第51卷第2期 数学学报中文版 Vol.51, No.2
2008年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Mar., 2008

文章编号: 0583-1431(2008)02-0351-06 **文献标识码:** A

广义 Ramanujan–Nagell 方程 $x^2-D=3^n$ 的解数

杨继明

玉溪师范学院数学系 玉溪 653100
E-mail: jmy1963@163.com

摘 要 设 D 是不能被 3 整除的正整数. 本文证明了：当 $D>10^{12}$ 时, 如果 Pell 方程 $U^2-DV^2=-1$ 有解 (U,V), 则方程 $x^2-D=3^n$ 至多有 2 组正整数解 (x,n).

关键词 指数 Diophantine 方程；解数；上界
MR(2000) 主题分类 11D61
中图分类 O156.7

The Number of Solutions of the Generalized Ramanujan–Nagell Equation $x^2-D=3^n$

Ji Ming YANG

Department of Mathematics, Yuxi Normal University, Yuxi 653100*, P. R. Chian*
E-mail: jmy1963@163.com

Abstract Let D be a positive integer with $D\not\equiv 0 \pmod 3$. ln this paper we prove that if $D>10^{12}$ and the Pell equation $U^2-DV^2=-1$ has solutions (U,V), then the equation $x^2-D=3^n$ has at most two positive integer solutions (x,n).

Keywords exponential Diophantine equation; number of solutions; upper bound
MR(2000) Subject Classification 11D61
Chinese Library Classification O156.7

1 引言及定理

设 $\mathbb{Z},\mathbb{N}$ 分别是全体整数和正整数的集合. 设 p 是奇素数, D 是不能被 p 整除的正整数；又设 $N(D,p)$ 是广义 Ramanujan–Nagell 方程

$$x^2-D=p^n,\quad x,n\in\mathbb{N} \tag{1}$$

的解 (x,n) 的个数. 长期以来, 有关解数 $N(D,p)$ 的上界估计一直是数论中的一个引人关注的问题 [1]. 1981 年, Beukers 运用 Diophantine 逼近方法证明了：$N(D,p)\le 4$ (见文 [2]). 同时, Beukers 猜测：$N(D,p)\le 3$. 1991 年, 乐茂华运用 Gel'fond–Baker 方法基本上解决了上述猜想,

收稿日期: 2006-03-14; 接受日期: 2007-09-15

即证明了：当 $\max(D,p)>10^{190}$ 时, 必有 $N(D,p)\le 3$ (见文 [3]). 本文通过提出方程 (1) 解的新的距离原理, 结合 Diophantine 逼近方法, 在 Pell 方程

$$U^2-DV^2=-1,\quad U,V\in\mathbb{Z} \tag{2}$$

有解的条件下, 对于 $p=3$ 的情况给出 $N(D,p)$ 的更为精确的上界, 即证明了：

定理 当 $D>10^{12}$ 时, 如果 Pell 方程 (2) 有解 (U,V), 则必有 $N(D,3)\le 2$.

2 若干引理

引理 1 设 d 是非平方正整数, k 是适合 $|k|>1$ 以及 $\gcd(k,d)=1$ 的整数. 如果方程

$$a^2-db^2=k,\quad a,b\in\mathbb{Z},\quad \gcd(a,b)=1 \tag{3}$$

有解 (a,b), 则对于 (3) 的任何一组固定的解 (a,b), 存在唯一的整数 α, β, l 可使

$$\beta a-\alpha b=1,\quad l=\alpha a-d\beta b,\quad 0<l<|k|.$$

如此的 l 称为解 (a,b) 的特征数, 记作 $\langle a,b\rangle$. 当 $\langle a,b\rangle=l$ 时, 必有

$$l^2\equiv d\ (\bmod |k|),\quad a\equiv -lb\ (\bmod |k|).$$

证明 参见文献 [3, 引理 11].

引理 2 如果 $(a,b)=(a_1,b_1)$ 和 (a_2,b_2) 是方程 (3) 的两组解, 则 $\langle a_1,b_1\rangle=\langle a_2,b_2\rangle$ 成立的充要条件是

$$a_2+b_2\sqrt{d}=(a_1+b_1\sqrt{d})(f+g\sqrt{d}),$$

其中 (f,g) 是 Pell 方程

$$f^2-dg^2=1,\quad f,g\in\mathbb{Z} \tag{4}$$

的解.

证明 参见文献 [3, 引理 12].

引理 3 如果方程 (3) 的解 $(a,b)=(a_1,b_1)$ 适合 $\langle a_1,b_1\rangle=l$, 则 $(a,b)=(a_1,-b_1)$ 也是方程 (3) 的解, 而且 $\langle a_1,b_1\rangle=|k|-l$.

证明 因为 $(a,b)=(a_1,b_1)$ 是方程 (3) 的解, 所以 $(a,b)=(a_1,-b_1)$ 显然也是它的解. 设 $\langle a_1,-b_1\rangle=l'$. 由于 $\langle a_1,b_1\rangle=l$, 并且从引理 1 可知 $l\equiv -a_1/b_1\ (\bmod |k|)$ 以及

$$l'\equiv -\frac{a_1}{-b_1}\equiv -l\ (\bmod |k|), \tag{5}$$

故从方程 (5) 以及 $0<l,\ l'<|k|$ 可知 $l'=|k|-l$. 证毕.

引理 4 当 D 是非平方正整数时, 如果 Pell 方程 (2) 有解, $U_1+V_1\sqrt{D}$ 是它的基本解, 则 Pell 方程

$$u^2-Dv^2=1,\quad u,v\in\mathbb{Z} \tag{6}$$

的基本解 $u_1+v_1\sqrt{D}$ 适合

$$u_1+v_1\sqrt{D}=(U_1+V_1\sqrt{D})^2.$$

证明 参见文献 [4, 第 10.9 节].

引理 5 当 D 是非平方正整数时, 如果方程

$$X^2-DY^2=p^Z,\quad X,Y,Z\in\mathbb{Z},\quad \gcd(X,Y)=1,\quad Z>0 \tag{7}$$

有解 (X,Y,Z), 则它有唯一的正整数解 $(X,Y,Z)=(X_1,Y_1,Z_1)$ 适合

$$Z_1\le Z\ \text{ 以及 }\ 1<(X_1+Y_1\sqrt{D})/(X_1-Y_1\sqrt{D})<(u_1+v_1\sqrt{D})^2,$$

其中 Z 过方程 (7) 的所有解 (X,Y,Z), $u_1+v_1\sqrt{D}$ 是 Pell 方程 (6) 的基本解. 如此的 (X_1,Y_1,Z_1) 称为方程 (7) 的最小解. 此时, 方程 (7) 的任何一组解 (X,Y,Z) 都可表成

$$Z=Z_1t,\quad X+Y\sqrt{D}=(X_1\pm Y_1\sqrt{D})^t(u_1-v_1\sqrt{D}),\quad t\in\mathbb{N},$$

其中 (u,v) 是 Pell 方程 (6) 的解.

证明 参见文献 [3, 引理 4].

引理 6 当 D 是非平方正整数时, 如果方程 (1) 有解 (x,n), 则方程 (7) 必有解 (X,Y,Z), 而且 (1) 的解 (x,n) 可表成

$$n=Z_1t,\quad x+\lambda\sqrt{D}=(X_1+Y_1\sqrt{D})^t(u_1-v_1\sqrt{D})^s,\quad \lambda\in\{-1,1\}, \tag{8}$$

其中 (X_1,Y_1,Z_1) 是方程 (7) 的最小解, t 是正整数, s 是适合 $s\le t$ 的非负整数, $u_1+v_1\sqrt{D}$ 是 Pell 方程 (6) 的基本解.

证明 参见文献 [3, 引理 5].

引理 7 当 D 是非平方正整数时, 设 (x,n) 是方程 (1) 的一组 n 为奇数的解, (X_1,Y_1,Z_1) 是方程 (7) 的最小解. 此时, 方程

$$a^2-p^{Z_1}b^2=D,\quad a,b\in\mathbb{Z},\quad \gcd(a,b)=1$$

有解 $(a,b)=(x,p^{Z_1(t-1)/2})$, 其中 t 适合 (8); 而且当 $\langle x,p^{Z_1(t-1)/2}\rangle=l$ 时, 必有

$$l\equiv -X_1 \pmod D\ \text{ 或者 }\ l\equiv -X_1u_1 \pmod D,$$

其中 $u_1+v_1\sqrt{D}$ 是 Pell 方程 (6) 的基本解.

证明 参见文献 [3, 引理 13].

引理 8 当 Pell 方程 (2) 有解时, 如果方程 (1) 的两组解 $(x,n)=(y_1,r_1)$ 和 (y_2,r_2) 可使 n 为奇数, 而且 $r_1<r_2$, 则必有

$$y_2+p^{Z_1(t_2-1)/2}\sqrt{p^{Z_1}}=(y_1+\lambda p^{Z_1(t_2-1)/2}\sqrt{p^{Z_1}})(f+g\sqrt{p^{Z_1}}),\quad \lambda\in\{-1,1\}, \tag{9}$$

其中

$$r_j=Z_1t_j,\quad t_j\in\mathbb{N},\quad j=1,2, \tag{10}$$

(f,g) 是 Pell 方程

$$f^2-p^{Z_1}g^2=1,\quad f,g\in\mathbb{Z} \tag{11}$$

的正整数解.

证明 根据引理 6 可知 r_1 和 r_2 可表成方程 (10). 因为 r_1 和 r_2 都是奇数, 所以从方程 (10) 可知 Z_1 和 $t_j=(j=1,2)$ 都是奇数. 设

$$l_1=\langle y_1,p^{Z_1(t_1-1)/2}\rangle,\quad l_2=\langle y_2,p^{Z_1(t_2-1)/2}\rangle.$$

当 $l_2 = l_1$ 时, 因为 $r_1 < r_2$, 所以从引理 2 可知, 此时方程 (9) 在 $\lambda = 1$ 时成立. 当 $l_2 \neq l_1$ 时, 由于 ${u_1}^2 \equiv 1 \pmod{D}$, 故从引理 7 可知

$$l_2 \equiv l_1 u_1 \pmod{D}. \tag{12}$$

根据引理 4 可知 $u_1 \equiv {U_1}^2 + D{V_1}^2 \equiv {U_1}^2 \equiv -1 \pmod{D}$. 将此代入方程 (12), 立得

$$l_2 \equiv -l_1 \pmod{D} \ \text{以及} \ l_2 = D - l_1.$$

于是, 从引理 3 和引理 2 可知此时 (9) 在 $\lambda = -1$ 时成立. 证毕.

引理 9 设 $F_1 + G_1\sqrt{p}$ 是 Pell 方程

$$F^2 - pG^2 = 1, \quad F, G \in \mathbb{Z} \tag{13}$$

的基本解. 当 $G_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ 时, 如果 (F, G) 是方程 (13) 的一组适合 $G \equiv 0 \pmod{p^s}$ 的正整数解, 其中 s 是正整数, 则必有

$$F + G\sqrt{p} = (F_1 + G_1\sqrt{p})^m,$$

其中 m 是合适 $m \equiv 0 \pmod{p^s}$ 的正整数.

证明 参见文献 [3, 引理 9].

引理 10 如果 $(x, n) = (y_1, r_1)$ 和 (y_2, r_2) 是方程 (1) 的两组适合 $r_1 < r_2$ 的解, 则必有

$$p^{r_1} \leq \max(2 \cdot 10^6, 600D^2).$$

证明 参见文献 [2, 定理 1].

引理 11 在引理 10 的题设条件下, $p^{r_2} > 4\sqrt{D}$.

证明 参见文献 [5, 引理 11].

引理 12 当 $p = 3$ 时, 方程 (1) 的解 (x, n) 都满足 $3^n < 10^{614} D^{25.55}$.

证明 根据文献 [3, 引理 3] 可知, 当 n 是偶数时必有 $3^n < D^2$, 所以此时引理成立. 当 n 是奇数时, 从方程 (1), 可得

$$\frac{x}{3^{n/2}} - 1 = \frac{D}{3^{n/2}(x + 3^{n/2})} < \frac{D}{2 \cdot 3^n}. \tag{14}$$

因为 n 是奇数, 故从文献 [5, 公式 (32)] 可知

$$\left| \frac{x}{3^{n/2}} - 1 \right| > 3^{-51-96085n}. \tag{15}$$

将方程 (15) 代入方程 (14), 即得本引理. 证毕.

3 定理的证明

设 D 是适合 $D > 10^{12}$ 的正整数. 当 Pell 方程 (2) 有解时, D 适合

$$D \equiv 1 \pmod{4}, \quad \text{或者} \quad D \equiv 2 \pmod{8}, \tag{16}$$

如果方程

$$x^2 - D = 3^n, \quad x, y \in \mathbb{N} \tag{17}$$

有解 (x,n) 可使 n 为偶数, 则从 $3^n\equiv 1 \pmod 8$ 以及方程 (17) 可知 D 适合 $D\equiv 3 \pmod 4$, 或者 $D\equiv 6 \pmod 8$, 与方程 (16) 矛盾. 因此, 当 Pell 方程 (2) 有解时, 方程 (17) 的解 (x,n) 中 n 均为奇数.

假如 $N(D,3)>2$, 则方程 (17) 必有 3 组解 $(x,n)=(x_i,n_i)$ $(i=1,2,3)$ 适合

$$x_1<x_2<x_3,\quad n_1<n_2<n_3. \tag{18}$$

根据引理 10– 引理 12, 从方程 (18) 可知

$$4\sqrt{D}\le 3^{n_2}\le 600D^2, \tag{19}$$

$$3^{n_2}<10^{614}D^{25.55}. \tag{20}$$

同时, 从引理 6 可知

$$n_i=Z_1t_i,\quad t_i\in\mathbb{N},\quad i=,1,2,3, \tag{21}$$

其中 t_i $(i=1,2,3)$ 是奇数, (X_1,Y_1,Z_1) 是方程 (7) 在 $p=3$ 时的最小解, 这里的 Z_1 也是奇数.

从方程 (17) 和 (21), 可知方程

$$a^2-3^{Z_1}b^2=D,\quad a,b\in\mathbb{Z},\quad \gcd(a,b)=1 \tag{22}$$

有两组解

$$(a,b)=(x_j,3^{Z_1(t_j-1)/2}),\quad j=2,3. \tag{23}$$

又从引理 8 可知这两组解满足

$$x_3+3^{Z_1(t_3-1)/2}\sqrt{3^{Z_1}}=(x_2\pm 3^{Z_1(t_3-1)/2}\sqrt{3^{Z_1}})(f+g\sqrt{3^{Z_1}}), \tag{24}$$

其中 (f,g) 是 Pell 方程

$$f^2-3^{Z_1}g^2=1,\quad f,g\in\mathbb{Z} \tag{25}$$

的正整数解. 从方程 (24), 可得

$$3^{Z_1(t_3-1)/2}=x_2g\pm 3^{Z_1(t_2-1)/2}f. \tag{26}$$

从方程 (26) 可知

$$g\equiv 0 \pmod{3^{Z_1(t_2-1)/2}}. \tag{27}$$

由于 Pell 方程 (25) 的解 (f,g) 都是 Pell 方程

$$F^2-3G^2=1,\quad F,G\in\mathbb{Z}. \tag{28}$$

适合 $G\equiv 0 \pmod{3^{(Z_1-1)/2}}$ 的解, 而且 $2+\sqrt{3}$ 是方程 (28) 的基本解, 所以根据引理 9, 从方程 (21) 和 (27) 可知

$$f+g\sqrt{3^{Z_1}}=(2+\sqrt{3})^m,\quad m=3^{(n_2-1)/2}s,\quad s\in\mathbb{N}. \tag{29}$$

另一方面, 从方程 (24), 可得

$$\begin{aligned} x_3+3^{Z_1(t_3-1)/2}\sqrt{3^{Z_1}} &\ge (x_2-3^{Z_1(t_2-1)/2}\sqrt{3^{Z_1}})(f+g\sqrt{3^{Z_1}}) \\ &= \frac{D}{x_2+3^{Z_1(t_2-1)/2}\sqrt{3^{Z_1}}}(f+g\sqrt{3^{Z_1}}). \end{aligned} \tag{30}$$

将方程 (21) 和 (29) 代入 (30) 可知

$$x_3 + 3^{n_3/2} \geq \frac{D}{x_2 + 3^{n_2/2}} (2 + \sqrt{3})^m. \tag{31}$$

结合方程 (19), (20) 和 (31) 可知

$$3 \cdot 10^{307} D^{12.775} > 3^{n_3/2+1} > x_3 + 3^{n_3/2} > \frac{1}{50} (2 + \sqrt{3})^{1/4}. \tag{32}$$

从方程 (32), 可得

$$548 + 12.775 \log D > D^{1/4}. \tag{33}$$

从方程 (33) 不难算出 $D < 10^{12}$ 这一与题设矛盾的结果. 因此, 当 $D > 10^{12}$ 时, 如果 Pell 方程 (2) 有解, 则必有 $N(D, 3) \leq 2$. 证毕.

参 考 文 献

[1] Le M. H., Applications of the Gel'fond-Baker method to diophantine equations, Beijing: Science Press, 1998 (in Chinese).
[2] Beukers F., On the generalized Ramanujan-Nagell equation II, *Acta Arith.*, 1981, **39**: 113–123.
[3] Le M. H., On the number of solutions of the diophantine equation $x^2 - D = p^n$, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 1991, **34**(3): 378–387.
[4] Hua L. G., Introduction to number theory, Beijing: Science Press, 1979 (in Chinese).
[5] Le M. H., On the number of solutions of the generaliaed Ramanujan-Nagell equation $x^2 - D = p^n$, *Publ. Math. Debrecen*, 1994, **45**: 239–254.