第51卷第2期 数学学报中文版 Vol.51, No.2
2008年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Mar., 2008

文章编号: 0583-1431(2008)02-0291-08 **文献标识码: A**

带可变密度和吸收项的退化抛物方程解的局部性和渐近行为

胡学刚

重庆邮电大学应用数学研究所 重庆 400065
E-mail: huxg@cqupt.edu.cn

穆春来

重庆大学数理学院 重庆 400044

摘　要 研究一类在非均匀介质中带可变系数和吸收项的非线性退化抛物方程 Cauchy 问题解的局部性质和渐近行为, 得到了解有局部性的条件. 同时, 证明了解的渐近性质, 发现了有限时刻的熄灭现象. 这些结果改进和推广了相关问题的最新成果.

关键词 退化抛物方程; 局部性; 渐近行为
MR(2000) 主题分类 35K55, 35K65, 35B40
中图分类 O175.26

Localization and Asymptotic Behavior of Solutions to Degenerate Parabolic Equations with Variable Density and Absorption

Xue Gang HU

Institute of Applied Mathematics, Chongqing University of Post and Telecommunications, Chongqing 400065*, P. R. China*
E-mail: huxg@cqupt.edu.cn

Chun Lai MU

School of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400044*, P. R. China*

Abstract For a wide class of nonlinear parabolic equations with variable density and absorption, this paper obtains the conditions for the localization of solutions to the Cauchy problem with nonnegative compactly initial data, and proves the asymptotic behavior. Moreover, this article discovers the extinction phenomena under some conditions. These results improve and extend previous results on the related problems.

Keywords degenerate parabolic equations; localization; asymptotic behavior
MR(2000) Subject Classification 35K55, 35K65, 35B40
Chinese Library Classification O175.26

收稿日期: 2006-07-06; 接受日期: 2007-07-25
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10771226); 重庆市自然科学基金资助项目 (2007BB2450)

1 引言与主要结果

考虑如下问题

$$\begin{cases} \rho(|x|)u_t = \mathrm{div}(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) - f(u), & x\in\mathbb{R}^N, \quad t>0, \\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $u=u(x,t)$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_N)$, $N\geq 1$, $|x|=(\sum_{i=1}^N x_i^2)^{\frac{1}{2}}$, $Du=(u_{x_1},u_{x_2},\dots,u_{x_N})$; $m\geq 1$, $\lambda\geq 1$ 为常数, 且 $m+\lambda-2>0$; 吸收项 $f\in C^1([0,\infty))$, $f(s)\geq 0$, 通常取 $f(s)=c_0s^p$, $(c_0>0$, $p>0$ 为常数); 初值 $u_0(x)$ 满足

$$u_0\geq 0, \quad \mathrm{supp}u_0\subset B_{R_0}:=\{x\in\mathbb{R}^N:|x|<R_0\}, \quad \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}<\infty. \tag{1.2}$$

函数 $\rho(s)$ 为 $[0,\infty)$ 上的单调递减正函数, 且 $\rho(0)=1$, 通常取 $\rho=\rho(x)$ 为如下形式

$$\rho(x)=\frac{\rho_0}{(1+|x|)^k}, \quad k>0. \tag{1.3}$$

这里 ρ_0 为正常数.

如果一个定解问题的解 $u(x,t)$ 具有下列性质 (P1):

$$\forall\, x\in\mathbb{R}^N, \ \ \exists\, T=T(x)>0, \ \ 使得\ \ \forall\, t>T, \quad u(x,t)>0, \tag{P1}$$

我们称该解有正性 (Positivity property); 若一个定解问题的解 $u(x,t)$ 具有下列性质 (P2):

$$\exists\, L>0, \ \ 使得\ \ \mathrm{supp}u(.,t)\subset \overline{B}_L \quad (t\geq 0), \tag{P2}$$

则称该解有局部性 (Localization property).

问题 (1.1) 所描述的数学模型具有广泛的数学与物理应用背景 [1]. 可变系数 $\rho(x)$ 通常表示发生扩散吸收过程的介质密度. 在物理学中, 设 $u(x,t)$ 表示气体密度, 若表示该物理模型的定解问题的解有正性, 则表明该气体最终会流动到整个区域; 若表示该物理模型的定解问题的解有局部性, 表明气体在任何时刻都被限制在一个有限区域内. 近年来, 问题 (1.1) 已引起了人们的广泛关注, 对参数 ρ,m,λ 的某些特殊情形, 得到了很好的结果 (见文献 [2–3] 及其参考文献).

解的正性和局部性与解的交接面 (interfaces) 密切相关. 在一维区域 $(N=1)$, 解 $u(x,t)$ 的交接面定义如下

$$\xi^+(t):=\sup\{x\in\mathbb{R}:u(x,t)>0\}, \quad (t\geq 0),$$
$$\xi^-(t):=\inf\{x\in\mathbb{R}:u(x,t)>0\}, \quad (t\geq 0).$$

称 $\xi^+(t)$ 和 $\xi^-(t)$ 分别为 $u(x,t)$ 在 t 时刻的右交接面和左交接面. 显然, 对于非负非平凡的初值 u_0, 有 $\xi^-(t)\leq\xi^+(t)$.

在某些条件下, 解的交接面在任意时刻都存在 (见文献 [1, 4, 5]), 而且还可能出现一种有趣现象, 即存在时刻 $t_0\in(0,\infty)$, 使得当 $t\to t_0^-$ 时, 有 $|\xi^\pm|\to\infty$, 这种现象称为解 $u(x,t)$ 的支集在有限时刻爆破, 也称解 $u(x,t)$ 的交接面在有限时刻消失, 简称解 $u(x,t)$ 具有 BFT 性质. 否则称解 $u(x,t)$ 具有有限摄动传播速度, 简称解有 FSP 性质.

关于问题 (1.1) 解的支集性质, 当 $N=1$ (一维情形), $f(s)=s^p$ ($p>0$ 为常数) 时, 在文献 [6] 中, 获得了解的支集爆破的条件, 文献 [3] 还获得了下述结果:

(i) 若 $p<m+\lambda-1$ 时, 则问题 (1.1) 的解有局部性, 且存在仅依赖于 m,λ,p 和 $\|u_0\|_\infty$ 的常数 L, 使得

$$|\xi^\pm(t)|\leq L, \quad (t\geq 0).$$

(ii) 若 $p>m+\lambda-1$, $k<k^*:=\frac{(p-1)(\lambda+1)}{p-(m+\lambda-1)}$, 且存在常数 $\rho_1,\rho_2>0$ 满足

$$\frac{\rho_1}{(1+|x|)^k}\le\rho(x)\le\rho_2,\quad(x\in\mathbb{R}),\tag{1.4}$$

则问题 (1.1) 解的交接面整体存在, 且存在仅依赖于 m,λ,p,k,ρ_1 和 u_0 的常数 $a,b>0$, 使得

$$|\xi^{\pm}(t)|\le b(at+1)^{\frac{1}{k^*-k}},\quad(t\ge0).$$

(iii) 若 $p>m+\lambda-1$, $k>k^*$, 且存在常数 $\rho_3>0$ 满足

$$\rho(x)\le\frac{\rho_3}{(1+|x|)^k},\quad(x\in\mathbb{R}),\tag{1.5}$$

则存在正数 $T\in(0,\infty)$, 使得

$$u(x,t)>0,\quad(\forall\,x\in\mathbb{R},\ \forall\,t\ge T).$$

此时问题 (1.1) 的解有正性, 且解的交接面在有限时刻消失.

(iv) 若 $p>m+\lambda-1$, $k=k^*$, $\rho(x)$ 满足条件 (1.4), 则存在仅依赖于 m,λ,p,k,ρ_1,u_0 的常数 B,β, 使得

$$|\xi^{\pm}(t)|\le B\mathrm{e}^{\beta t},\quad t\ge0.$$

此时问题 (1.1) 解的交接面整体存在.

对于任意维空间 $(N\ge1)$ 的情形, 令

$$P(t):=\{x\in\mathbb{R}^N:\,u(x,t)>0\},\quad\eta(t):=\inf\{r>0:P(t)\subset B_r\},\quad(t\ge0).$$

不妨设 $0\in\mathrm{Int\,supp}u_0$, 由 u_0 的连续性知 $\eta(0)>0$, 从而 $\forall\,t>0$, $\eta(t)>0$. 称区域 $P(t)$ 的边界曲面 $\partial P(t)$ 为解 $u(x,t)$ 在 t 时刻的交接面. 若存在 $t_0\in(0,\infty)$, 使得当 $t\to t_0^-$ 时, 有 $\eta(t)\to\infty$, 则称解的交接面在有限时刻消失, 或称解具有 BFT 性质, 否则我们称解具有有限摄动传播速度, 简称解具有 FSP 性质.

相对一维情形而言, 目前对问题 (1.1) 在高维情形解的支集性质的研究较少. 在文献 [4] 中, Bertsch 等人讨论了当 $\rho(x)\equiv1$, $\lambda=1$ 时解的正性与局部性; Tedeev 研究了无吸收项的情形 $(f(s)\equiv0)$, 获得了解具有 FSP 性质和 BFT 性质的充分条件 [2].

受文献 [1,7–8] 思想的启发, 利用 Young 不等式、Nirenberg-Gagliardo 不等式等工具, 对于吸收项为一般结构形式的情形, 在任意维空间里 $(N\ge1)$ 证明问题 (1.1) 的解的局部性. 并且当吸收项 $f(s)=c_0s^p$ ($c_0>0$, $p>0$ 为常数) 时, 利用上下解方法还证明了解的渐近性质, 发现当 $0<p<1$ 时, 解在有限时刻熄灭 (extinction). 主要结果如下.

定理 1.1 (解的局部性) 设 $u(x,t)$ 是问题 (1.1) 在条件 (1.2) 成立时的解, 若存在正数 ε_0, 使得

$$\rho(r)r^{k_N^*-\varepsilon_0}\ \text{为}\ (0,\infty)\ \text{内的不减函数},\tag{1.6}$$

则 $u(x,t)$ 具有局部性, 其中

$$k_N^*:=\begin{cases}\dfrac{N(m+\lambda-2)+\lambda+1}{m+\lambda-1}, & \lambda+1<N,\\ \lambda+1, & \lambda+1\ge N.\end{cases}\tag{1.7}$$

注 1 如果 ρ 为 (1.3) 式所定义的函数, 可取 $\varepsilon_0=k_N^*-k$, 因此当 $k<k_N^*$ 时, 条件 (1.6) 成立, 所以定理 1.1 不仅改进和推广了文 [1–3] 的结果, 而且还去掉了空间维数的限制, 因而具有更广泛的应用价值.

定理 1.2 (解的渐近性) 设 $u(x,t)$ 是问题 (1.1) 的解, 条件 (1.2) 成立, $N \geq 1$, $f(u) = c_0 u^p$ ($c_0 > 0$, $p > 0$ 为常数), 则有

$$\|u(.,t)\|_\infty \to 0, \quad (t \to \infty).$$

特别地, 当 $0 < p < 1$ 时, 解 $u(x,t)$ 在有限时刻熄灭, 即存在 $T^* \in (0,\infty)$, 使得 $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (T^*,\infty)$, 有 $u \equiv 0$.

本文第 2 节讨论弱解的有关概念和比较原理, 第 3 节在任意维空间里讨论解的局部性, 给出定理 1.1 的证明, 最后一节讨论解的渐近性质, 给出定理 1.2 的证明.

2 预备知识

不失一般性, 假设 $f(s) = c_0 s^p$, 令 $v = u^\sigma$, $\sigma = \frac{m+\lambda-1}{\lambda}$, 问题 (1.1) 等价地变形为

$$\rho\frac{\partial v^{\frac{1}{\sigma}}}{\partial t} = \sigma^{-\lambda}\mathrm{div}(|Dv|^{\lambda-1}Dv) - c_0 v^{\frac{p}{\sigma}}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T), \tag{2.1}$$

$$v^{\frac{1}{\sigma}}(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.2}$$

定义 2.1 下列初值问题

$$\rho\frac{\partial v^{\frac{1}{\sigma}}}{\partial t} = \sigma^{-\lambda}\mathrm{div}(|Dv|^{\lambda-1}Dv) - c_0 v^{\frac{p}{\sigma}}, \quad (x,t) \in B_r \times (0,T), \tag{2.3}$$

$$v|_{\partial B_r \times (0,T)} = 0, \tag{2.4}$$

$$v^{\frac{1}{\sigma}}(x,0) = u_0(x), \qquad x \in B_r \tag{2.5}$$

的弱解是满足下列条件的非负有界函数 $v(x,t)$:

(i) $\forall \tau > 0,\ v(x,\tau) \in L^\infty([\tau,T) : W_0^{1,\lambda+1}(B_r)) \cap C([0,T] : L^1(B_r))$;

(ii) $\forall \varphi(x,t) \in C_0^1(B_r \times (0,T))$,

$$\int_0^T \int_{B_r} (-\rho v^{\frac{1}{\sigma}}\varphi_t + \sigma^{-\lambda}|Dv|^{\lambda-1}Dv \cdot D\varphi + c_0 v^{\frac{p}{\sigma}}\varphi)dxdt = 0. \tag{2.6}$$

(iii) $\lim_{t\to 0} \|v^{\frac{1}{\sigma}}(.,t) - u_0\|_{L^1(B_r)} = 0$.

注 2 将 (2.6) 式中的等号 “=” 改为不等号 “$\leq$” (或 “$\geq$”), 在定义 (2.1) 中相应地得到问题 (2.3)–(2.5) 的下解和上解的定义.

注 3 类似于文献 [9] 的方法, 容易证明问题 (2.3)–(2.5) 的解存在且唯一.

定义 2.2 若 $\forall r > 0$, $u(x,t)$ 都是问题 (2.3)–(2.5) 的非负有界弱解, 则称它为问题 (1.1) 的弱解.

令 $\mathscr{L}u := \rho(|x|)u_t - \mathrm{div}(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) + c_0 u^p$.

注 4 类似于文献 [10–11] 的方法, 容易证明问题 (1.1) 的比较原理成立, 即

引理 2.1 设 u, $\underline{u}, \bar{u}$ 分别为问题 (1.1) 的解、下解和上解, 则 $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$.

引理 2.2 设 M_0 为常数, $\bar{u}(x,t)$ 满足:

(i) $0 \leq \mathscr{L}\bar{u} \leq M_0$, $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T)$; (ii) $\bar{u}(x,0) \geq u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^N$,

则 $\bar{u}$ 是问题 (1.1) 的上解.

引理 2.3 若函数 $\underline{u}(x,t)$ 满足:

(i) $\mathscr{L}\underline{u} \leq 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T)$; (ii) $\underline{u}(x,0) \leq u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^N$,

则 $\underline{u}$ 是问题 (1.1) 的下解.

3 解的局部性

我们先来讨论问题 (1.1) 解的局部性, 使用文 [1,7] 和 [8] 的思想来证明定理 1.1.

定理 1.1 的证明 分两种情形.

情形 I $\lambda+1\geq N$, $k_N^*=\lambda+1$. 令 $R>4R_0$, $R_n=R(1+\frac{\delta}{2^n})$, $\bar R_n=\frac{R}{2}(1-\frac{\delta}{2^n})$, $n=0,1,\dots,$ 构造满足如下性质的截断函数 $\zeta_n(x)$:

$$\zeta_n(x)=\begin{cases}1, & x\in B_{R_n}\backslash B_{\bar R_n},\\ 0, & x\notin B_{R_{n-1}}\backslash B_{\bar R_{n-1}},\end{cases}\qquad |D\zeta_n|\leq\frac{2^nc}{R\delta},$$

其中 $0<\delta<\frac12$, 显然, $R_{n-1}\geq R_n\geq\frac{R}{2}\geq\bar R_n\geq\bar R_{n-1}$ 且 $\mathrm{supp}u_0\cap\mathrm{supp}\zeta_n=\Phi$, 从而 $u_0(x)\zeta_n(x)\equiv0$, $(x\in\mathbb{R}^N)$.

设 $0<\theta<1$, 在问题 (1.1) 的方程的两边同时乘以 $\zeta_n^{\lambda+1}u^\theta$, 然后在 $Q_t:=\mathbb{R}^N\times(0,t)$ 上积分, 有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1+\theta}\int_{\mathbb{R}^N}\rho u^{1+\theta}\zeta_n^{\lambda+1}dx+\theta\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}u^{m+\theta-2}|Du|^{\lambda+1}\zeta_n^{\lambda+1}dxd\tau\\&\quad=-(\lambda+1)\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}\zeta_n^\lambda u^{m+\theta-1}|Du|^{\lambda-1}Du\cdot D\zeta_ndxd\tau-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}f(u(x,\tau))u^\theta\zeta^{\lambda+1}dxd\tau.\end{aligned}\tag{3.1}$$

应用 Young 不等式, 有

$$\begin{aligned}&-(\lambda+1)\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}\zeta_n^\lambda u^{m+\theta-1}|Du|^{\lambda-1}Du\cdot D\zeta_ndxd\tau\\&\quad\leq\lambda h^{\lambda+1}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}\zeta_n^{\lambda+1}u^{m+\theta-2}|Du|^{\lambda+1}dxd\tau+h^{-\frac{\lambda+1}{\lambda}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}|D\zeta_n|^{\lambda+1}u^{m+\theta+\lambda-1}dxd\tau,\end{aligned}\tag{3.2}$$

其中 $h>0$ 为任意实数. 选取 $h=(\frac{\theta}{2\lambda})^{\frac{1}{\lambda+1}}$, 联合 (3.1) 和 (3.2) 式, 有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}\rho u^{1+\theta}\zeta_n^{\lambda+1}dx+\frac{\theta(1+\theta)}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}u^{m+\theta-2}|Du|^{\lambda+1}dxd\tau+(1+\theta)\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}f(u(x,\tau))u^\theta\zeta_n^{\lambda+1}dxd\tau\\&\quad\leq(1+\theta)\Big(\frac{2\lambda}{\theta}\Big)^{\frac1\lambda}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}|D\zeta_n|^{\lambda+1}u^{m+\theta+\lambda-1}dxd\tau,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}\rho u^{1+\theta}\zeta_n^{\lambda+1}dx+\frac{\theta(1+\theta)}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}u^{m+\theta-2}|Du|^{\lambda+1}dxd\tau\\&\quad\leq(1+\theta)\Big(\frac{2\lambda}{\theta}\Big)^{\frac1\lambda}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}|D\zeta_n|^{\lambda+1}u^{m+\theta+\lambda-1}dxd\tau.\end{aligned}\tag{3.3}$$

进一步地

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}\rho u^{1+\theta}(.,\tau)\zeta_n^{\lambda+1}dx+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}u^{m+\theta-2}|Du|^{\lambda+1}\zeta_n^{\lambda+1}dxd\tau\\&\quad\leq c\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}u^{m+\theta+\lambda-1}|D\zeta_n|^{\lambda+1}dxd\tau,\end{aligned}\tag{3.4}$$

其中 $c=\big(\frac{2\lambda}{\theta}\big)^{\frac1\lambda}\big[\frac{2}{\theta}+(1+\theta)\big]$.

令

$$v_n=u^{\frac{m+\lambda+\theta-1}{\lambda+1}}\zeta_n^s,\quad s>\frac{m+\lambda+\theta-1}{1+\theta},\quad\beta=\frac{(1+\theta)(\lambda+1)}{m+\lambda+\theta-1},$$

利用 ζ_n 的性质和函数的凸性, 由 (3.4) 式, 得

$$M_n := \sup_{0<\tau<t}\int_{\mathbb{R}^N}\rho v_n^{\beta}dx+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}|Dv_n|^{\lambda+1}dxd\tau\le c\frac{2^{n(\lambda+1)}}{(\delta R)^{\lambda+1}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}v_{n-1}^{\lambda+1}dxd\tau. \tag{3.5}$$

由 Nirenberg–Gagliardo 不等式 (见文献 [12] 的第 24 页), 有

$$\int_{\mathbb{R}^N}v_{n-1}^{\lambda+1}dx\le c\Big(\int_{\mathbb{R}^N}|Dv_{n-1}|^{\lambda+1}dx\Big)^{\alpha}\Big(\int_{\mathbb{R}^N}v_{n-1}^{\beta}dx\Big)^{\frac{(1-\alpha)(\lambda+1)}{\beta}}, \tag{3.6}$$

其中 $\alpha=\frac{N(m+\lambda-2)}{K_\theta}$, $K_\theta=N(m+\lambda-2)+(1+\theta)(\lambda+1)$.

由于 $\rho(r)r^{k_N^*-\varepsilon_0}$ 在 $(0,\infty)$ 内是不减的, 因此, 对任意 $b>1$, $r>0$, 有

$$\rho(br)\ge b^{\varepsilon_0-k_N^*}\rho(r), \tag{3.7}$$

所以

$$\int_{\mathbb{R}^N}v_{n-1}^{\beta}dx\le\frac{c}{\rho(R)}\int_{\mathbb{R}^N}\rho v_{n-1}^{\beta}dx. \tag{3.8}$$

(3.6) 式的两边同时关于时间变量 t 积分, 并使用 Hölder 不等式, 同时注意到 (3.8) 式, 得

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}v_{n-1}^{\lambda+1}dxd\tau\le ct^{1-\alpha}\Big(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}|Dv_{n-1}|^{\lambda+1}dxd\tau\Big)^{\alpha}\Big(\sup_{0<\tau<t}\int_{\mathbb{R}^N}v_{n-1}^{\beta}dx\Big)^{\frac{(1-\alpha)(\lambda+1)}{\beta}}. \tag{3.9}$$

利用 Young 不等式, (3.9) 式右边的式子可用下式估计

$$\frac{ct^{1-\alpha}}{\rho(R)^{\frac{(1-\alpha)(\lambda+1)}{\beta}}}M_{n-1}^{1+(1-\alpha)(\frac{\lambda+1}{\beta}-1)}.$$

注意到 (3.5) 式, 有

$$M_n\le c\frac{2^{n(\lambda+1)}t^{1-\alpha}}{R^{\lambda+1}\rho(R)^{\frac{(1-\alpha)(\lambda+1)}{\beta}}}M_{n-1}^{1+(1-\alpha)(\frac{\lambda+1}{\beta}-1)}. \tag{3.10}$$

利用文献 [13, 引理 5.6], 若

$$\frac{M_0^{(1-\alpha)(\frac{\lambda+1}{\beta}-1)}t^{1-\alpha}}{R^{\lambda+1}\rho(R)^{\frac{(1-\alpha)(\lambda+1)}{\beta}}}\le c \tag{3.11}$$

成立, 则当 $n\to\infty$ 时, 有 $M_n\to 0$.

注意到

$$M_0\le\frac{c}{R^{\lambda+1}}\int_0^t\int_{\frac{R}{2}<|x|<R}u^{m+\lambda+\theta-1}dxd\tau\le ct\|u_0\|_\infty^{m+\lambda+\theta-1}R^{N-\lambda-1}. \tag{3.12}$$

联合 (3.11) 和 (3.12) 式可知, 当

$$\frac{t}{R^{\lambda+1}\rho(R)}\le c \tag{3.13}$$

成立时, 有 $u\equiv 0$.

事实上, 在 (3.7) 式中, 取 $b=R$, $r=1$, 则 $\rho(R)\ge R^{\varepsilon_0-k^*}$, 因此当 $\frac{t}{R^{\lambda+1+\varepsilon_0-K_{N^*}}}\le c$ 时, (3.13) 式成立. 即当 $\lambda+1\ge N$, $k_N^*=\lambda+1$, 有 $u\equiv 0$. 从而, 对任意 $|x|>R\ge ct^{\frac{1}{\varepsilon_0}}+4R_0$, 有 $\mathrm{supp}u(.,t)\subset B_R$.

情形 II $\lambda+1<N$, $k_N^*:=\frac{N(m+\lambda-2)+\lambda+1}{m+\lambda-1}$. 构造序列 $\{r_i\}$ 和 $\{\bar r_i\}$ 满足

$$\begin{aligned}r_i&=r_{i-1}+(1-\delta)\delta^{i-1}(R_{n-1}-R_n),\\ \bar r_i&=\bar r_{i-1}-(1-\delta)\delta^{i-1}(\bar R_n-\bar R_{n-1}),\end{aligned}\qquad (i=1,2,\ldots),$$

其中 $r_0 = R_n$, $\bar{r}_0 = \bar{R}_n$, 由此可知, $r_\infty = R_{n-1}$, $\bar{r}_\infty = \bar{R}_{n-1}$.

设 $U_i = B_{r_i} \backslash B_{\bar{r}_i}$, 类似于 (3.5) 和 (3.10) 式的推导, 有

$$\begin{aligned} Y_i &:= \sup_{0<\tau<t} \int_{U_i} \rho w^\beta dx + \int_0^t \int_{U_i} |Dw|^{\lambda+1} dx d\tau \le c \frac{2^{n(\lambda+1)} \delta^{-i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}} \int_0^t \int_{U_{i+1}} w^{\lambda+1} dx d\tau \\ &\le c \frac{2^{n(\lambda+1)} \delta^{-i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1} \rho(R)^{\frac{(1-\alpha)(\lambda+1)}{\beta}}} \left(\int_0^t \int_{U_{i+1}} |Dw|^{\lambda+1} dx d\tau \right)^\alpha \int_0^t \left(\int_{U_{i+1}} \rho w^\beta dx \right)^{\frac{(1-\alpha)(\lambda+1)}{\beta}} d\tau \\ &\le h_1 Y_{i+1} + A h_1^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \delta^{-\frac{i(\lambda+1)}{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

这里 $w = u^{\frac{m+\lambda+\theta-1}{\lambda+1}} \zeta_i^s$, ζ_i 为 U_{i+1} 上的截断函数, 且

$$A := \frac{d^n}{R^{\frac{\lambda+1}{1-\alpha}} \rho(R)^{\frac{\lambda+1}{\beta}}} \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho v_{n-1}^\beta dx \right)^{\frac{\lambda+1}{\beta}} d\tau, \quad h_1 > 0, \quad d = d(N, \lambda, m).$$

由归纳推理, 有

$$Y_0 \le h_1^j Y_j + c A h_1^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{i=1}^j \left(\frac{h_1}{\delta^{(\lambda+1)/(1-\alpha)}} \right)^i.$$

选取 $h_1 = \frac{\delta^{(\lambda+1)/(1-\alpha)}}{2}$, 当 $j \to \infty$ 时, 有 $Y_0 \le cA$, 从而

$$z_n \le \frac{c t d^n z_{n-1}^{1+(\frac{\lambda+1}{\beta}-1)}}{R^{\frac{\lambda+1}{1-\alpha}} \rho(R)^{\frac{\lambda+1}{\beta}}}, \tag{3.14}$$

其中 $z_n := \sup_{0<\tau<t} \int_{\mathbb{R}^N} \rho v_n^\beta dx$.

如果

$$\frac{t z_0^{\frac{\lambda+1}{\beta}-1}}{R^{\frac{\lambda+1}{1-\alpha}} \rho(R)^{\frac{\lambda+1}{\beta}}} \le c \tag{3.15}$$

成立, 由 (3.14) 式知, 当 $n \to \infty$ 时, $z_n \to 0$.

现在来估计 z_0, 在问题 (1.1) 方程的两边同时乘以 u^θ, 然后在 Q_t 上积分, 得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1+\theta} \int_{\mathbb{R}^N} \rho u^{1+\theta} dx - \frac{1}{1+\theta} \int_{\mathbb{R}^N} \rho u_0^{1+\theta} dx \\ &\quad = -\theta \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} u^{m+\theta-2} |Du|^{\lambda+1} dx - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} f(u) u^\theta dx \le 0. \end{aligned}$$

于是, $\int_{\mathbb{R}^N} \rho u^{1+\theta}(.,\tau) dx \le \int_{\mathbb{R}^N} \rho u_0^{1+\theta} dx$. 所以

$$z_0 \le \sup_{0<\tau<t} \int_{\mathbb{R}^N} \rho u^{1+\theta} dx \le \int_{\mathbb{R}^N} \rho u_0^{1+\theta} dx := B_0.$$

因此, 只要

$$\frac{t B_0^{\frac{\lambda+1}{\beta}-1}}{R^{\frac{\lambda+1}{1-\alpha}} \rho(R)^{\frac{\lambda+1}{\beta}}} \le c \tag{3.16}$$

成立, (3.15) 式必成立. 事实上, 取 R 满足 $\frac{t^{1+\theta}}{R^{\varepsilon_0(m+\lambda-1)+\theta(\lambda+1+\varepsilon_0-k_N^*)}} \le c$. 利用 $\rho(r) r^{k_N^* - \varepsilon_0}$ 在 $(0,\infty)$ 内的递增性可知 (3.16) 式成立. 特别地, 选取 $\theta < \frac{\varepsilon_0(m+\lambda-1)}{2k_N^*}$, 则当 $|x| > 4R_0 + c t^{\frac{2k_N^*(1+\theta)}{\varepsilon_0(m+\lambda-1)}}$ 时, $u \equiv 0$, 即问题 (1.1) 的解具有局部性. 定理 1.1 证毕.

4 解的渐近性行为

现在来讨论问题 (1.1) 解的渐近性质.

定理 1.2 的证明 由于 $f(u)=c_0u^p$, 分三种情形.

(i) $p>1$: 构造函数

$$w(x,t):=a(1+t)^{-\frac{1}{p-1}},$$

从而 $\mathscr{L}w=a(1+t)^{-\frac{p}{p-1}}\big(-\frac{\rho(|x|)}{p-1}+c_0a^{p-1}\big)$. 选取 $a>\max\big\{\big(\frac{\|\rho\|_\infty}{c_0(p-1)}\big)^{\frac{1}{p-1}},\|u_0\|_\infty\big\}$, 于是 $0\le\mathscr{L}w\le c_0a^p,\ w(x,0)\ge u_0(x),\ (x\in\mathbb{R}^N)$. 所以, $w(x,t)$ 是问题 (1.1) 的上解.

(ii) $p=1$: 构造函数

$$w(x,t):=a\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}},$$

从而 $\mathscr{L}w=a\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}\big(-\frac{\rho(|x|)}{b}+c_0\big)$. 选取 $a>\|u_0\|_\infty,\ b>\frac{\|\rho\|_\infty}{c_0}$, 则 $0\le\mathscr{L}w\le ac_0$, 所以 $w(x,t)$ 为问题 (1.1) 的上解.

(iii) $0<p<1$: 构造函数

$$w(x,t):=a(1-bt)_+^{\frac{1}{1-p}},$$

选取 $a>\|u_0\|_\infty$, $b<c_0(1-p)a^{p-1}\|\rho\|_\infty^{-1}$, 则 $w(x,t)$ 为问题 (1.1) 的上解.

以上三种情形都有 $\|w\|_\infty\to0,\ (t\to\infty)$, 因此 $\|u(.,t)\|_\infty\to0$. 特别地, 当 $0<p<1$ 时, 解 $u(x,t)\equiv0\ (t\ge b^{-1})$. 因此解 $u(x,t)$ 在有限时刻熄灭.

致谢 作者对审稿人表示衷心感谢.

参 考 文 献

[1] Kersner R., Reyes G., Tesei A., On a class of parabolic equations with variable density and absorption, *Adv. Differential Equations,* 2002, **7**: 155–176.

[2] Tedeev A. F., Conditions for the time global existence and nonexistence of a compact support of solutions to the Cauchy problem for quasilinear degenerate parabolic equations, *Siberian Mathematical Journal,* 2004, **45**: 155–164.

[3] Xiang Z. Y., Hu X. G., Mu C. L., Support properties of solutions to a degenerate equation with absorption and variable density, Nonlinear Analysis, TMA, in Press.

[4] Bertsch M., Kersner R., Petetier L. A., Positive versus localization in degenerate diffusion equations, *Nonlinear Anal. TMA*, 1985, **9**: 987–1008.

[5] Kalashnikov A. S., Some problems of the qualitative theory of non-linear degenerate 2nd-order parabolic equations, *Uspekhi Mat. Nauk.,* 1987, **42**: 135–176; English Translation Russian Math. Surveys, 1987, **42**: 169–222.

[6] Hu X. G., Mu C. L., Disappearance of interfaces for degenerate parabolic equations with variable density and absorption, *Acta Mathematica Scientia*, 2007, **27B**(4): 735–742.

[7] Andreucci D., Tedeev A. F., A Fujita type result for a degenerate Nuemann problem in domains with non-compact boundary, *J. Math. Anal. Appl.,* 1999, **231**: 543–567.

[8] Andreucci D., Tedeev A. F., Sharp estimates and finite speed of propagation for a Nuemann problem in domains narrowing infinity, *Adv. Diff. Equa.,* 2000, **5**: 833–860.

[9] Tsutsumi M., On solutions of some doubly nonlinear degenerate parabolic equations with absorption, *J. Math. Anal. Appl.*, 1988, **132**: 187–212.

[10] Bertsch M., A class of degenerate diffusion equations with a singular nonlinear term, *Nonlinear Anal. TMA,* 1983, **7**: 117–127.

[11] Reyes G., Tesei A., Basic theory for a diffusion-absorption equation in an inhomogeneoue medium, *Nonlinear Differ. Equa. Appl.,* 2003, **10**: 197–222.

[12] Chen Y. Z., Parabolic partial differential equations of second order, Beijing: Peking University Press, 2003 (in Chinese).

[13] Ladyzenskaja O. A., Solonnikov V. A., Uralceva N. N., Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type, *Amer. Math. Soc., Providence, RI,* 1968.