文章编号: 0583-1431(2008)01-0123-06 **文献标识码: A**

渐近非扩张映射修正 Ishikawa 迭代的强收敛

张丽娟

河北大学数学与计算机学院 保定 071002
河北省数学研究中心 石家庄 050016
E-mail: zhanglj@hbu.edu.cn

陈俊敏

河北大学数学与计算机学院 保定 071002

摘 要 利用 CQ 方法修正了渐近非扩张映射的 Ishikawa 迭代, 并证明修正迭代过程强收敛, 此结果推广并改进了一些相关结论.

关键词 CQ 方法; 渐近非扩张映射; 强收敛
MR(2000) 主题分类 47H09
中图分类 O177.91

Strong Convergence of Modified Ishikawa Iteration for Asymptotically Nonexpansive Mappings

Li Juan ZHANG

College of Mathematics and Computer, Hebei University, Baoding 071002*, P. R. China*
Mathematics Research Center of Hebei Province, Shijiazhuang 050016*, P. R. China*
E-mail: zhanglj@hbu.edu.cn

Jun Min CHEN

College of Mathematics and Computer, Hebei University, Baoding 071002*, P. R. China*

Abstract We introduce the modified Ishikawa iteration for asymptotically nonexpansive mappings by the CQ method, and prove the strong convergence theorems of the modified Ishikawa iteration process. These results extend and improve the corresponding ones now existing.

Keywords CQ method; asymptotically nonexpansive mappings; strong convergence
MR(2000) Subject Classification 47H09
Chinese Library Classification O177.91

1 引言及定理

X 是实 Banach 空间, C 是 X 的非空闭凸子集, 映射 $T: C \to C$ 称为非扩张的, 如果

收稿日期: 2006-08-30; 接受日期: 2007-07-06
基金项目: 河北省自然科学基金数学研究专项资助项目 (07M003)

$\|Tx-Ty\| \le \|x-y\|$, $x, y \in C$; T 称为渐近非扩张的, 如果存在正实数列 $\{k_n\} \subset [1,\infty)$ 且 $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$, 满足 $\|T^n x - T^n y\| \le k_n\|x-y\|$, $n \ge 1$, $x, y \in C$. 点 $x \in C$ 称为 T 的不动点, 如果 $Tx = x$, 记 $F(T)$ 为 T 的不动点集.

不动点的构造是非扩张映射理论的重要内容, 在许多领域都有应用 [1]. 而迭代序列 $\{T^n x\}$, $x \in C$ 即使在弱拓扑下也不一定收敛. 事实上 Mann 迭代只能弱收敛, 序列 $\{x_n\}$ 具体如下

$$x_{n+1} = a_n x_n + (1-a_n)Tx_n, \quad n \ge 0, \tag{1.1}$$

其中 $x_0 \in C$ 任意选取.

尝试修正 Mann 迭代能够保证强收敛, Nakajo 和 Takahashi [2] 提出了后来称为 CQ 方法的迭代过程, 在 Hilbert 空间 H 对非扩张映射 T 作如下迭代

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ y_n = a_n x_n + (1-a_n)Tx_n, \\ C_n = \{z \in C : \|y_n - z\| \le \|x_n - z\|\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \ge 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 P_K 是从 H 到 K 的度量投影, K 是 H 的闭凸子集, 他们证明序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 $P_{F(T)}x_0$.

在文 [3] 中, 作者修正 (1.2) 对渐近非扩张映射建立迭代如下

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ y_n = a_n x_n + (1-a_n)T^n x_n, \\ C_n = \{z \in C : \|y_n - z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 + \theta_n\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \ge 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $\theta_n = (1-a_n)(k_n^2 - 1)(\operatorname{diam} C)^2 \to 0$, 当 $n \to \infty$, 他们证明强收敛到 T 的不动点.

对于非扩张映射 Ishikawa 迭代过程如下

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ y_n = a_n x_n + (1-a_n)Tx_n, \\ x_{n+1} = b_n x_n + (1-b_n)Ty_n, \end{cases} \tag{1.4}$$

上述 Ishikawa 迭代过程定义的的 $\{x_n\}$ 弱收敛到 T 的不动点 [4].

在文 [5] 中作者对 (1.4) 应用 CQ 方法, 使得迭代能够强收敛, 本文主要目的是体现 Nakajo 和 Takahashi 的思想, 将方法应用到渐近非扩张映射 Ishikawa 迭代过程并证明序列强收敛.

下面是将要用到的符号和引理

(1) $\rightharpoonup$ 代表弱收敛, $\to$ 代表强收敛.

(2) $w_w(x_n) = \{x : \exists x_{n_j} \rightharpoonup x\}$ 记为 $\{x_n\}$ 的弱极限集.

定理 1.1 在 Hilbert 空间 H 中成立下面不等式

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - \|v\|^2 - 2\langle u-v, v\rangle, \quad u, v \in H.$$

定理 1.2[6] $T: C \to C$ 是渐近非扩张映射, C 是 Hilbert 空间 H 有界闭凸子集. 如果 C 中序列 $\{x_n\}$ 具备下面性质: (1) $x_n \rightharpoonup z$; (2) $Tx_n - x_n \to 0$, 则 $z \in F(T)$.

定理 1.3 C 是实 Hilbert 空间 H 的闭凸子集, P_C 是从 H 到 C 上的度量投影. $x \in H$, $z \in C$, 则 $z = P_C x$ 等价于

$$\langle x - z, y - z\rangle \leq 0, \quad \forall\, y \in C.$$

定理 1.4[5] C 是 Hilbert 空间 H 的闭凸子集, H 中序列 $\{x_n\}$, $u \in H$, 令 $q = P_C u$, 如果 $\{x_n\}$ 的弱极限集 $w_w(x_n) \subset C$ 满足条件

$$\|x_n - u\| \leq \|u - q\|, \quad \forall\, n, \tag{1.5}$$

则 $x_n \to q$.

2 强收敛性

本节主要对 Ishilawa 迭代过程 (1.4) 采用 CQ 方法, 并证明它的强收敛.

定理 2.1 C 是 Hilbert 空间 H 的有界闭凸子集, $T: C \to C$ 是渐近非扩张映射, 假设 $[0,1]$ 中的序列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, 使得 $a_n \leq \alpha$, $0 < \alpha < 1$, 且 $b_n \to 1$. 定义序列 C 中 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 如下

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ y_n = a_n x_n + (1-a_n)T^n z_n, \\ z_n = b_n x_n + (1-b_n)T^n x_n, \\ C_n = \{z \in C : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + \theta_n\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $\theta_n = (1-a_n)(k_n^4 - 1)(\operatorname{diam} C)^2 \to 0$, 当 $n \to \infty$, 则 $\{x_n\}$ 强收敛到 $P_{F(T)} x_0$.

证明 根据文 [7], T 在 C 中有不动点, 即 $F(T)$ 非空.

下面证明 C_n 是凸的.

事实上, C_n 的定义等价不等式 $\langle 2(x_n - y_n), z\rangle \leq \|x_n\|^2 - \|y_n\|^2 + \theta_n$, 得到在 z 点仿射.

下面证明 $F(T) \subset C_n$, $\forall\, n$. 事实上, $\forall\, p \in F(T)$,

$$\begin{aligned} \|y_n - p\|^2 &= \|a_n(x_n - p) + (1-a_n)(T^n z_n - p)\|^2 \\ &\leq a_n\|x_n - p\|^2 + (1-a_n)\|T^n z_n - p\|^2 \\ &\leq a_n\|x_n - p\|^2 + (1-a_n)k_n^2\|z_n - p\|^2, \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \|z_n - p\|^2 &= \|b_n(x_n - p) + (1-b_n)(T^n x_n - p)\|^2 \\ &\leq b_n\|x_n - p\|^2 + (1-b_n)\|T^n x_n - p\|^2 \\ &\leq b_n\|x_n - p\|^2 + (1-b_n)k_n^2\|x_n - p\|^2, \end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned} \|y_n - p\|^2 &= \|x_n - p\|^2 + (1-a_n)(k_n^4 - b_n k_n^4 + b_n k_n^2 - 1)\|x_n - p\|^2 \\ &\leq \|x_n - p\|^2 + \theta_n, \end{aligned}$$

所以 $p\in C_n$, $\forall n$.

下面证明

$$F(T)\subset Q_n,\quad n\geq 0. \tag{2.2}$$

由 Q_n 的定义和引理 1.3 得到 $x_n=P_{Q_n}x_0$, 意味着 $\|x_n-x_0\|\leq\|p-x_0\|$, $\forall p\in F(T)$. 因此 $\{x_n\}$ 有界, 且

$$\|x_n-x_0\|\leq\|q-x_0\|,\quad q=P_{F(T)}x_0. \tag{2.3}$$

当 $n=0$ 时, 得到 $F(T)\subset C=Q_0$.

假设 $F(T)\subset Q_n$, 因 x_{n+1} 是 x_0 在 $C_n\cap Q_n$ 上的投影, 由引理 1.3, 得到

$$\langle x_{n+1}-z,\, x_0-x_{n+1}\rangle\geq 0,\quad \forall\, z\in C_n\cap Q_n.$$

由归纳假设得 $F(T)\subset C_n\cap Q_n$, 前面的不等式成立, 显然对 $z\in F(T)$ 成立. 再由 Q_{n+1} 的定义推出 $F(T)\subset Q_{n+1}$, 因此 (2.2) 式成立.

下面证明

$$\|x_{n+1}-x_n\|\to 0. \tag{2.4}$$

事实上, 由 Q_n 的定义可知 $x_n=P_{Q_n}x_0$, 且 $x_{n+1}\in C_n\cap Q_n\subset Q_n$, 可得

$$\|x_0-x_n\|\leq\|x_0-x_{n+1}\|.$$

表明序列 $\{\|x_0-x_n\|\}$ 是单增的. C 有界, $\lim_{n\to\infty}\|x_0-x_n\|$ 存在. 再由 $x_n=P_{Q_n}x_0$ 和 $x_{n+1}\in Q_n$, 可得 $\langle x_{n+1}-x_n,\, x_n-x_0\rangle\geq 0$.

根据引理 1.1 得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x_n\|^2&=\|(x_{n+1}-x_0)-(x_n-x_0)\|^2\\&=\|x_{n+1}-x_0\|^2-\|x_n-x_0\|^2-2\langle x_{n+1}-x_n,x_n-x_0\rangle\\&\leq\|x_{n+1}-x_0\|^2-\|x_n-x_0\|^2\to 0\ \text{ as }\ n\to\infty.\end{aligned}$$

因 $x_{n+1}\in C_n$, $\|y_n-x_{n+1}\|^2\leq\|x_n-x_{n+1}\|^2+\theta_n$, 有

$$\|y_n-x_{n+1}\|\leq\|x_n-x_{n+1}\|+\sqrt{\theta_n}.$$

可得 $\|y_n-x_{n+1}\|\to 0$. 再由 (2.4) 式可得 $\|y_n-x_n\|\to 0$.

因 $b_n\to 1$, $\{x_n\}$ 有界, 得到

$$\|z_n-x_n\|=(1-b_n)\|x_n-T^nx_n\|\to 0.$$

注意到 $T^nz_n=y_n-a_n(x_n-T^nz_n)$, 可得 $\|x_n-T^nz_n\|\leq\|x_n-y_n\|+a_n\|x_n-T^nz_n\|$. 由上式有

$$\|x_n-T^nz_n\|\leq\frac{1}{1-a_n}\|x_n-y_n\|,\quad a_n\leq\alpha,$$

可得 $\|x_n-T^nz_n\|\leq\frac{1}{1-\alpha}\|x_n-y_n\|$.

$$\begin{aligned}\|x_n-T^nx_n\|&\leq\|x_n-T^nz_n\|+\|T^nx_n-T^nz_n\|\\&\leq\frac{1}{1-\alpha}\|x_n-y_n\|+k_n\|x_n-z_n\|\to 0.\end{aligned}$$

说明 $\|x_n-T^nx_n\|\to 0$.

令 $k_\infty=\sup\{k_n:n\ge 1\}<\infty$,

$$\begin{aligned}\|x_n-Tx_n\|&\le\|Tx_n-T^{n+1}x_n\|+\|T^{n+1}x_n-T^{n+1}x_{n+1}\|\\&\quad+\|T^{n+1}x_{n+1}-x_{n+1}\|+\|x_{n+1}-x_n\|\\&\le k_\infty\|x_n-T^nx_n\|+\|T^{n+1}x_{n+1}-x_{n+1}\|+(1+k_\infty)\|x_{n+1}-x_n\|\to 0,\end{aligned}$$

得到

$$\|x_n-Tx_n\|\to 0. \tag{2.5}$$

由 (2.5) 和引理 1.2 得到 $w_w(x_n)\subset F(T)$. 根据 (2.3) 式和引理 1.4, 得到 $\{x_n\}$ 强收敛到 $P_{F(T)}x_0$.

注 2.2 文 [3, 定理 2.2] 是本文定理 2.1 的特例, 事实上, 令 $b_n=1$ 对所有的 n, 则

$$z_n=x_n,\quad y_n=a_nx_n+(1-a_n)T^nx_n.$$

对于非扩张映射有一种重要的逼近方法, 序列 $\{x_n\}$ 定义如下

$$x_{n+1}=t_nx_0+(1-t_n)Tx_n,\quad n\ge 0, \tag{2.6}$$

其中 $x_0\in C$, $\{t_n\}_{n=0}^\infty$ 是 (0.1] 中的数列. Hilbert 空间中的序列 $\{x_n\}$ 在下列条件下强收敛 [8]:

(1) $t_n\to 0$;

(2) $\sum_{n=0}^\infty t_n=\infty$;

(3) $\sum_{n=0}^\infty|t_n-t_{n+1}|<\infty$ 或 $\lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{t_{n+1}}=1$, x_n 收敛速度慢. 在文 [5] 中定义序列 x_n 为

$$\begin{cases}x_0\in C,\\ y_n=t_nx_0+(1-t_n)Tx_n,\\ C_n=\{z\in C:\|y_n-z\|^2\le\|x_n-z\|^2+t_n(\|x_0\|^2+2\langle x_n-x_0,z\rangle)\},\\ Q_n=\{z\in C:\langle x_n-z,x_0-x_n\rangle\ge 0\},\\ x_{n+1}=P_{C_n\cap Q_n}x_0,\end{cases} \tag{2.7}$$

此迭代提高了 (2.6) 的收敛速度.

将上面的迭代过程推广到渐近非扩张映射.

定理 2.3 C 是 Hilbert 空间 H 的有界闭凸子集, $T:C\to C$ 是渐近非扩张映射. 设 $\{t_n\}\subset(0,1)$, 使得 $\lim_{n\to\infty}t_n=0$. C 中序列 $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ 定义如下

$$\begin{cases}x_0\in C,\\ y_n=t_nx_0+(1-t_n)T^nx_n,\\ C_n=\{z\in C:\|y_n-z\|^2\le\|x_n-z\|^2+\theta_n\},\\ Q_n=\{z\in C:\langle x_n-z,x_0-x_n\rangle\ge 0\},\\ x_{n+1}=P_{C_n\cap Q_n}x_0,\end{cases} \tag{2.8}$$

其中 $\theta_n=(1-a_n)(k_n^2-1)(\operatorname{diam}C)^2\to 0$, 当 $(n\to\infty)$, 则序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 $P_{F(T)}x_0$.

证明 和定理 2.1 的证明类似, C_n 是凸的.

下面证明 $F(T)\subset C_n$, 事实上, 对任意的 $p\in F(T)$,

$$\begin{aligned}\|y_n-p\|^2&=\|t_n(x_0-p)+(1-t_n)(T^nx_n-p)\|^2\\&\le t_n\|x_0-p\|^2+(1-t_n)\|T^nx_n-p\|^2\le\|x_n-p\|^2+\theta_n.\end{aligned}$$

因此 $p \in C_n$, $\forall n \geq 0$.

下面证明 $F(T) \subset Q_n$, $\forall n \geq 0$. 由 Q_n 的定义和引理 1.3 可知 $x_n = P_{Q_n}x_0$. 上式意味着 $\|x_n - x_0\| \leq \|p - x_0\|$, $p \in F(T)$, 且 $\{x_n\}$ 有界

$$\|x_n - x_0\| \leq \|q - x_0\|, \quad q = P_{F(T)}x_0. \tag{2.9}$$

由 $x_{n+1} \in Q_n$, 可得

$$\langle x_{n+1} - x_n, x_n - x_0 \rangle \geq 0. \tag{2.10}$$

由 (2.9) 式和引理 1.1, 得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_n\|^2 &= \|(x_{n+1} - x_0) - (x_n - x_0)\|^2 \\ &= \|x_{n+1} - x_0\|^2 - \|x_n - x_0\|^2 - 2\langle x_{n+1} - x_n, x_n - x_0 \rangle \\ &\leq \|x_{n+1} - x_0\|^2 - \|x_n - x_0\|^2.\end{aligned}$$

由上式可得 $\{\|x_0 - x_n\|\}$ 是单增的, 可得

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \tag{2.11}$$

由于 $x_{n+1} \in C_n$, $\|y_n - x_{n+1}\|^2 \leq \|x_n - x_{n+1}\|^2 + \theta_n$, 意味着 $\|y_n - x_{n+1}\| \leq \|x_n - x_{n+1}\| + \sqrt{\theta_n}$, 得到

$$\|y_n - x_{n+1}\| \to 0, \quad \text{且} \quad \|y_n - T^n x_n\| = t_n\|x_0 - T^n x_n\| \to 0.$$

类似定理 2.1 的证明 $\|x_n - T^n x_n\| \to 0$ 和

$$\|x_n - Tx_n\| \to 0. \tag{2.12}$$

由 (2.12) 式和引理 1.2 得到 $w_w(x_n) \subset F(T)$. 由 (2.9) 式和引理 1.4 可证 $\{x_n\}$ 强收敛到 $P_{F(T)}x_0$.

致谢 作者对审稿人表示衷心感谢.

参 考 文 献

[1] Byrne C., A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction, *Inverse Problems*, 2004, **20**: 103–120.

[2] Nakajo K., Takahashi W., Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups, *J. Math. Anal. Appal*, 2003, **279**: 372–379.

[3] Kim T. H., Xu H. K., Strong convergence of modified Mann iteration for asymptotically nonexpansive mappings and semigroups, *Nonlinear Anal.*, 2006, **64**: 1140–1152.

[4] Tan K. K., Xu H. K., Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process, *J. Math. Anal. Appl.*, 1993, **178**(2): 301–308.

[5] Martinez-Yanes C., Xu H. K., Strong convergence of the *CQ* method for fixed point iteration processes, *Nonlinear Anal.*, 2006, **64**: 2400–2411.

[6] Lin P. K., Tan K. K., Xu H. K., Demiclosedness principle and asymptotic behavior for asymptotically nonexpansive mappings, *Nonlinear Anal.*, 1995, **24**: 929–946.

[7] Goebel K., Kirk W. A, A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings, *Proc. Am. Math. Soc.*, 1972, **35**: 171–174.

[8] Reich S., Strong convergence theorems for resolvent of accretive operators in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appa.*, 1980, **75**: 287–292.