t)\le M,$$

且 $k(p)=\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-\frac{1}{p}}dt$ 收敛, 则算子 $T:T\{a_n\}=\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)a_n$ $(m\in N)$ 满足

$$\|T\|=\sup_{\{a_n\}\in\ l^p}\frac{\|T\{a_n\}\|_p}{\|\{a_n\}\|_p}=k(p), \tag{8}$$

$$(T\{a_n\},\{b_n\})\le k(p)\|\{a_n\}\|_p\|\{b_n\}\|_q, \tag{9}$$

其中 (9) 式中的常数因子 $k(p)$ 是最佳的.

证明 在 (5) 和 (7) 式中取 $\lambda=-1$, $a=b=\frac{1}{pq}$ 即得.

推论 3.2 设 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $r>1$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$, $0<\lambda<s$, 则

$$\sum_{m=1}^{\infty}m^{p\frac{\lambda}{s}-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\max\{m^\lambda,n^\lambda\}}\right)^p\le\left[\frac{s^2}{\lambda(s-\lambda)}\right]^p\sum_{n=1}^{\infty}n^{p(1-\frac{\lambda}{r})-1}a_n^p; \tag{10}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_nb_m}{\max\{m^\lambda,n^\lambda\}}\le\frac{s^2}{\lambda(s-\lambda)}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{p(1-\frac{\lambda}{r})-1}a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{q(1-\frac{\lambda}{s})-1}b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{11}$$

其中 (10) 和 (11) 式中的常数因子 $\left[\frac{s^2}{\lambda(s-\lambda)}\right]^p$ 和 $\frac{s^2}{\lambda(s-\lambda)}$ 都是最佳的.

证明 在 (5) 和 (7) 式中分别取

$$K(x,y)=\frac{1}{\max\{x^\lambda,y^\lambda\}},\quad a=\frac{1}{q}\left(1+\frac{\lambda}{r}\right),\quad b=\frac{1}{p}\left(1+\frac{\lambda}{s}\right)$$

即可.

注 1 在 (5) 和 (7) 式中适当地选取 $K(x,y),a,b$ 和 λ, 还可得到许多新的不等式.

参 考 文 献

[1] Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G., Inequalities, Cambridge: Cambridge University Press, 1952

[2] Yang B., Debnath L., On the extended Hardy-Hilbert's type inequality, *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, **272**: 187–199.

[3] Yang B. C., On Hilbert's type inequality with some parameters, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2006, **49**(5): 1122–1126.

[4] Hu K., On Hilbert's type inequality, *Chinese Ann. Math.*, 1992, **13B**(2): 35–39 (in Chinese).

[5] Yang B. C., On Hilbert's inegral inequality, *J. Math. Anal. Appl.*, 1998, **220**: 778–785.

[6] Hong Y., On Hardy-type integral inequalities with some functions, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2006, **49**(1): 39–44.

[7] Kuang J. C., Applied inequalities, Jinan: Shandong Science and Technology press, 2004 (in Chinese).

[8] Yang B. C., On the norm of an integral operator and application, *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, **321**(1): 182–192.