

# 天体运行轨道的背景介质理论导引与自相似分形测度计算的分维微积分基础

阎 坤

(西安现代非线性科学应用研究所, 西安 710061)

**摘 要** 通过讨论天体运行背景介质理论的连续轨道及离散轨道这二个研究方向的基础假设,介绍了天体运行轨道的具体方程形式及理论框架概要;进一步地通过讨论天体运行轨道 Binet 方程的一般形式及其行星近日点进动角的解,给出了连续轨道理论与 Newton 理论及 Einstein 广义相对论的联系与区别;通过讨论天体运行轨道的分维扩展方程,给出了包括太阳系行星、天王星卫星、地球卫星、绕月航天器等在内的离散轨道(稳定性轨道)方程及其预言数据.特别地,作为对天体在较为广泛区域作用曲线的初步探讨推论,指出仅由天体引力难以形成质量密度趋于无穷大的理想黑洞.通过讨论一般函数的分维导数的位置假设及幂函数的分维导数的形式假设,进一步明晰了幂函数的分维导数、分维微分及分维积分的具体方程形式,给出分维导数与分数阶导数的区别,随后讨论了基于一般分形测度的分维微积分形式定义导出的自相似分形的测度计算方程具体形式,给出了其与目前 Hausdorff 测度方法(覆盖方法)的区别,并对包括三分 Cantor 集合、Koch 曲线、Sierpinski 垫片及正交十字星形等自相似分形在内的测度进行了计算分析.

**关键词** 天体运行轨道,背景介质理论,连续轨道,离散轨道,自相似分形测度,分维微积分,分维导数

**中图分类号** P13,O17,O18

**文献标识码** A

**文章编号** 1004-2903(2007)02-0451-12

## Introduction on background medium theory about celestial body motion orbit and foundation of fractional-dimension calculus about self-fractal measure calculation

YAN Kun

(Xi'an Modern Nonlinear Science Applying Institute, Xi'an 710061, China)

**Abstract** In this paper, by discussing the basic hypotheses about the continuous orbit and discrete orbit in two research directions of the background medium theory for celestial body motion, the concrete equation forms and their summary of the theoretic frame of celestial body motion are introduced. Future more, by discussing the general form of Binet's equation of celestial body motion orbit and it's solution of the advance of the perihelion of planets, the relations and differences between the continuous orbit theory and Newton's gravitation theory and Einstein's general relativity are given. And by discussing the fractional-dimension expanded equation for the celestial body motion orbits, the concrete equations and the prophesy data of discrete orbit or stable orbits of celestial bodies which included the planets in the Solar system, satellites in the Uranian system, satellites in the Earth system and satellites obtaining the Moon obtaining from discrete orbit theory are given too. Especially, as the preliminary exploration and inference to the gravitation curve of celestial bodies in broadly range, the concept for the ideal black hole with trend to infinite in mass density difficult to be formed by gravitation only is explored. By discussing the position hypothesis of fractional-dimension derivative about general function and the formula form the hypothesis of fractional-dimension derivative about power function, the concrete equation formulas of fractional-dimension derivative, differential and integral are described distinctly further, and the difference between the fractional-dimension derivative and the fractional-order derivative are given too. Subsequently, the concrete forms of measure calculation equations of self-similar fractal obtain

**收稿日期** 2006-11-10; **修回日期** 2007-01-10.

**作者简介** 阎坤,男,1962年生,吉林榆树人,1983年8月毕业于长春地质学院仪器系,目前主要从事非线性科学及天体物理研究.(Email: yankun@nature.ac.cn)

ning by based on the definition of form in fractional-dimension calculus about general fractal measure are discussed again, and the differences with Hausdorff measure method or the covering method at present are given. By applying the measure calculation equations, the measure of self-similar fractals which include middle-third Cantor set, Koch curve, Sierpinski gasket and orthogonal cross star are calculated and analyzed.

**Keywords** orbit of celestial body motion, background medium theory, continuous orbit, discrete orbit, self-similar fractal measure, fractional-dimension calculus, fractional-dimension derivative

## 0 引言

在采用 Euclid 几何的 Newton 天体力学之后,目前关于天体运行轨道的描述主要有三个研究方向,其一是采用 Riemann 几何的 Einstein 广义相对论描述<sup>[1~3]</sup>,其二是仍采用 Euclid 几何的背景介质理论连续轨道描述<sup>[4,5]</sup>,其三是采用 Mandelbort 分形几何的分维扩展离散轨道描述<sup>[4]</sup>.

极限上,上述前二个方法都要求在极弱场情况下方程能够退化为 Newton 方程形式,在弱场情况下能够给出符合诸如行星近日点进动数据<sup>[6]</sup>的解。

与连续轨道理论模式相比,后面的第三个描述离散轨道理论则属于稳定轨道理论模式,目前已给出部分天体的离散轨道方程具体形式。

天体运行背景介质理论的离散轨道描述是基于分维扩展方法建立的,其深入的研究尚依赖于分维数学解析基础的确立和发展。

目前在非整数阶导数的表述形式与自相似分形的测度计算领域,现各有二个方向;在非整数阶微积分方面,其一是基于  $\Gamma$  函数或整数阶积分变换直接外推默认的分维微积分<sup>[7~11]</sup>,其二是基于相邻整数阶导数位置假设的分维微积分<sup>[12,4]</sup>;在自相似分形测度计算方面,其一是基于 Hausdorff 测度的覆盖方法<sup>[13~16]</sup>,其二是基于分维微积分表述的测度计算方程方法<sup>[12,4]</sup>。

为明晰天体运行轨道背景介质理论的连续轨道描述及离散轨道描述、分维微积分及自相似分形测度计算的基础假设、主线推演脉络、部分结论,本文在天体运行轨道方程方面,将进一步明确连续轨道理论及离散轨道理论<sup>[4,5]</sup>的基础假设,对主线推演脉络给出初步总结,讨论连续轨道理论与 Einstein 广义相对论之间的关系与区别,给出离散轨道理论的方程形式及其预言数据,并对连续轨道与离散轨道共同的背景介质理论基础进行讨论,以为深入理解自然现象及研究建立更基本的天体运行轨道理论提供参照框架。在分维数学的分维微积分与自相似分形测度计算方面,本文将进一步明晰资料<sup>[12,4]</sup>中有关分维微积分的基础假设及自相似分形测度的分

维微积分定义形式,总结幂函数的分维微积分具体形式及自相似分形的测度计算方程,给出分维导数与分数阶导数的关系与区别,并对包括三分 Cantor 集合、Koch 曲线、Sierpinski 垫片及正交十字星等自相似分形测度进行计算分析,以为建立分维数学的解析体系提供前期探索铺垫,为深入研究天体运行轨道理论提供数学基础,为自然界更为广泛现象的非线性过程描述提供可能的解析途径。

## 1 天体运行背景介质理论的连续轨道描述

在 Newton 引力理论及 Einstein 广义相对论之后,描述天体运行轨道的背景基本被简化为一理想的可延伸坐标系空架。背景介质理论在基础假设上则引进背景介质层壳常数,认为天体总处在与背景介质相互作用的能量动态平衡中,所描述的天体运行轨道在形式上则进一步分为连续轨道及离散轨道。

下面讨论天体运行的连续轨道理论框架,描述的主要内容来源于资料<sup>[4,5]</sup>,并在其推演过程上予以适当调整补充。

### 1.1 能量曲率方程假设

**假设:**一初始能量为  $E_m$  的质点粒子在能量为  $E_M$  的物体作用下,从  $r$  到  $r+dr$  处做功,粒子能量  $E_m=mc^2$  的变化  $-dE_m$  正比于  $E_M$ 、 $E_m$  及物体从  $r$  到  $r+dr$  处背景介质层壳曲率  $K_r$  的变化  $dK_r$ ,粒子能量曲率方程为

$$-dE_m + \eta E_m E_M dK_r = 0, \quad (1)$$

式中  $\eta$  为介质层壳常数,  $E_m$  为质点粒子的 Einstein 能量

$$E_m = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - V_m^2 c^{-2}}},$$

$m_0$ 、 $m$ 、 $V_m$  分别为质点粒子的静止质量、运动质量、及在物体作用下产生的运动速度; $c$  为真空介质常数,其在数值及量纲上等于真空中光速。

### 1.2 能量曲率方程的条件解

如取曲率函数

$$K_r = K(r^{-1}),$$

则有粒子能量解的函数形式以及粒子势能、作用力

分别为

$$E_m = mc^2 = f(C_{r_0} r^{-1}), \quad (2)$$

$$U_{mr} = E_{ms} - E_m, \quad U_{mr}(r \rightarrow \infty) = 0 \quad (3)$$

$$F_{Mm} = -\frac{dU_{mr}}{dr},$$

式  $C_{r_0}$  中为待定常量,  $r \geq r_0$ ,  $r_0$  为物体的半径,  $C_{r_0} r^{-1}$  为无量纲参量.

现考虑质点粒子在物体的背景介质球形层壳中

$$K_r = r^{-1},$$

同时忽略物体的运动能量及旋转能量, 即

$$E_M = E_{M_0} = M_0 c^2,$$

得此条件下能量曲率方程(1)式的一般解能量方程及势能方程分别为

$$E_m = mc^2 = m_0 c^2 \exp\left(\eta \frac{M_0 c^2}{r} + \sigma\right), \quad (4)$$

$$U_{mr} = E_{ms} - m_0 c^2 \exp\left(\eta \frac{M_0 c^2}{r} + \sigma\right), \quad (5)$$

式中  $\sigma$  为待定常量,

$$E_{ms} = m_0 c^2 \exp\sigma.$$

根据势能方程(5)式, 得作用力方程及其二个条件解分别为

$$\begin{aligned} F_{Mm} &= -\frac{dU_{mr}}{dr} \\ &= -\eta^4 \frac{M_0 m_0}{r^2} \exp\left(\eta \frac{M_0 c^2}{r} + \sigma\right), \end{aligned} \quad (6)$$

$$F_{Mm} = -\eta^4 \frac{M_0 m_0}{r^2} \left(1 + \eta \frac{M_0 c^2}{r} + \sigma\right),$$

$$\eta \frac{M_0 c^2}{r} + \sigma \ll 1$$

$$F_{Mm} = -\eta^4 \frac{M_0 m_0}{r^2}, \quad \eta \frac{M_0 c^2}{r} + \sigma \rightarrow 0 \quad (7)$$

方程(7)式与 Newton 引力方程

$$F_{Mm} = -G \frac{M_0 m_0}{r^2}$$

具有相同的形式, 故可确定 Newton 引力常数

$$G = \eta^4 \eta. \quad (8)$$

根据(4)、(8)二式得质点粒子在引力作用下的运动速度及其一条件解形式分别为

$$V_m^2 = c^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{2GM_0}{c^2 r} - 2\sigma\right)\right), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} V_m^2 &= c^2 \left(1 - \left(1 - \frac{2GM_0}{c^2 r} - 2\sigma\right)\right) \\ &= GM_0 \left(\frac{2}{r} + \frac{2c^2 \sigma}{GM_0}\right), \quad \frac{2GM_0}{c^2 r} + 2\sigma \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (10)$$

由 Newton 第二定律及引力定律(7)式得 Newton 引力方程组

$$\begin{cases} V_m^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \\ m_0 \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) = -G \frac{M_0 m_0}{r^2}, \\ m_0 \left(r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt}\right) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

进一步得 Newton 轨道方程的活力积分公式及角动量守恒方程

$$\begin{cases} V_m^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\ = GM_0 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \\ m_0 r^2 \frac{d\varphi}{dt} = L_0, \end{cases} \quad (12)$$

式中  $\varphi$  为行星轨道平面的极坐标角度,  $t$  为行星运行时间参量,

$$L_0 = \sqrt{a(1-e^2)GM_0} m_0,$$

为角动量常数,  $a$  为轨道半长径,  $e$  为行星轨道偏心率.

由(12)式得(10)式与之相对应的待定常量为

$$\sigma = -\frac{GM_0}{2c^2 a}.$$

在 Newton 引力方程(12)式中消去时间参量  $t$  后, 得其 Binet 方程形式为

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = u_0, \quad (13)$$

式中参量

$$u = \frac{GM_0}{r}, \quad u_0 = \left(\frac{GM_0 m_0}{L_0}\right)^2 = \frac{GM_0}{a(1-e^2)}.$$

这里给出已知的 Newton 引力理论主脉络(7)、(11)、(12)、(13)四式, 旨在确定方程(1)式中的介质层壳常数  $\eta$  及其解能量解方程(4)式中的待定常量  $\sigma$ , 并为天体运行轨道的一般性 Binet 方程探讨提供框架参照及方程形式验证.

### 1.3 行星运行轨道的参量方程形式假设

**假设:** 行星运行轨道的参量方程形式为

$$V_m \frac{dV_m}{dr} + B \frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad (14)$$

式中  $B$  为待定函数.

当  $B$  为常量时, 由(12)式得

$$B = G \frac{M_0 m_0}{L_0};$$

故得行星运行轨道的参量方程为

$$V_m \frac{dV_m}{dr} + \frac{GM_0 m_0}{L_0} \frac{d\varphi}{dt} = 0. \quad (15)$$

方程(15)式是由向心力方程(12)式给出的, 但由于(6)式不是单一的向心力, 尚难以通过类如

Newton 方程(11)式的力合成形式给出后面的角动量方程(16)式,故引入(14)式假设.进一步的研究将表明方程(14)式应是可以被严格导出的结论.

上述假设的正确性将通过兼容 Newton 引力理论及 Einstein 广义相对论的有关结论予以验证.

这里需着重指出,上述方程(1)、(14)二式是属于探讨性质的,由于包含有条件假设的成分,故其严格表述形式尚需要作进一步的研究予以确定.

#### 1.4 行星运行轨道的一般性 Binet 方程形式

由(15)、(9)二式得角动量方程为

$$mr^2 \frac{d\varphi}{dr} = L_0 \exp\left(-\frac{GM_0}{c^2 r} - \sigma\right),$$

即轨道方程为

$$\begin{cases} V_m^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\ = c^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{2GM_0}{c^2 r} - 2\sigma\right)\right), \\ m_0 r^2 \frac{d\varphi}{dr} = L_0 \exp\left(-\frac{2GM_0}{c^2 r} - 2\sigma\right). \end{cases} \quad (16)$$

由(16)式得天体运行轨道的一般性 Binet 方程形式为

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = u_0 (2\exp(4c^{-2}u + 4\sigma) - \exp(2c^{-2}u + 2\sigma)). \quad (17)$$

在极弱场时,因

$$4c^{-2}u + 4\sigma \rightarrow 0,$$

故将方程(17)式右边予  $c^{-2}u + \sigma$  以零阶 Taylor 级数展开得 Newton 引力理论的 Binet 方程形式(13)式

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = u_0, \quad 4c^{-2}u + 4\sigma \rightarrow 0 \quad (18)$$

#### 1.5 行星近日点进动的解析分析

在弱场时,因

$$4c^{-2}u + 4\sigma \ll 1,$$

故将方程(17)式右边予以一阶 Taylor 级数展开得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u &= u_0 (2(1 + 4c^{-2}u + 4\sigma) - (1 + 2c^{-2}u + 2\sigma)) \\ &= u_0 (1 + 6c^{-2}u + 6\sigma); \end{aligned}$$

故得在弱场时的 Binet 方程形式为

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + (1 - 6c^{-2}u_0)u = u_0 (1 + 6\sigma), \quad 4c^{-2}u + 4\sigma \ll 1 \quad (19)$$

方程(19)式的解为

$$u = u_0 \frac{1 + 6\sigma}{1 - 6c^{-2}u_0} + C_0 \cos(\sqrt{1 - 6c^{-2}u_0} \varphi), \quad (20)$$

这里  $C_0 > 0$  为待定常量.

由(20)式得

$$\frac{du}{d\varphi} = -C_0 \sqrt{1 - 6c^{-2}u_0} \sin(\sqrt{1 - 6c^{-2}u_0} \varphi). \quad (21)$$

当  $\frac{du}{d\varphi} = 0$  时,行星处于远日距离  $r_{\max}$  或近日距离  $r_{\min}$ ; 当行星处于其中的近日点距离  $r_{\min}$  时,由方程(20)、(21)二式得行星轨道相邻二周近日点运行角度  $\varphi_0$  的方程为

$$-C_0 \sqrt{1 - 6c^{-2}u_0} \sin(\sqrt{1 - 6c^{-2}u_0} \varphi_0) = 0,$$

故得

$$\sqrt{1 - 6c^{-2}u_0} \varphi_0 = 2\pi, \quad (22)$$

相应地此时  $u$  取极大值

$$u_{\max} = GM_0 r_{\min}^{-1},$$

解得  $C_0$  及  $\varphi_0$  分别为

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{GM_0}{r_{\min}} - u_0 \frac{1 + 6\sigma}{1 - 6c^{-2}u_0}, \\ \varphi_0 &= \frac{2\pi}{\sqrt{1 - 6c^{-2}u_0}} \approx 2\pi(1 + 3c^{-2}u_0) \\ &= 2\pi + 6\pi c^{-2}u_0. \end{aligned} \quad (23)$$

故得弱场时行星轨道近日点进动角  $\Delta\varphi_0$  为

$$\Delta\varphi_0 = \varphi_0 - 2\pi = \frac{6\pi}{c^2} u_0 = \frac{6\pi GM_0}{c^2 a(1 - e^2)}. \quad (24)$$

方程(24)式与 Einstein 广义相对论给出的较为符合实际观测数据的结论<sup>[6]</sup>一致.

#### 1.6 连续轨道理论与 Einstein 广义相对论的区别

在体系构造上,任何关于天体运行的连续轨道理论都应有其具体的 Binet 方程形式,并应在极弱场时退化为 Newton 理论形式,在弱场时给出诸如行星近日点进动速率的解.

由上述关于离散轨道的分析可见,其 Binet 方程(17)式在

$$4c^{-2}u + 4\sigma \rightarrow 0$$

时退化为 Newton 引力理论的 Binet 方程形式(13)式,在

$$4c^{-2}u + 4\sigma \ll 1$$

时其 Binet 方程的解则与 Einstein 广义相对论得出的结论一致.上述过程分别对应于(17)式方程右边进行的 Taylor 级数零阶展开与一阶展开.

在 Einstein 广义相对论中,天体运行轨道的 Binet 方程形式为

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = u_0 + 3c^{-2}u^2,$$

或

$$\frac{d^2\omega}{d\varphi^2} + \omega = \omega_0 + 3\omega^2,$$

式中参量

$$\omega = \frac{u}{c^2} = \frac{GM_0}{c^2 r}, \quad \omega_0 = \frac{u_0}{c^2} = \frac{GM_0}{c^2 a(1-e^2)}.$$

上述广义相对论的 Binet 方程在极弱场时因  $3c^{-2}u \rightarrow 0$ , 故能够退化为 Newton 引力理论的 Binet 方程(13)式的形式.

连续轨道理论的 Binet 方程(17)式与广义相对论的 Binet 方程形式相比较, 显然(17)式较为复杂. 但广义相对论的 Binet 方程在弱场  $3c^{-2}u \ll 1$  时, 不能转化为类如方程(19)式的简单形式, 使得方程不能直接进行求解, 需要先将此方程拆分为二个方程, 确定其近似解形式, 然后代回拆分前的方程中, 再经过级数展开、截断、对比等反复步骤后, 给出方程解的具体近似表示, 进而再求出行星近日点进动速率.

与 Einstein 广义相对论比较, 虽然连续轨道理论对天体运行轨道的解析推演描述稍显简练, 但由于理论包含有条件假设成分的方程(1)、(14)二式, 故其仍是属于初步探讨性质的理论.

## 2 天体运行背景介质理论的离散轨道描述

与天体运行背景介质描述的连续轨道描述相对应, 如果天体运行的轨道还具有与微观粒子运动的量子理论所描述的离散轨道相似的性质, 则此离散轨道在描述方法及方程形式上应具有天体运行所本有的特征.

下面给出天体运行背景介质理论的离散轨道描述, 其内容来源于资料[4], 并予以适当调整补充.

### 2.1 分维扩展及分形扩展

#### 2.1.1 分维扩展方程与分形扩展方程

在自然现象演化过程中, 当其局部细节变化与整体远景变化相联系时, 则对应参量  $x, y$  的函数关系为

$$f_p(\Delta x, \Delta y) = f_w(x, y). \quad (25)$$

进一步地, 如果在标度  $\epsilon$  层面上变化单元的数量  $n$  (自然数) 相对  $\epsilon$  局部细节的变化率与整体远景的平均变化率相联系, 则由(25)式得相似扩展方程

$$f_p\left(\frac{\Delta n}{\Delta \epsilon}\right) = f_w\left(s(\epsilon, n) \frac{n}{\epsilon}\right), \quad (26)$$

式中  $s(\epsilon, n)$  为相似函数.

由(26)式得相似扩展方程最简单的具体形式为

$$\left|\frac{dn}{d\epsilon}\right| = \left|s(\epsilon, n) \frac{n}{\epsilon}\right|, \quad n(\epsilon=1) = 1 \quad (27)$$

其二展开方程形式为

$$\frac{dn}{d\epsilon} + s(\epsilon, n) \frac{n}{\epsilon} = 0, \quad n(\epsilon=1) = 1 \quad (28)$$

$$\frac{dn}{d\epsilon} - s(\epsilon, n) \frac{n}{\epsilon} = 0, \quad n(\epsilon=1) = 1 \quad (29)$$

当  $s(\epsilon, n)$  相对  $n, \epsilon$  为常数时, 取(28)、(29)二式中的  $s(\epsilon, n)$  分别为

$$s(\epsilon, n) = \alpha \geq 0,$$

$$s(\epsilon, n) = \beta \geq 0,$$

则得

$$\frac{dn}{d\epsilon} + \alpha \frac{n}{\epsilon} = 0, \quad n(\epsilon=1) = 1 \quad (30)$$

$$\frac{dn}{d\epsilon} - \beta \frac{n}{\epsilon} = 0, \quad n(\epsilon=1) = 1 \quad (31)$$

将(30)式称为自相似分形方程, 式中  $\alpha$  为分形维数. 为略加区分这二个展开形式, 将(30)式称为分形扩展方程, 将(31)式称为分维扩展方程, 则相应地  $\alpha$  为分形扩展维数,  $\beta$  为分维扩展维数.

下面圆内接弦的扩展是较广泛意义上的相似扩展形式. 将半径为  $R$  的圆依次进行  $2^2, 2^3, \dots, 2^J$  等分, 并依次连成圆内接弦, 则仅依据 Pythagoras (约公元前 580~前 500 年) 的勾股弦定理即可得到圆内接弦的总长度  $l_{SJ}$  与直径  $2R$  之比在极限上为圆周率的无理数表述形式

$$\begin{aligned} \pi &= \lim_{J \rightarrow \infty} \frac{l_{SJ}}{2R} \\ &= \lim_{J \rightarrow \infty} 2^{J-1} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}, \end{aligned}$$

这里自然数  $J \geq 2$ , 式中右边的根号共有  $J-1$  重, 根号内 2 的个数也共有  $J-1$  个.

在  $J=16$  时, 得  $\pi \approx 3.1415926533$ .

因在距今 3120 年前中国的方算书《周髀算经》中具备了“勾广三, 股修四, 弦隅五”的论述, 到距今 2500 年前古希腊的 Pythagoras 证明了勾股弦定理, 并掌握了无理数的运算规律, 故由上述相似扩展得到的方程可初步推论关于圆周率的一个严谨表述在 Pythagoras 的时代可能已经给出, 其比距今 1500 年前中国南北朝的祖冲之 (公元 429-500 年) 断定圆周率取值在 3.1415926 与 3.1415927 之间的结论要早 1000 年左右, 表述也更为深刻.

#### 2.1.2 分维扩展方程与分形扩展方程的性质

由(30)式得分形扩展曲线的分形扩展维数  $\alpha$  及在标度  $\epsilon$  ( $\epsilon = \lambda l_0^{-1}$ ) 层面上的长度  $l_n$  为

$$\alpha = -\frac{\ln n}{\ln \epsilon}, \quad (32)$$

$$l_n = n\lambda = l_0 n^{1-\alpha^{-1}}, \quad (33)$$

式中  $l_0$  为分形扩展初始长度,  $\lambda$  为分形单位.

根据(31)式得分维扩展曲线的分维扩展维数  $\beta$  及在标度  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = \lambda l_0^{-1}$ ) 层面上的长度  $l_n$  为

$$\beta = \frac{\ln n}{\ln \varepsilon}, \quad (34)$$

$$l_n = n\lambda = l_0 n^{1+\beta^{-1}}, \quad (35)$$

式中  $l_0$  为分维扩展初始长度,  $\lambda$  为分维单位.

天体运行轨道曲线即主要包含上面二个扩展层次, 一是天体在主天体作用下产生运行轨道基线的分维扩展层次, 二是在背景介质及其它天体的作用下于轨道基线一维势阱中再次产生的整体上环绕基线、细节上下一重环绕上一重的多重分形扩展层次.

对于天体的运行, 目前主要讨论其在主星体作用下产生轨道基线的分维扩展层次的性质, 即在初始扩展长度  $l_0$  上分维扩展生成的轨道基线长度方程(35)式.

## 2.2 天体运行轨道的基线假设

假设: 天体在主星体作用下生成其运行轨道基线周长  $l_n$  的初始扩展长度为

$$l_0 = 2\pi\mu E_M^\kappa, \quad (36)$$

其中  $\mu$  为天体运行离散轨道常数,  $\kappa$  为待定常数,  $E_M$  为天体围绕的主星体能量.

## 2.3 天体运行的离散轨道方程

根据(35)、(36)二式得天体运行的离散轨道方程为

$$l_n = 2\pi\mu E_M^\kappa n^{1+\beta^{-1}}. \quad (37)$$

考虑忽略主星体整体自旋转能量及运动能量的影响, 有

$$E_M = E_{M_0} = M_0 c^2,$$

这里  $M_0$  为主星体的静止质量. (37)式成为

$$l_n = 2\pi\mu E_{M_0}^\kappa n^{1+\beta^{-1}}. \quad (38)$$

通过对太阳系部分行星及其卫星轨道基线数据的分析, 初步确定天体离散轨道常数  $\mu$ 、待定常数  $\kappa$ 、分维扩展维数  $\beta$  的数值估计分别为

$$\mu = 6.00 \times 10^{-20} \text{ m}^{-0.21} \text{ kg}^{-0.605} \text{ s}^{1.21}, \quad (39)$$

$$\kappa = 0.605, \quad (40)$$

$$\beta = 1.00. \quad (41)$$

方程(36)、(38)二式成为

$$l_0 = 2\pi\mu E_{M_0}^{0.605}, \quad (42)$$

$$l_n = 2\pi\mu E_{M_0}^{0.605} n^2. \quad (43)$$

由于尚未考虑各作用天体整体旋转能量、运动能量等的影响, 所以诸常数更为准确的数值还有待于深入研究分析予以确定.

## 2.4 部分天体运行离散轨道方程的具体形式

### 2.4.1 太阳系中诸行星运行的离散轨道

根据太阳质量为  $1.989 \times 10^{30}$  kg 的数据及(43)式, 得其诸行星离散轨道方程为

$$l_n = 0.0975 n^2 \text{ AU}, \quad (44)$$

将诸行星轨道数据与(44)式进行比较, 得含有一相对1%小数值0.001 AU波动量的方程为

$$l_n = (0.0975 \pm 0.001) n^2 \text{ AU}. \quad (45)$$

### 2.4.2 天王星诸卫星运行的离散轨道

根据天王星质量为  $8.689 \times 10^{25}$  kg 及(43)式, 得其卫星离散轨道方程为

$$l_n = 3.36 \times 10^4 n^2 \text{ km}. \quad (46)$$

### 2.4.3 地球卫星运行的离散轨道

根据地球质量为  $5.976 \times 10^{24}$  kg 的数据及(43)式, 得其卫星离散轨道方程为

$$l_n = 6.65 \times 10^3 n^2 \text{ km}. \quad (47)$$

### 2.4.4 绕月天体运行的离散轨道

根据月球质量为  $7.3506 \times 10^{22}$  kg 的数据及(43)式, 得绕月天体运行的离散轨道方程为

$$l_n = 465 n^2 \text{ km}. \quad (48)$$

## 2.5 离散轨道理论的预言数据

离散轨道与连续、平衡性轨道相比, 则属于稳定性轨道, 其显著的特征是当天体卫星处于稳定轨道附近运动时, 在受到微量扰动后卫星的运动状态会逐渐恢复到受扰动以前的状态.

下面给出部分天体卫星的稳定轨道预言数据, 以供对离散轨道理论作出有效验证.

### 2.5.1 太阳系行星运行的第1层离散轨道的预言

根据太阳诸行星运行的离散轨道方程(44)式, 取太阳赤道平均直径以  $1.39 \times 10^6$  km 计, 得在水星所处第5层离散轨道之前的四层距日心平均距离(AU)分别为:

第1层:  $0.0155 \pm 0.00016$  (约在距太阳表面外1个太阳直径距离的附近);

第2层:  $0.0621 \pm 0.00064$  (约在距太阳表面外6倍太阳直径距离的附近);

第3层:  $0.140 \pm 0.0014$ ;

第4层:  $0.248 \pm 0.0025$ .

### 2.5.2 天王星卫星第8层离散轨道的预言

根据天王星卫星离散轨道方程(46)式, 可得在天卫II与天卫III之间的第8层天卫所在离散轨道周长为  $2.150 \times 10^6$  km, 距天王星中心平均距离为

$$r_{\text{uca8}} = 3.422 \times 10^5 \text{ km},$$

其第12层天卫所在的离散轨道周长为  $4.838 \times 10^6$  km, 距天王星中心平均距离为  $7.701 \times 10^5$  km.

### 2.5.3 地球卫星第 3 层离散轨道的预言

根据地球卫星离散轨道方程(47)式,取地球半径平均值为 6371 km,得前二层皆处于地球内部,离地球表面最近的是第 3 层离散轨道,其处于地球表面外 3154 km 处的大气圈外层;第 4 层离散轨道则处于地球表面外  $1.056 \times 10^4$  km 处。

### 2.5.4 绕月航天器第 5 层离散轨道的预言

取月球平均半径为 1738 km,根据(48)式,得绕月航天器离散轨道的前 4 层平均半径皆小于月球半径,第 5 层离散轨道则处在月球表面外

$$r_{ms5} = 112 \text{ km},$$

在距月球表面外 90 km 内轨道不稳定;第 6、10、20 层离散轨道分别处在月球表面外的 926 km、5663 km、27865 km 处。

## 2.6 离散轨道理论的意义

离散轨道理论对于探索搜寻新的天体、设计地球卫星运行轨道、绕月航天器运行轨道等具有理论推演及方案选择上的参考意义。

在 2007 年的探月计划中,中国探月卫星“嫦娥一号”绕月航天器预计在距离月球表面 200 km 处的初始圆轨道上运行,然后逐渐下降到 100 km 处附近轨道;而印度的“月球初航(Chandrayaan-1)号”探月飞船预计在距月球表面 100 km 的轨道上运行。

如果以月球卫星离散轨道(48)式作为计算参考,则可得上述中国选择的绕月初始圆轨道较偏离于稳定轨道,而下降后的轨道及印度选择的绕月轨道则较为接近在第 5 层稳定轨道附近运行。

通过进一步的理论研究及实验验证,明确离散轨道的机理并修正有关参量、系数,则可加深对天体运行轨道的认识理解,并可考虑将天体卫星的离散轨道选择为宇航器的驻留轨道。

## 2.7 天体运行背景介质理论的基础展望及初步推论

天体运行背景介质理论所包含的连续轨道描述与离散轨道描述目前尚处于并行状态,不能从其中的一个分支理论自然导出另一个分支理论;其中离散轨道理论目前还需要来自连续轨道理论的部分支持,在基础及方法上也还具有数学统计的成分,方程中的待定系数仍需要由有关观测数据资料予以进一步校核确认。

### 2.7.1 基础展望

在共同的背景介质理论的基础上,天体运行的连续轨道理论及离散轨道理论,将只是一组天体运行在介质层壳中能量动态平衡方程解的二个极限形式,同时方程亦将给出天体作用的明显尺度特征。在

更广泛的区域中,天体作用可以近似展开为诸如下面(49)式的方程描述

$$F(qr) = F_p(qr)\Phi(qr), \quad (49)$$

式中

$$q = \frac{c^2}{GM_0} = \frac{1}{\gamma M_0 c^2}, \quad (50)$$

$$F_p(qr) = -\frac{qm_0 c^2}{(qr)^2} \exp\left(\frac{1}{qr} - \frac{1}{2qa}\right), \quad (6A)$$

$\Phi(qr)$ 为待定周期性衰减函数。

方程  $F(qr)$  的趋势性曲线如图一所示。

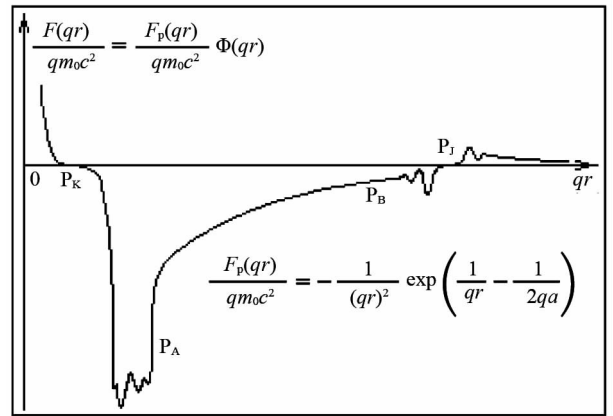


图 1 天体运行轨道背景介质理论的作用力趋势曲线图

Fig. 1 The interaction tendency curve in the background medium theory of celestial body motion orbit

在图 1 中,点  $P_K$  与点  $P_J$  为曲线过零点,在细化上曲线于点  $P_K$  之前及点  $P_J$  之后还都存在过零点;曲线从点  $P_A$  到点  $P_B$  段即为目前连续轨道方程  $F_p(qr)$  所近似描述的曲线部分。

上述思想描述了一个多尺度层面波动嵌套(分形)图景,其中方程  $F_p(qr)$  即为一较大尺度层面波动的一段近似构成部分,而  $F_p(qr)$  本身又仅是一较小尺度层面波动曲线的基线近似方程。

关于引力在多尺度层面上规律的更深入分析,则宜基于分维数学的研究结论所提供的描述框架。

### 2.7.2 初步推论

作为对天体在较为广泛区域作用曲线的初步探讨推论,一方面,从点  $P_K$  到点  $P_A$  之间引力不会出现奇点或无穷大,质量坍塌难以无限制地持续进行,即仅由引力难以形成质量密度趋于无穷大的理想黑洞;另一方面,在由点  $P_B$  到点  $P_J$  段,引力从开始出现细微波动,至波动变大逐渐明显偏离方程  $F_p(qr)$  (包括 Newton 引力规律),即与方程  $F_p(qr)$  比较,将

产生引力增加、减小等波动。同时,在将星系作为微尘颗粒定义的体系里,运动规律自有与该层面对应的方程形式。

对于在天体运行背景介质理论建立的初期阶段,一般先拟就有几个相互衔接重叠的过渡性理论予以先验毛估及粗略贯通是重要的;在此探索过程中,不易避免的是其体系中裹含有无法消除的经验假设及混合拼凑的成分;这也是逻辑基础及数理语言的盲区,致使不能建立起完全消除这些成分的理想解析体系。

在至为根本的层面上,自然不昧因果并超越逻辑;逻辑的作用在于指向或导向究竟,但逻辑远不是究竟本身;在逻辑与究竟之间还存在思维极难以触及的区域,对形式与内涵之间转化的考察及由此建立的逻辑推演体系难以对自然予以完备描述。在从Newton模式导入Siddhartha模式的过程中,宜兼容而又不执著其任何状态,以免由传承转化为阻碍。

天体运行背景介质理论的离散轨道描述目前由于在数学上采用了分维扩展方法,所以其进一步的发展需要来自分维数学的分维微积分及分形测度计算所提供的基礎。

### 3 分维微积分基础初步

分维微积分在理论上主要依据分维导数相对邻近规整导数的位置假设,目前此方法尚不能给出一般函数分维导数的具体解析形式。

分维微积分与分数阶微积分有所不同,分数阶微积分的基础主要依据规整积分变换对分数阶的默认外推,能给出一般函数分数阶微积分的具体形式。

上述这二个研究方向在理论上都依赖于规整微积分的表述,但也都缺少严格的证明。

可能的情况是这些表述皆是趋向一个较为基本理论的过渡性近似形式。而未来可能建立的这个较为基本的理论,将包含更为深刻普适的核心概念定义及基础假设,Newton微积分将成为其导出结论。

下面的分维微积分主线脉络内容主要来源于资料[12,4],并略作调整补充,旨在为未来的分维数学解析体系提供前期探讨途径及框架参照。

#### 3.1 一般函数的Newton导数

对于一般函数 $f(x)$ ,取其在点 $x$ 处的邻域分别为函数形式 $f_1(x-k_1\Delta x)$ 、 $f_2(x+k_2\Delta x)$ ,这里 $k_1$ 、 $k_2$ 为有限非负实数, $\Delta x>0$ ;可定义二函数在点 $x$ 处的规整导数为

$$Df(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_2(x+k_2\Delta x) - f_1(x-k_1\Delta x)}{(k_1+k_2)\Delta x} \quad (51)$$

这里函数 $f_1(x-k_1\Delta x)$ 与 $f_2(x+k_2\Delta x)$ 在点 $x$ 处可以皆不连续。

特别地当二函数在点 $x$ 处的邻域具有相同函数形式并连续,且 $k_1=0$ 、 $k_2=1$ 时,(51)式即简化为Newton导数形式

$$Df(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

当二函数在点 $x$ 处具有相同函数形式,且 $k_1=k_2=1$ 时,(51)式成为

$$Df(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

而其规整积分形式则与同是规整积分的Newton积分具有相同的表述形式;可得函数 $f(x)$ 在点 $x$ 处的分维导数 $D^\alpha f(x)$ 具有性质

$$D^\alpha f(x) = \begin{cases} D^{\alpha_1} f(x), & \alpha = \alpha_1 \\ D^{\alpha_2} f(x), & \alpha = \alpha_2 \end{cases} \quad (52)$$

其中 $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 \leq 1$ 。

#### 3.2 一般函数的分维导数的位置假设及导出结论

##### 3.2.1 一般函数的分维导数的位置假设

根据(52)式,下面给出一般函数的分维导数的位置假设。

**假设:**分维导数 $D^\alpha f(x)$ (如果存在)处于 $D^{\alpha_1} f(x)$ 与 $D^{\alpha_2} f(x)$ 之间,即

$$\min\{D^{\alpha_1} f(x), D^{\alpha_2} f(x)\} \leq D^\alpha f(x) \leq \max\{D^{\alpha_1} f(x), D^{\alpha_2} f(x)\}, \quad (53)$$

其中 $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 \leq 1$ 。

##### 3.2.2 位置假设的连续性基础及导出结论

位置假设是基于下面对方程(52)式予连续性性质以进一步描述的方程(54)式。

当 $0 \leq \Delta\alpha \ll 1$ 时,分维导数 $D^\alpha f(x)$ (如果存在)处于 $D^{\alpha-\Delta\alpha} f(x)$ 与 $D^{\alpha+\Delta\alpha} f(x)$ 之间,即

$$\min\{D^{\alpha-\Delta\alpha} f(x), D^{\alpha+\Delta\alpha} f(x)\} \leq D^\alpha f(x) \leq \max\{D^{\alpha-\Delta\alpha} f(x), D^{\alpha+\Delta\alpha} f(x)\}, \quad (54)$$

$$\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} D^{\alpha-\Delta\alpha} f(x) = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} D^{\alpha+\Delta\alpha} f(x) = D^\alpha f(x),$$

式中 $0 \leq \Delta\alpha \ll 1$ 。

方程(54)式是属于经验性质的,其依赖于 $f(x)$ 的函数形式、 $\alpha$ 的值及 $\Delta\alpha$ 的微小值。

由位置假设(53)式,得 $D^\alpha f(x)$ 通过方程

$D^{\alpha_1} f(x) - D^{\alpha_2} f(x) = 0, 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 \leq 1$ 的根 $x_k$ (如果存在)所在位置



$$(x_k, D^{\alpha_1} f(x)(x = x_k)),$$

即在根  $x_k$  所在位置有

$$\begin{aligned} D^{\alpha_1} f(x) |_{x=x_k} &= D^{\alpha_2} f(x) |_{x=x_k} \\ &= D^{\alpha} f(x) |_{x=x_k}. \end{aligned} \tag{55}$$

当  $\alpha_1=0, \alpha_2=1$  时, (55) 式成为

$$f(x_k) = Df(x) |_{x=x_k} = D^{\alpha} f(x) |_{x=x_k}. \tag{56}$$

特别地, 当  $f(x) = \exp x$  时, 其规整导数为

$$D^{\text{inta}} f(x) = D^{\text{inta}+1} f(x) = \exp x,$$

其中  $\text{inta}$  为对  $\alpha$  的取整数运算.

根据 (53)、(56) 二式及上式得

$$D^{\alpha} \exp x = \exp x.$$

### 3.3 位置假设的一个等效推论

一般函数的分维导数位置假设 (53) 式的一个等效推论函数维导数为 对于给定函数  $g(x)$ , 当

$$0 \leq \Delta x \ll 1,$$

$$0 \leq |g(x + \Delta x) - g(x - \Delta x)| \ll 1$$

时, 函数维导数  $D^{g(x)} f(x)$  处于  $D^{g(x-\Delta x)} f(x - \Delta x)$  与  $D^{g(x+\Delta x)} f(x + \Delta x)$  之间, 即

$$\begin{aligned} \min\{D^{g(x-\Delta x)} f(x - \Delta x), D^{g(x+\Delta x)} f(x + \Delta x)\} \\ \leq D^{g(x)} f(x) \leq \max\{D^{g(x-\Delta x)} f(x - \Delta x), \\ D^{g(x+\Delta x)} f(x + \Delta x)\}. \end{aligned} \tag{57}$$

故  $D^{g(x)} f(x)$  通过方程

$$D^{g(x+\Delta x)} f(x + \Delta x) - D^{g(x-\Delta x)} f(x - \Delta x) = 0$$

的根所在位置, 且有

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} D^{g(x-\Delta x)} f(x - \Delta x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} D^{g(x+\Delta x)} f(x + \Delta x) \\ &= D^{g(x)} f(x). \end{aligned}$$

进一步的研究将表明, 上述推论并不总是严格成立的.

### 3.4 幂函数的分维导数的形式假设

当上述函数为幂函数

$$f(x) = x^p, \quad p > 0$$

时, 因其规整导数

$$Df(x) = px^{p-1},$$

则据此下面给出幂函数的分维导数形式假设.

假设: 幂函数  $f(x) = x^p (p > 0)$  的分维导数的形式为

$$D^{\alpha} x^p = \psi(\alpha) x^{p-\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{58}$$

其中  $\psi(\alpha)$  为关于  $\alpha$  的待定函数.

### 3.5 幂函数的分维微积分

#### 3.5.1 幂函数的分维导数

根据 (53)、(56) 二式得  $D^{\alpha} x^p$  通过方程

$$f(x) - Df(x) = x^p - px^{p-1} = 0$$

的根  $x_1=0 (p > 0), x_2=p$  所在位置  $(0, 0), (p, p^p)$ ,

代入 (56)、(58) 二式得

$$p^p = \psi(\alpha) p^{p-\alpha},$$

故得 (58) 式中关于  $\alpha$  的待定函数为

$$\psi(\alpha) = p^{\alpha}. \tag{59}$$

将 (59) 式代入 (58) 式得幂函数的分维导数具体表述形式为

$$D^{\alpha} x^p = p^{\alpha} x^{p-\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{60}$$

特别地, 当  $p=1$  时, (60) 式简化为

$$D^{\alpha} x = x^{1-\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{61}$$

一般地, 当  $\alpha \geq 0$  时, 根据 (53)、(56) 二式,

$D^{\alpha} f(x)$  处于  $D^{\text{inta}} f(x)$  到  $D^{1+\text{inta}} f(x)$  之间, 则得

$$D^{\alpha} f(x) = D^{\alpha-\text{inta}} D^{\text{inta}} f(x), \quad \alpha \geq 0 \tag{62}$$

#### 3.5.2 幂函数的分维微分及积分

根据 (60)、(62) 二式, 得幂函数的分维微分为

$$d^{\alpha} x^p = p^{\alpha} x^{p-\alpha} (dx)^{\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{63}$$

$$d^{\alpha} x^p = D^{\alpha-\text{inta}} D^{\text{inta}} x^p (dx)^{\text{inta}} (dx)^{\alpha-\text{inta}}, \alpha \geq 0 \tag{64}$$

当

$$[I^{\alpha} x^p] |_{x=0} = 0$$

时, 其分维积分形式为

$$\begin{aligned} I^{\alpha} x^p &= (p + \alpha)^{-\alpha} x^{p+\alpha} \\ &= \Lambda^{-1}(\alpha, p) x^{p+\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned} I^{\alpha} x^p &= I^{\text{inta}} I^{\alpha-\text{inta}} x^p \\ &= \Lambda^{-1}(\alpha, p) x^{p+\alpha}, \quad \alpha \geq 0 \end{aligned} \tag{66}$$

其中函数  $\Lambda(\alpha, p)$  为

$$\Lambda(\alpha, p) = \begin{cases} (p + \alpha)^{\alpha}, & 0 \leq \alpha \leq 1 \\ (p + \alpha - \text{inta})^{\alpha-\text{inta}} \\ \times \prod_{i=1}^{\text{inta}} (p + \alpha - \text{inta} + i), & \alpha \geq 1 \end{cases} \tag{67}$$

当  $p=1$  时, (67) 式成为

$$\Lambda(\alpha, 1) = \begin{cases} (1 + \alpha)^{\alpha}, & 0 \leq \alpha \leq 1 \\ (1 + \alpha - \text{inta})^{\alpha-\text{inta}} \\ \times \prod_{i=1}^{\text{inta}} (1 + \alpha - \text{inta} + i), & \alpha \geq 1 \end{cases} \tag{68}$$

依据 (68) 式亦可得  $\Lambda(\alpha, 1)$  为实数  $\alpha+1$  阶乘  $(\alpha+1)!$  的一种可能表示形式

$$(\alpha + 1)! = \Lambda(\alpha, 1), \alpha \geq 0$$

#### 3.5.3 幂函数的分维积分与其范数的关系

作为进一步的探讨, 参照赋范线性空间的范数表述形式, 当幂函数  $f(x) = x^p (p > 0)$  满足条件

$$\int |f(x)|^{\alpha-1} dx < +\infty$$

时, 赋予范数

$$\|f\|_{\alpha^{-1}} = \left(\int |f(x)|^{\alpha^{-1}} dx\right)^{\alpha}, 1 \leq \alpha^{-1} < +\infty$$

得此时(65)式的范数表述形式为

$$I^{\alpha} |f(x)| = \alpha^{-\alpha} \|f\|_{\alpha^{-1}}, 0 < \alpha \leq 1 \quad (69)$$

方程(69)式如果只是针对幂函数则意义较弱,但其对于进一步描述一般函数的分维积分与范数的关系具有参照意义.

### 3.6 分维导数与分数阶导数的区别

#### 3.6.1 $\Gamma$ 函数的二个近似计算公式

通过对  $\Gamma$  函数的深入分析,可得其二近似等式为<sup>[4]</sup>

$$\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)} = p^{\alpha} \left(1 + \frac{1}{7.4p} \sin(\alpha\pi)\right), \quad (70)$$

$$\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)} p^{\beta-\alpha} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-(1-\alpha))} p^{\beta-(1-\alpha)}, \quad (71)$$

式中  $0 \leq \alpha \leq 1, p \geq 0.5$ .

当  $p > 2.5$  时,(70)式可进一步近似表示为

$$\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)} = p^{\alpha}, p > 2.5 \quad (72)$$

根据(71)、(72)二式分别得  $\Gamma$  函数近似值计算的二个简略公式为

$$\Gamma(n+2\alpha) = (n+\alpha)^{2\alpha-1} n!, \quad n \geq 1 \quad (73)$$

$$\Gamma(n+\alpha) = n^{\alpha-1} n!, \quad n \geq 3 \quad (74)$$

式中  $0 \leq \alpha \leq 1, n!$  为自然数  $n$  的阶乘.

计算表明,(73)式比(74)式的计算精度高.

#### 3.6.2 分维导数与分数阶导数的联系与区别

分数阶导数的一些结论是从  $\Gamma$  函数及积分变换方程直接默认推广得到的,对于幂函数

$$f(x) = x^p, \quad p > 0$$

有分数阶导数

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} x^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)} x^{p-\alpha}. \quad (75)$$

故根据(72)、(75)二式得

$$\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)} x^{p-\alpha} = p^{\alpha} x^{p-\alpha}, \quad p \geq 2.5$$

即在此条件下分维导数与分数阶导数近似相等.

对于分维导数,根据(55)式,函数  $f(x) = x^p$  在  $x = p$  处的所有分维导数  $D^{p_1} f(x), D^{p_2} f(x)$  都相等,

$$p^{p_1} p^{p-p_1} = p^{p_2} p^{p-p_2} = p^p,$$

这里  $0 \leq p_1 \leq 1, 0 \leq p_2 \leq 1$ .

对于分数阶导数,根据(71)、(75)二式,幂函数  $f(x) = x^p (p \geq 2.5)$  只在其二分数阶满足关系

$$\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-p_1)} p^{p-p_1} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-p_2)} p^{p-p_2},$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

在一般情况下,对于分维导数有

$$\frac{d^{\alpha}}{d\phi(x)^{\alpha}} f(x) \neq \frac{1}{(D\phi(x))} \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} f(x), \quad (76)$$

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} f(\tau x) \neq \tau^{\alpha} \frac{d^{\alpha}}{d\tau x^{\alpha}} f(\tau x), \quad (77)$$

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} (\phi(x) + f(x)) \neq \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} \phi(x) + \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} f(x), \quad (78)$$

$$\frac{d^{\alpha_1}}{dx^{\alpha_1}} \frac{d^{\alpha_2}}{dx^{\alpha_2}} f(x) \neq \frac{d^{\alpha_2}}{dx^{\alpha_2}} \frac{d^{\alpha_1}}{dx^{\alpha_1}} f(x), \alpha_1 \neq \alpha_2 \quad (79)$$

式中  $0 \leq \alpha \leq 1, 0 < \alpha_1 < 1, 0 < \alpha_2 < 1, \tau > 0$  为常数.

上述分维导数的(76)~(78)三式与目前分数阶导数的结论是有所不同的;(79)式则表明虽然分维导数依赖于规整导数,但却是与过程相关的.

## 4 自相似分形测度的分维微积分基础引论

自相似分形测度的分维微积分计算方法主要是依据上述分维微积分的表述形式,给出能够直接进行测度计算的方程.

这种方法的分析过程及得到的自相似分形测度与目前普遍采用 Hausdorff 测度方法(覆盖方法)得到的结果不同;覆盖方法分析过程较为复杂,得到的测度一般具有值域性,且此值域还依赖于所使用的覆盖方式及迭代技巧,计算方法的普适性较弱.

下面给出自相似分形测度的分维微积分计算方法,主要内容来源于资料[12,4],并予以适当补充.

### 4.1 自相似分形方程

方程(30)式曾给出自相似分形方程形式,下面通过一般分形方程给出自相似分形方程.

一集合初始测度  $A_0$  于标度  $\epsilon$  层次上在函数  $\gamma(\epsilon, n)$  激励下,集合单位  $\theta(\epsilon)$  的数量  $n$  与  $\epsilon$  之比正比于  $n$  相对  $\epsilon$  的变化率,即

$$\frac{dn}{d\epsilon} + s(\epsilon, n) \frac{n}{\epsilon} = \gamma(\epsilon, n), n(\epsilon = 1) = 1 \quad (80)$$

式中比例函数  $s(\epsilon, n)$  即为集合生成的相对维数.

称(80)式为一般分形方程.这是一描述局部变化率与整体平均变化率关系的方程.

当  $\gamma(\epsilon, n) = 0$ , 且  $s(\epsilon, n) = \alpha$  相对  $\epsilon, n$  为常数时,(80)式成为

$$\frac{dn}{d\epsilon} + \alpha \frac{n}{\epsilon} = 0, \quad n(\epsilon = 1) = 1 \quad (81)$$

得

$$\alpha = -\frac{\ln n}{\ln \epsilon}.$$

故知分维数  $\alpha$  亦为 Mandelbrot 分形定义“整体与局

部以某种方式相似”中的相似方式.

上面方程(81)式即称为自相似分形方程,其与(30)式相同.

#### 4.2 分形测度的分维微积分形式定义

定义:当分形测度  $A$  相对分形初始测度  $A_0$  为升维  $\alpha(\alpha \geq 1)$  时,其测度  $A$  为对分形相似单位函数  $f(\theta)(\theta \in [0, A_0])$  的  $\alpha-1$  阶积分,分维微分方程形式为

$$d^{\alpha-1}A = f(\theta)(d\theta)^{\alpha-1}, \quad \theta \in [0, A_0] \quad (82)$$

#### 4.3 自相似分形的测度计算方程

对于自相似分形,分形相似单位函数

$$f(\theta) = \theta, \quad (83)$$

依据(82)式得其分维微分方程形式为

$$d^{\alpha-1}A = \theta(d\theta)^{\alpha-1}, \quad \theta \in [0, A_0] \quad (84)$$

根据(66)、(84)二式,当  $\alpha \geq 1$  时自相似分形测度为

$$A = \int_0^{A_0} \theta^{\alpha-1} d\theta = \frac{1}{\alpha} A_0^\alpha, \quad (85)$$

根据(65)、(66)、(68)、(85)四式得自相似分形的测度计算方程为

$$\begin{aligned} A &= \Lambda^{-1}(\alpha-1, 1)A_0^{1+(\alpha-1)} \\ &= \Lambda^{-1}(\alpha-1, 1)A_0^\alpha, \quad \alpha \geq 1 \end{aligned} \quad (86)$$

当  $0 < \alpha \leq 1$  时,  $A_0$  为  $A$  在逆方向上的  $\alpha^{-1}$  维分形测度,有  $\alpha^{-1} \geq 1$ . 根据(86)式得

$$A_0 = \Lambda^{-1}(\alpha^{-1}-1, 1)A^{\alpha^{-1}}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (87)$$

解得当  $0 < \alpha \leq 1$  时自相似分形测度的计算方程为

$$A = \Lambda^\alpha(\alpha^{-1}-1, 1)A_0^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (88)$$

由(86)、(88)二式得自相似分形的测度计算方程为

$$A = \begin{cases} \Lambda^\alpha(\alpha^{-1}-1, 1)A_0^\alpha, & 0 < \alpha \leq 1 \\ \Lambda^{-1}(\alpha-1, 1)A_0^\alpha, & \alpha \geq 1 \end{cases} \quad (89)$$

根据(89)、(68)二式,当  $0.5 \leq \alpha \leq 2$  时,自相似分形的测度计算方程简化为

$$A = \begin{cases} \alpha^{\alpha-1}A_0^\alpha, & 0.5 \leq \alpha \leq 1 \\ \alpha^{1-\alpha}A_0^\alpha, & 1 \leq \alpha \leq 2 \end{cases} \quad (90)$$

根据(89)、(90)二式可以对一些自相似分形的测度进行计算.

#### 4.4 自相似分形的测度计算

##### 4.4.1 三分 Cantor 集合及 Koch 曲线测度

在资料[12]中已计算给出几个较为典型自相似分形的测度,包括三分 Cantor 集合、Koch 曲线、从二维转为一维、从三维转为二维、从三维转为一维的 Sierpinski 垫片等自相似分形的测度计算;其中在初始测度为  $l_0$  时得到的三分 Cantor 集合维数

$$\alpha_{3L2} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.631,$$

其测度为

$$A_{3L2} = 1.185l_0^{0.631}. \quad (91)$$

这与采用传统覆盖方法得到此三分 Cantor 集合 Hausdorff 测度下面的结果是有所不同的;

$$H_{\text{Cantor}} = 1.0l_0^{0.631}.$$

给出的 Koch 曲线分形维数

$$\alpha_{3L4} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.262,$$

其测度为

$$A_{3L4} = 0.941l_0^{1.262}. \quad (92)$$

由于(89)式中  $\alpha$  为  $A$  相对初始测度  $A_0$  的维数,即  $\alpha$  是相对维数,所以  $A_0$  本身即可以为分形测度,在资料[12]中给出有这样性质的计算实例.

下面依据基于分维微积分方法导出的自相似分析测度方程(89)、(90)二式,继续给出二种正交十字星的分形测度及二种 Sierpinski 垫片的测度.

##### 4.4.2 二种正交十字星的分形测度

取初始测度为  $l_0$ ,进行 2 等分,在等分点处正交生成 4 个等分线段,持续操作,此分形生成维数

$$\alpha_{2L4} = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2,$$

依据(90)式得其测度为

$$A_{2L4} = 0.5l_0^2. \quad (93)$$

这一生成集合极限上等于在平面上以线段布满由  $l_0$  为对角线的正方形面积.

当在等分点处正交生成 6 个等分线段时,持续操作,则得此集合生成维数

$$\alpha_{2L6} = \frac{\ln 6}{\ln 2} = 2.585,$$

依据(89)式得此分形测度为

$$A_{2L6} = 0.295l_0^{2.585}. \quad (94)$$

这一以线段生成的分形处于二维与三维之间.

##### 4.4.3 二种 Sierpinski 垫片的测度

取一正方形初始测度为  $l_0^2$ ,将其 9 等分,保留 4 个顶点部分,去掉其余 5 个部分(开集),持续操作, Sierpinski 尘的生成维数

$$\alpha_{9S4} = \frac{\ln 4}{\ln 9} = 0.631,$$

由(90)式得其测度为

$$A_{9S4} = 1.185l_0^{1.262}. \quad (95)$$

当保留 4 个顶点部分,同时亦保留 1 个中间部分,去掉其余 4 个部分(开集)时,持续操作,则此时 Sierpinski 垫片的生成维数为

$$\alpha_{9S5} = \frac{\ln 5}{\ln 9} = 0.732,$$

由(90)式得其测度为

$$A_{9S5} = 1.087l_0^{1.465}. \quad (96)$$

对于(95)式,当取  $l_0 = 1$  时, Sierpinski 垫片测度在数值上为 1.185,与三分 Cantor 集合测度(91)式具有相同的数值,维数关系为前者是后者的 2 倍.

## 5 结论

### 5.1 关于天体运行背景介质理论的连续轨道描述

在天体运行的连续轨道理论方面,介绍了其基础假设,及能量、势能、引力、速度方程,以 Binet 方程的具体形式及求解行星近日点进动角的分析过程讨论了其与 Einstein 广义相对论的联系与区别.

### 5.2 关于天体运行背景介质理论的离散轨道描述

在天体运行的离散轨道理论方面,介绍了其所采用的分维数学描述方法、基础假设,依据所得到的具体天体运行的离散轨道方程,给出了太阳系行星、天王星卫星、地球卫星、绕月航天器等离散轨道的理论预言数据,并对其与连续轨道理论共同的背景介质理论基础给出初步展望.其中作为对天体在较广泛区域作用曲线的初步推论,指出天体仅由引力难以形成质量密度趋于无穷大的理想黑洞,目前得到的结论尚不足以刻画至微至广的极致层面.

### 5.3 关于分维微积分基础初步

在分维微积分基础方面明晰了一般函数分维导数的位置假设,及幂函数的分维导数形式假设,讨论了幂函数的分维导数及分维微分、积分表述形式,探讨了幂函数的分维积分与其范数的对应关系,分析了分维导数与分数阶导数的关系与区别.

### 5.4 关于自相似分形测度的分维微积分计算方法

在自相似分形测度的分维微积分计算方面,明确了分形测度的分维微积分形式定义,依据幂函数的分维微积分表述,讨论了自相似分形测度的分维微积分计算方程及其与 Hausdorff 测度方法的区别,并计算了几种自相似分形的测度.

### 5.5 初步展望

虽然上述这四个分支方向给出的分析过程及结论较目前其它分析方法略显自然解析,但由于其理论的基础假设还存在明显的经验成分,推演过程及结论在极限上仍依赖于经典理论所提供的形式验证,方程中存在的待定常数还需由观测数据统计计算予以校核确认,故可以肯定,上述这四个方面的研究不是很基本的,其给出的描述可能仅是未来理想解析体系投影在探索历史上的断续轮廓.

## 参 考 文 献 (References):

- [1] Warburton F W. The Advance of the Perihelion of Mercury [J]. Phys. Rev., 1946, 70: 86 ~ 87.
- [2] Irwin I S. A century of relativity [J]. Rev. Mod. Phys., 1999, 71: S41 ~ S53.
- [3] Pitjeva E V. Relativistic effects and solar oblateness from radar observations of planets and spacecraft [J]. Astronomy Letters, 2005, 31(5): 340 ~ 349.
- [4] 阎坤. 天体运行的离散轨道与离散轨道引论 [J]. 地球物理学进展, 2004, 19(4): 984 ~ 995.  
Yan K. Introductions on the medium shell and discrete orbits of celestial bodies motion [J]. Progress in Geophysics (in Chinese with abstract in English), 2004, 19(4): 984 ~ 995.
- [5] 阎坤. 天体运行轨道的一般性 Binet 方程形式 [J]. 地球物理学进展, 2005, 20(2): 534 ~ 539.  
Yan K. The general expression of Binet equation about celestial bodies motion orbits [J]. Progress in Geophysics (in Chinese with abstract in English), 2005, 20(2): 534 ~ 539.
- [6] Anna M N, Clifford M W. The real value of Mercury's perihelion advance [J]. Nature, 1986, 320: 39 ~ 41.
- [7] Giona M. Fractal Calculus on  $[0, 1]$  [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 1995, 5(6): 987 ~ 1000.
- [8] Kyallee D, Robert S S, Jade P V. Fractal differential equations on the Sierpinski gasket [J]. Journal of Fourier Analysis and Applications, 1999, 5(1): 203 ~ 284.
- [9] Rybaczuk M, Kedzia A, Zielinski W. The concept of physical and fractal dimension II. The differential calculus in dimensional spaces [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2001, 12(13): 2537 ~ 2552.
- [10] Ruiz Medina M D, Anh V V, Angulo J M. Stochastic fractional-order differential models with fractal boundary conditions [J]. Statistics & Probability Letters, 2001, 54(1): 47 ~ 60.
- [11] Abhay P, Gangal A D. Fractal differential equations and fractal-time dynamical systems [J]. Pramana - J. Phys., 2005, 64(3): 389 ~ 409.
- [12] 阎坤. 宇宙分维构造及其数学基础 [J]. 地球物理学进展, 2004, 19(3): 709 ~ 716.  
Yan K. Fractal dimension structure of Cosmos and its mathematical foundations [J]. Progress in Geophysics (in Chinese with abstract in English), 2004, 19(3): 709 ~ 716.
- [13] Christoph B. Self-Similar Sets 7. A Characterization of Self-Similar Fractals with Positive Hausdorff Measure [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1992, 114(4): 995 ~ 1001.
- [14] Robert S S. Self-Similar Measures and Their Fourier Transforms. II [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1993, 336(1): 335 ~ 361.
- [15] Rolf R. An Improved Multifractal Formalism and Self-Similar Measures [J]. Journal of Math Analysis and Applications, 1995, 189: 462 ~ 490.
- [16] Siegfried G. On Bandt's tangential distribution for self-similar measures [J]. Monatshefte für Mathematik, 1995, 120(3): 223 ~ 246.