第51卷第2期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.51, No.2
2008年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Mar., 2008

文章编号: 0583-1431(2008)02-0391-10 **文献标识码:** **A**

随机单调算子的满射性及应用

肖建中 陶 媛

南京信息工程大学数理学院数学系 南京 210044
E-mail: xiaojz@nuist.edu.cn

摘 要 研究 Banach 空间中的随机单调算子, 建立了连续随机单调算子的随机锐角原理、随机满射定理、随机双射定理及 Hilbert 空间上的一类连续随机算子的新的随机不动点定理, 并应用随机强单调算子理论讨论了随机 Hammerstein 积分方程随机解的存在唯一性.

关键词 随机单调算子; 随机算子方程; 锐角原理; 满射定理
MR(2000) 主题分类 47H05, 47B80, 60H25
中图分类 O177.99, O211.5

Property of Surjection for Monotonic Random Operator and Its Application

Jian Zhong XIAO Yuan TAO

Department of Mathematics, College of Mathematics and Physics,
Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, *P. R. China*
E-mail: xiaojz@nuist.edu.cn

Abstract The monotonic random operators are studied in Banach spaces. The random acute angle principle, random surjection theorem and random bijection theorem for the continuous monotonic random operators are established. Some new random fixed point theorems for continuous random operators in Hilbert spaces are obtained. Also, the existence of unique random solution for the random Hammerstein type integral equation is discussed by applying the theory of strongly monotonic random operator.

Keywords monotonic random operator; random operator equation; acute angle principle; surjection theorem
MR(2000) Subject Classification 47H05, 47B80, 60H25
Chinese Library Classification O177.99, O211.5

1 引言及预备知识

以随机算子的不动点及随机方程解的理论与应用为主要方向的随机非线性泛函分析研究兴起于 1950 年左右, 捷克 Prague 学派与我国王梓坤等在这一领域做了开创性工作 (见 Bharucha-Reid [1], 王梓坤 [2], O'Regan [3], 张石生 [4]). 此后由于应用的推动, 这一领域的研究在世界范围

收稿日期: 2007-01-18; 接受日期: 2007-09-15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10671094)

内持续得到发展, 在随机压缩算子、非扩张算子、1- 集压缩算子的不动点理论、随机重合点理论、随机拓扑度理论及随机逼近理论等方面都有较为深入的工作 (见文 [1–17]).

本文继续这一方向的研究, 讨论 Banach 空间框架下随机单调算子的满射性质. 第 2 节建立了连续随机单调算子的随机锐角原理、随机满射定理及随机双射定理等, 并由此进一步得到 Hilbert 空间上一类连续随机算子的新的随机不动点定理. 这些结果是经典情形著名定理的随机化开拓, 其中有的也是新近相关结果的推广 (见本文注 1). 第 3 节应用随机双射理论证明了随机 Hammerstein 积分方程 [8, 9] 的随机解的存在唯一性定理.

设 $(\Omega,\mathscr{A})$ 为可测空间, 其中 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的 σ- 代数, 若 $G\subset\Omega$, 有 $G\in\mathscr{A}$, 也称 G 为 $\mathscr{A}$- 可测集; 用 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 表示完全的概率测度空间, 其中 P 为概率测度, 即 $P(\Omega)=1$; "$\forall\,\omega\in\Omega$ a.e." 表示除去 Ω 的一个零测子集外处处成立. X 为任意集, X 的一切非空子集的族记为 2^X; 对 Descartes 积 $X_1\times X_2$, $G\subset X_1\times X_2$, 用 $\Pi_{X_1}(G)$ $(\Pi_{X_2}(G))$ 表示 G 在 X_1 (X_2) 上的射影, 即

$$\Pi_{X_1}(G)=\{x_1\in X_1\,|\,\exists\,x_2\in X_2,\,(x_1,x_2)\in G\};$$

当 X 是拓扑空间时, 记 X 上开集生成的 σ- 代数 (即 Borel 集族) 为 $\mathscr{B}_X$; 当 X 是可分完备的度量空间时, 称 X 为 Polish 空间.

设 R^n 为 n 维实欧氏空间, E 为实数域 R^1 上的 Banach 空间, E^* 是其对偶空间, θ 表示 E 或 E^* 的原点, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 E 与 E^* 间的偶对, 即 $\langle x^*,x\rangle$ 为连续线性泛函 x^* 在点 x 的值; 设 D 为 E 中开集, 则 $\overline{D}$, $\overline{\mathrm{co}}D$ 分别表示 D 的闭包与闭凸包, ∂D 表示 D 的边界; E 为 Hilbert 空间时记为 H, 此时 $E=E^*=H$; 又当 m 为 R^n 上的 Lebesgue 测度时, $L^2(m)$ 表示平方可积函数空间, 它是一个可分的 Hilbert 空间.

类似于文献 [1–18], 本文引入下述稍作修改的随机算子诸概念.

定义 1[1−5] 设 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 为完全的概率测度空间, 映射 $x:\Omega\to E$ 称为 E 值随机元或随机变量, 若 x 是 $\mathscr{A}$- 可测的, 即对任一开集 $D\subset E$, 有 $x^{-1}(D)=\{\omega\in\Omega\,|\,x(\omega)\in D\}\in\mathscr{A}$. 映射 $A:\Omega\times E\to E^*$ 称为随机算子, 若对每一 $x\in E$, $\xi(\omega)=A(\omega,x)$ 是 E^* 值随机元; 称 A 是连续随机算子, 若对 $\forall\,\omega\in\Omega$ a.e., 又有 $A(\omega,\cdot):E\to E^*$ 是连续的.

定义 2[16, 18] 设 D 是 E 中开集, $A:\Omega\times D\to E^*$ 为随机算子. 称 A 为随机单调的, 若 A 满足

$$\langle A(\omega,x)-A(\omega,y),\,x-y\rangle\geq 0,\quad\forall\,\omega\in\Omega\text{ a.e.},\quad\forall\,x,y\in D.\tag{1.1}$$

称 A 为随机弱非扩张的, 若 A 满足

$$\langle A(\omega,x)-A(\omega,y),\,x-y\rangle\leq\|x-y\|^2,\quad\forall\,\omega\in\Omega\text{ a.e.},\quad\forall\,x,y\in D.\tag{1.2}$$

称 A 为随机强单调的, 若 A 满足

$$\langle A(\omega,x)-A(\omega,y),\,x-y\rangle\geq\beta(\|x-y\|)\|x-y\|,\quad\forall\,\omega\in\Omega\text{ a.e.},\quad\forall\,x,y\in D.\tag{1.3}$$

称 A 为随机伪压缩的, 若 A 满足

$$\langle A(\omega,x)-A(\omega,y),\,x-y\rangle\leq\|x-y\|^2-\beta(\|x-y\|)\|x-y\|,\quad\forall\,\omega\in\Omega\text{ a.e.},\quad\forall\,x,y\in D.\tag{1.4}$$

其中 $\beta(t):[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 满足 $\beta(0)=0$, $\forall\,t\in(0,+\infty)$, 有 $\beta(t)>0$ 且 $\lim_{t\to+\infty}\beta(t)=+\infty$.

定义 3[16, 18] 称随机算子 $A:\Omega\times E\to E^*$ 为随机强制的, 若 A 满足

$$\lim_{\|x\|\to+\infty}\frac{\langle A(\omega,x),x\rangle}{\|x\|}=+\infty,\quad\forall\,\omega\in\Omega\text{ a.e.},\quad\forall\,x\in E.\tag{1.5}$$

定义 4[1, 5, 9] 设 $A:\Omega\times E\to E^*$ 为随机算子, $D\subset E$, 若有随机元 $x(\omega)\in D$, 使 $\forall\,\omega\in\Omega$ a.e., 有 $A(\omega,x(\omega))=x^*$, 则称 $x=x(\omega)$ 是随机算子方程 $A(\omega,x)=x^*$ 在 D 中的随机解; 若 $\forall\,\omega\in\Omega$ a.e., 有 $A(\omega,E)=E^*$, 则称 A 为随机满射; 若 $\forall\,\omega\in\Omega$ a.e., 有 $A(\omega,\cdot)$ 是 E 与 E^* 间的双映射, 则称 A 为随机双射; 若 A 是随机双射, 且 A 与 $A^{-1}:\Omega\times E^*\to E$ 都是随机连续算子, 则称 A 是随机同胚; 又当 $E=E^*=H$ 时, 若有随机元 $x(\omega)$, 使 $\forall\,\omega\in\Omega$ a.e., 有 $A(\omega,x(\omega))=x(\omega)$, 则称 $x=x(\omega)$ 是 A 的随机不动点.

定义 5[11, 17, 19] 设 $(\Omega,\mathscr{A})$ 为可测空间, X 为 Polish 空间, $F:\Omega\to 2^X$ 为闭集值的映射, 若对 X 的任一开集 G, $F^{-1}(G)=\{\omega\in\Omega\,|\,F(\omega)\cap G\neq\emptyset\}\in\mathscr{A}$, 则称 F 是 $\mathscr{A}$- 可测的.

关于可测性, 本文用到下列引理.

引理 1[20] 设 $(\Omega,\mathscr{A})$ 为可测空间, X,Y 是拓扑空间. 若映射 $x:\Omega\to X$ 可测, 映射 $y:X\to Y$ 连续, 则复合映射 $y\circ x:\Omega\to Y$ 是可测的.

引理 2[2, 5, 19] 设 $(\Omega,\mathscr{A})$ 为可测空间, X,Y 是 Polish 空间. 若 $A:\Omega\times X\to Y$ 为随机连续映射, 即 $A(\cdot,x)$ 是 $\mathscr{A}$- 可测的 $(\forall\,x\in X)$ 且 $A(\omega,\cdot)$ 连续 $(\forall\,\omega\in\Omega$ a.e.$)$, 则 A 是 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}_X$- 可测的. 又若 $x=x(\omega):\Omega\to X$ 是 $\mathscr{A}$- 可测的, 则 $y(\omega)=A(\omega,x(\omega)):\Omega\to Y$ 是 $\mathscr{A}$- 可测的.

引理 3[19] 设 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 是完全的概率测度空间, X 是 Polish 空间, $G\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}_X$, 则 G 的射影 $\Pi_\Omega(G)\in\mathscr{A}$.

引理 4[19] 设 $(\Omega,\mathscr{A})$ 为可测空间, X 是 Polish 空间. 若 $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ 中每个 $F_n:\Omega\to 2^X$ 均是 $\mathscr{A}$- 可测的, 则 $\bigcap_{n=1}^\infty F_n:\Omega\to 2^X$ 也是 $\mathscr{A}$- 可测的, 其中 $(\bigcap_{n=1}^\infty F_n)(\omega)=\bigcap_{n=1}^\infty F_n(\omega)$.

引理 5[9, 17, 19] 设 $(\Omega,\mathscr{A})$ 为可测空间, X 是 Polish 空间. 若 $F:\Omega\to 2^X$ 为闭集值的可测映射, 则 F 存在单值的可测选择.

引理 6[19] 设 $(\Omega,\mathscr{A})$ 为可测空间, X 是 Polish 空间. $F:\Omega\to 2^X$ 为闭集值的映射. 则 F 可测当且仅当对 X 的任一闭子集 B, 有 $F^{-1}(B)\in\mathscr{A}$.

引理 7[2, 6] 若 $A:\Omega\times E\to E^*$ 是随机连续算子, 且 $\forall\,\omega\in\Omega$ a.e., $A(\omega,\cdot)$ 可逆, 且 $A^{-1}(\omega,\cdot)$ 连续, 则 $A^{-1}:\Omega\times E^*\to E$ 也是随机连续算子.

下列引理在本文第 3 节中将起重要作用.

引理 8[18] 设 E 是 Banach 空间, $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset E$ 且 $\|x_n\|\to 0$ $(n\to\infty)$, $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset E^*$ 且 $\|f_n\|\to+\infty$ $(n\to\infty)$, 则对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $x_\varepsilon\in E$, 满足 $\|x_\varepsilon\|\le\varepsilon$, 存在子序列 $\{x_{n_i}\}$ 及 $\{f_{n_i}\}$, 使 $\lim_{i\to\infty}\langle f_{n_i},x_{n_i}-x_\varepsilon\rangle=-\infty$.

2 锐角原理、满射定理、双射定理

定理 1 设 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 是完全的概率测度空间, E 是实的自反的可分的 Banach 空间, $A:\Omega\times E\to E^*$ 是随机连续单调算子, $D\subset E$ 为有界开集, $\theta\in D$, 且

$$\langle A(\omega,x),x\rangle\ge 0,\ \ \forall\,\omega\in\Omega\ \text{a.e.},\ \ \forall\,x\in\partial D,$$

则方程 $A(\omega,x)=\theta$ 在 D 中存在随机解 $x=x(\omega)$.

证明 由 (1.1) 式, 不妨设 $\Omega_0\subset\Omega, P(\Omega_0)=1$, $\forall\,\omega\in\Omega_0$, 有 $A(\omega,\cdot)$ 在 E 上连续, 且

$$\langle A(\omega,x)-A(\omega,y),\,x-y\rangle\ge 0,\ \forall\,\omega\in\Omega_0,\ \ \forall\,x,y\in E;\tag{2.1}$$

$$\langle A(\omega,x),x\rangle\ge 0,\ \ \forall\,\omega\in\Omega\ \text{a.e.},\ \ \forall\,x\in\partial D.\tag{2.2}$$

因 E 可分 (由于 E 自反, E^* 也可分), 可设 $E=\overline{M}$, M 是可列集. 取定 $\omega\in\Omega_0$, $\forall\,x\in M$, 令

$$B_x=B_x(\omega)=\{y\in\overline{D}\,|\,\langle A(\omega,x),x-y\rangle\ge 0\}.\tag{2.3}$$

则 $\{B_x\,|\,x\in M\}$ 是 $\overline{D}$ 中的弱闭集的族.

对任意有限集 $\{x_i\}_{i=1}^m\subset M$, 记 $X_m=\operatorname{span}\{x_i\}_{i=1}^m$, 其维数 $n\le m$. 设 $\{y_i\}_{i=1}^n$ 是 X_m 的一组基, 定义 $T(\omega,\cdot):X_m\to X_m$ 如下:

$$T(\omega,x)=\sum_{i=1}^n\langle A(\omega,x),y_i\rangle y_i,\quad(\forall\,x\in X_m).$$

由 $A(\omega,\cdot)$ 的连续性知, $T(\omega,\cdot)$ 是连续的. 记 $X_m\cap D=S$. 下证 $T(\omega,x)=\theta$ 在 $\overline{S}=X_m\cap\overline{D}$ 中必有解.

事实上, 若 $\theta\notin T(\omega,\overline{S})$, 则 Brouwer 度 $\deg_n(T(\omega,\cdot),S,\theta)=0$, 但由正规性 $\deg_n(I,S,\theta)=1$, 得 $\deg_n(h_t,S,\theta)$ 在 $t\in[0,1]$ 上不是常数, 其中 $h_t(x)=tT(\omega,x)+(1-t)I(x)$, $I:X_m\to X_m$ 为恒等算子. 于是由同伦不变性得, 存在 $t_0\in(0,1)$, 使 $\theta\in h_{t_0}(\partial S)$, 即存在 $t_0\in(0,1)$, $x_0\in\partial S=X_m\cap\partial D$, 使

$$t_0T(\omega,x_0)+(1-t_0)x_0=\theta. \tag{2.4}$$

记 $q=\frac{1-t_0}{t_0}$, 由 (2.4) 式, 得 $T(\omega,x_0)=-qx_0$, 即

$$\sum_{i=1}^n\langle A(\omega,x_0),y_i\rangle y_i=-qx_0. \tag{2.5}$$

用线性泛函 $A(\omega,x_0)$ 作用于 (2.5) 式, 并利用 (2.2) 式, 得

$$\sum_{i=1}^n|\langle A(\omega,x_0),y_i\rangle|^2=-q\langle A(\omega,x_0),x_0\rangle\le 0.$$

从而得 $\langle A(\omega,x_0),\,y_i\rangle=0$ $(i=1,2,\dots,n)$. 于是再利用 (2.5) 式, 得 $x_0=\theta$. 这与 $x_0\in\partial S\subset\partial D$, $x_0\notin D$ 矛盾.

因此, $T(\omega,x)=\theta$ 在 $\overline{S}$ 中必有解 $z=z(\omega)$, 即

$$T(\omega,z)=\sum_{i=1}^n\langle A(\omega,z),\,y_i\rangle y_i\equiv\theta.$$

由于 $\{y_i\}_{i=1}^n$ 是 X_m 的基, 故 $\langle A(\omega,z),y_i\rangle=0$, $(i=1,2,\dots,n)$; 且 $\forall\,x\in X_m$ 必有 $\langle A(\omega,z),x\rangle=0$, 这蕴涵

$$\langle A(\omega,z),x_i\rangle=0,\quad(i=1,2,\dots,m);\ 且\ \langle A(\omega,z),z\rangle=0.$$

由于 A 是随机单调算子, 故由 (2.1) 式得

$$\langle A(\omega,x_i),x_i-z\rangle=\langle A(\omega,x_i)-A(\omega,z),x_i-z\rangle\ge 0,\quad(i=1,2,\dots,m).$$

这证得 $z\in B_{x_i},(i=1,2,\dots,m)$.

因为对任意有限集 $\{x_i\}_{i=1}^m\subset M$, 有 $\bigcap_{i=1}^m B_{x_i}\ne\emptyset$; 又因为 E 自反, $\overline{\mathrm{co}}D$ 是 E 中有界闭凸集从而是弱紧集, 且 $\{B_x\,|\,x\in M\}$ 是 $\overline{\mathrm{co}}D$ 中弱闭集的族, 故 $\bigcap_{x\in M}B_x\ne\emptyset$. 定义 $F,F_x:\Omega\to 2^E$ 如下 (其中 $x\in M$):

$$F(\omega)=\begin{cases}\bigcap\limits_{x\in M}B_x(\omega), & \omega\in\Omega_0,\\ \theta, & \omega\notin\Omega_0,\end{cases}\qquad F_x(\omega)=\begin{cases}B_x(\omega), & \omega\in\Omega_0,\\ \theta, & \omega\notin\Omega_0.\end{cases}$$

则

$$F(\omega)=\bigcap_{x\in M}F_x(\omega). \tag{2.6}$$

首先证明 F_x 是可测的. 由引理 6, 对 E 的任一闭集 Q, 只须证 $F_x^{-1}(Q)\cap\Omega_0$ 可测. 记

$$U_x=F_x^{-1}(Q)\cap\Omega_0=\{\omega\in\Omega_0\,|\,B_x(\omega)\cap Q\neq\emptyset\};$$

对固定的 x, 记 $g_x=g_x(\omega,y)=\langle A(\omega,x),x-y\rangle$, 其中 $y\in Y=Q\cap\overline{D}$. 因为 $A(\cdot,x)$ 可测, $\langle\cdot,x-y\rangle$ 连续, 由引理 1 得 $g_x=g_x(\omega,y)$ 关于 $\omega\in\Omega_0$ 可测; 又 $g_x=g_x(\omega,y)$ 关于 $y\in Y$ 连续, 故由引理 2 得, $g_x:\Omega_0\times Y\to R^1$ 是可测函数. 记 $\mathscr{A}_0=\mathscr{A}|_{\Omega_0}=\{U\cap\Omega_0\,|\,U\in\mathscr{A}\}$, 则

$$G_x=g_x^{-1}([0,+\infty])=\{(\omega,y)\,|\,\langle A(\omega,x),\,x-y\rangle\geq 0\}$$

是 $\mathscr{A}_0\times\mathscr{B}_Y$- 可测集. 由引理 3, $\Pi_{\Omega_0}(G_x)=\{\omega\in\Omega_0\,|\,\exists\,y\in Y,(\omega,y)\in G_x\}$ 是 $\mathscr{A}_0$- 可测的. 因为

$$\begin{aligned}\omega\in U_x\Leftrightarrow\ &\exists\,y\in B_x(\omega)\cap Q\Leftrightarrow\exists\,y\in Y,\ \langle A(\omega,x),\,x-y\rangle\geq 0\\ \Leftrightarrow\ &\exists\,y\in Y,\,(\omega,y)\in G_x\Leftrightarrow\omega\in\Pi_{\Omega_0}(G_x),\end{aligned}$$

故 $U_x=\Pi_{\Omega_0}(G_x)$ 是 $\mathscr{A}_0$- 可测集. 注意到 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 是完全的, 故 U_x 是 $\mathscr{A}$- 可测的, 从而 F_x 是可测的.

因为 M 可列, 应用引理 4, 由 (2.6) 式得 $F(\omega)$ 是可测映射. 由引理 5, 可选取 $x_0(\omega)\in F(\omega)$, $x_0(\omega)$ 是随机元, 且当 $\omega\in\Omega_0$, 有 $x_0(\omega)\in\bigcap_{x\in M}B_x(\omega)$. 据 (2.3) 式, 这表明 $\forall\,x\in M$, 有 $\langle A(\omega,x),x-x_0(\omega)\rangle\geq 0$. 因为 $E=\overline{M}$ 及 $A(\omega,\cdot)$ 连续 $(\omega\in\Omega_0)$, 故

$$\langle A(\omega,x),x-x_0(\omega)\rangle\geq 0\quad(\forall\,x\in E).\tag{2.7}$$

于是 $\forall\,y\in E$, 取 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,1)$ 且 $\lim_{n\to\infty}t_n=0$, 在 (2.7) 式中取 $x=x_0(\omega)+t_ny$, 有

$$\langle A(\omega,x_0(\omega)+t_ny),y\rangle=\frac{1}{t_n}\langle A(\omega,x_0(\omega)+t_ny),x_0(\omega)+t_ny-x_0(\omega)\rangle\geq 0.$$

令 $n\to\infty$, 得 $\langle A(\omega,x_0(\omega)),y\rangle\geq 0$. 对此式以 $-y$ 代 y, 得 $\langle A(\omega,x_0(\omega)),y\rangle\leq 0$. 因此有 $\langle A(\omega,x_0(\omega)),y\rangle=0$. 利用 y 的任意性, 得 $A(\omega,x_0(\omega))=\theta$, $(\forall\,\omega\in\Omega_0)$, 即

$$A(\omega,x_0(\omega))=\theta,\quad(\forall\,\omega\in\Omega\text{ a.e.}).$$

推论 1 设 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 是完全的概率测度空间, H 是实可分的 Hilbert 空间, $A:\Omega\times H\to H$ 是随机连续单调算子, $D\subset H$ 为有界开集, $\theta\in D$ 且

$$\langle A(\omega,x),x\rangle\geq 0,\quad\forall\,\omega\in\Omega\text{ a.e.},\quad\forall\,x\in\partial D,$$

则方程 $A(\omega,x)=\theta$ 在 D 中存在随机解.

定理 2 设 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 是完全的概率测度空间, E 是实的自反的可分的 Banach 空间, $A:\Omega\times E\to E^*$ 是随机连续单调算子且是随机强制的, 则对 $\forall\,x^*\in E^*$, 随机算子方程 $A(\omega,x)=x^*$ 必存在随机解, A 是随机满射.

证明 因 A 是随机强制的, 由 (1.5) 式, 可取 $r>0$ 充分大, 使在 $\|x\|=r$ 上恒有

$$\langle A(\omega,x)-x^*,x\rangle=\langle A(\omega,x),x\rangle-\langle x^*,x\rangle\geq\|x\|\left[\frac{\langle A(\omega,x),x\rangle}{\|x\|}-\|x^*\|\right]>0,\quad\forall\,\omega\in\Omega\text{ a.e.}\tag{2.8}$$

以下记 $D=\{x\in E\,|\,\|x\|<r\}$, 对 $\forall\,(\omega,x)\in\Omega\times E$, 令 $T(\omega,x)=A(\omega,x)-x^*$. 则 $T:\Omega\times E\to E^*$ 是随机连续算子, 并且 $\forall\,\omega\in\Omega$ a.e.,$\forall\,x,y\in E$, 有

$$\langle T(\omega,x)-T(\omega,y),x-y\rangle=\langle A(\omega,x)-A(\omega,y),x-y\rangle\geq 0,$$

即 T 也是随机单调的; 又据 (2.8) 式, 有

$$\langle T(\omega,x),x\rangle>0,\quad\forall\,\omega\in\Omega\text{ a.e.},\quad\forall\,x\in\partial D.$$

应用定理 1 得 $\exists x=x(\omega)\in D$ 为随机元, 使 $T(\omega,x(\omega))=\theta$, $(\forall\,\omega\in\Omega$ a.e.), 即 $A(\omega,x(\omega))=x^*$, $(\forall\,\omega\in\Omega$ a.e.).

推论 2 设 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 是完全的概率测度空间, H 是实可分的 Hilbert 空间, $A:\Omega\times H\to H$ 是随机连续单调算子, 且是随机强制的. 则对任意 $y\in H$, 随机算子方程 $A(\omega,x)=y$ 必存在随机解, A 是随机满射.

定理 3 设 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 是完全的概率测度空间, E 是实的自反的可分的 Banach 空间, $A:\Omega\times E\to E^*$ 是随机连续强单调算子. 则对任意 $x^*\in E^*$, $A(\omega,x)=x^*$ 在 E 中存在唯一的随机解, A 是随机双射. 又若 $\beta(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续, 则 A 是随机同胚.

证明 因 A 是随机强单调的, 故 A 是随机单调的, 且由 (1.3) 式可知, $\exists\,\Omega_0\subset\Omega$, $P(\Omega_0)=1$, 对 $\forall\,\omega\in\Omega_0$, $\forall\,x,y\in E$, 有

$$\langle A(\omega,x)-A(\omega,y),x-y\rangle\geq\beta(\|x-y\|)\|x-y\|. \tag{2.9}$$

于是, $\forall\,\omega\in\Omega_0$, $\forall\,x\in E$, 有

$$\begin{aligned}\langle A(\omega,x),x\rangle&=\langle A(\omega,x)-A(\omega,\theta),x-\theta\rangle+\langle A(\omega,\theta),x\rangle\\&\geq\beta(\|x\|)\|x\|-\|A(\omega,\theta)\|\|x\|=[\beta(\|x\|)-\|A(\omega,\theta)\|]\,\|x\|.\end{aligned}$$

从而 $\forall\,\omega\in\Omega_0$, 有 $\lim_{\|x\|\to+\infty}\frac{\langle A(\omega,x),x\rangle}{\|x\|}=+\infty$, 即 A 是随机强制的. 应用定理 2 得, $\forall\,x^*\in E^*, A(\omega,x)=x^*$ 在 E 中存在随机解, A 是随机满射.

现设 $x_1=x_1(\omega)$ 与 $x_2=x_2(\omega)$ 都是 $A(\omega,x)=x^*$ 的随机解. 则 $\exists\,\Omega_1\subset\Omega$, $\Omega_2\subset\Omega$, 使 $P(\Omega_1)=1$, $P(\Omega_2)=1$, 且

$$A(\omega,x_1(\omega))=x^*,\quad\forall\,\omega\in\Omega_1;\quad A(\omega,x_2(\omega))=x^*,\quad\forall\,\omega\in\Omega_2. \tag{2.10}$$

记 $\Omega_*=\bigcap_{i=0}^2\Omega_i$, $\forall\,\omega\in\Omega_*$, 由 (2.9) 式与 (2.10) 式, 得

$$0=\langle A(\omega,x_1(\omega))-A(\omega,x_2(\omega)),x_1(\omega)-x_2(\omega)\rangle\geq\beta(\|x_1(\omega)-x_2(\omega)\|)\|x_1(\omega)-x_2(\omega)\|.$$

按 β 的定义得, $x_1(\omega)=x_2(\omega)$, $(\forall\,\omega\in\Omega_*)$. 由于 $P(\Omega-\Omega_i)=0$, $(i=0,1,2)$, 故

$$P(\Omega-\Omega_*)=P\left[\bigcup_{i=0}^2(\Omega-\Omega_i)\right]\leq\sum_{i=0}^2P(\Omega-\Omega_i)=0,\quad P(\Omega_*)=1.$$

因此, $x_1(\omega)=x_2(\omega)$, $(\forall\,\omega\in\Omega$ a.e.). 证得 $A(\omega,x)=x^*$ 在 E 中存在唯一随机解, A 是随机双射.

再设 $\beta(t)$ 连续, 设 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty\subset E^*, x_n^*\to x_0^*$, 并设对 $\omega\in\Omega_n$, $A(\omega,x)=x_n^*$ 及对 $\omega\in\Omega^*$, $A(\omega,x)=x_0^*$ 都存在唯一随机解, 其中 $P(\Omega_n)=1$, $P(\Omega_*)=1$. 记 $\Omega'=\Omega_0\cap\Omega_*\cap\bigcap_{n=1}^\infty\Omega_n$, 因 $P(\Omega-\Omega')\leq P(\Omega-\Omega_0)+P(\Omega-\Omega*)+\sum_{n=1}^\infty P(\Omega-\Omega_n)=0$, 故 $P(\Omega')=1$. 取定 $\omega\in\Omega'$, 记 $A^{-1}(\omega,\cdot)x_n^*=x_n$, $A^{-1}(\omega,\cdot)x_0^*=x_0$. 若 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|\neq0$, 则存在子列 $\{x_{n_i}\}$, 使 $\lim_{i\to\infty}\|x_{n_i}-x_0\|=t_0\in(0,+\infty]$. 于是按 (2.9) 式, 得

$$\begin{aligned}\|x_{n_i}^*-x_0^*\|=\|A(\omega,x_{n_i})-A(\omega,x_0)\|&\geq\frac{1}{\|x_{n_i}-x_0\|}\langle A(\omega,x_{n_i})-A(\omega,x_0),x_{n_i}-x_0\rangle\\&\geq\beta(\|x_{n_i}-x_0\|).\end{aligned}$$

令 $i\to\infty$ 得 $0\geq\beta(t_0)$, 矛盾. 故 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=0$, 即 $A^{-1}(\omega,\cdot):E^*\to E$ 是连续的. 应用引理 7 得, $A^{-1}:\Omega\times E^*\to E$ 是随机连续算子. 因此 A 是随机同胚.

推论 3 设 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 是完全的概率测度空间, H 是实可分的 Hilbert 空间, $A:\Omega\times H\to H$ 是随机连续强单调算子. 则对 $\forall\,y\in H$, 随机算子方程 $A(\omega,x)=y$ 存在唯一随机解, 且当 $\beta(t)$ 连续时, A 是随机同胚.

注 1 在定理 1 中, $\langle A(\omega,x),x\rangle$ 表示随机向量 $A(\omega,x)$ 与向量 x 夹锐角, 因此称定理 1 为随机锐角原理. 定理 2 是著名的 Minty-Browder 满射定理的随机化开拓, 定理 3 是强单调算子双射定理的随机化开拓. 本文推论 3 是文 [16] 中一个主要结果的推广, 去掉了文 [16] 的定理 1 中关于算子 A "随机半闭 1- 集压缩" 这个多余的假设条件.

定理 4 设 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 是完全的概率测度空间, E 是实的自反的可分的 Banach 空间, $A:\Omega\times E\to E^*$ 是随机算子, $\forall\,\omega\in\Omega$ a.e., $A(\omega,\cdot)$ 在 E 上 Fréchet 可微, 且存在常数 $c>0$, 有

$$\langle A'_x(\omega,x)h,h\rangle\geq c\|h\|^2,\quad \forall\,\omega\in\Omega \text{ a.e.},\quad \forall\,x,h\in E, \tag{2.11}$$

则对任意 $x^*\in E^*, A(\omega,x)=x^*$ 在 E 中存在唯一随机解, 且 A 是随机同胚.

证明 $A(\omega,\cdot)$ Fréchet 可微蕴涵 $A(\omega,\cdot)$ 连续. 记

$$\psi(t)=\langle A(\omega,y+t(x-y)),x-y\rangle.$$

应用中值公式与 (2.11) 式得 $\exists\,\theta\in(0,1)$, 使

$$\langle A(\omega,x)-A(\omega,y),x-y\rangle=\psi(1)-\psi(0)=\psi'(\theta)=\langle A'_x(\omega,y+\theta(x-y))(x-y),x-y\rangle\geq c\|x-y\|^2.$$

取 $\beta(t)=ct$, 可知 A 是随机强单调的, 应用定理 3 可证得结论.

定理 5 设 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 是完全的概率测度空间, H 是实可分的 Hilbert 空间, $A:\Omega\times H\to H$ 是随机连续弱非扩张算子, 则对 $\forall\,\lambda\in(1,+\infty)$, 方程 $A(\omega,x)=\lambda x$ 在 H 中存在唯一的随机解.

证明 令 $T(\omega,x)=\lambda x-A(\omega,x)$. 显然 T 是随机连续的. $\forall\,\omega\in\Omega$ a.e., $\forall\,x,y\in H$, 由 (1.2) 式得

$$\langle T(\omega,x)-T(\omega,y),x-y\rangle=\lambda\|x-y\|^2-\langle A(\omega,x)-A(\omega,y),x-y\rangle\geq(\lambda-1)\|x-y\|^2,$$

T 是随机强单调的. 由推论 3, $T(\omega,x)=\theta$ 在 H 中存在唯一随机解, 即 $A(\omega,x)=\lambda x$ 在 H 中存在唯一随机解.

定理 6 设 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 是完全的概率测度空间, D 是实可分的 Hilbert 空间 H 中的有界开集, $\theta\in D$, $A:\Omega\times H\to H$ 为随机连续弱非扩张算子, 且满足下列条件之一:

(1) $\langle A(\omega,x),x\rangle\leq\|x\|^2$, $\forall\,\omega\in\Omega$ a.e., $\forall\,x\in\partial D$;

(2) $\langle A(\omega,\theta),x\rangle\leq 0$, $\forall\,\omega\in\Omega$ a.e., $\forall\,x\in\partial D$,

则 A 在 D 中必存在随机不动点.

证明 令 $T(\omega,x)=x-A(\omega,x)$, 则 T 是随机连续的. 由 (1.2) 式, $\forall\,\omega\in\Omega$ a.e., $\forall\,x,y\in H$, 有

$$\langle T(\omega,x)-T(\omega,y),x-y\rangle=\|x-y\|^2-\langle A(\omega,x)-A(\omega,y),x-y\rangle\geq 0, \tag{2.12}$$

即 T 是随机单调的. 若条件 (1) 成立, 则有

$$\langle T(\omega,x),x\rangle=\|x\|^2-\langle A(\omega,x),x\rangle\geq 0,\quad \forall\,\omega\in\Omega \text{ a.e.}, \forall\,x\in\partial D.$$

若条件 (2) 成立, 则利用 (2.12) 式, 也有

$$\begin{aligned}\langle T(\omega,x),x\rangle&=\langle T(\omega,x)-T(\omega,\theta),x-\theta\rangle+\langle T(\omega,\theta),x\rangle\\&\geq 0+\langle T(\omega,\theta),x\rangle=-\langle A(\omega,\theta),x\rangle\geq 0,\quad \forall\,\omega\in\Omega \text{ a.e.},\quad \forall\,x\in\partial D.\end{aligned}$$

应用推论 1 可得 $T(\omega,x)=\theta$ 在 D 中存在随机解, 即 A 在 D 中存在随机不动点.

定理 7 设 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 是完全的概率测度空间, H 是实可分的 Hilbert 空间, $A:\Omega\times H\to H$ 是随机连续伪压缩算子. 则 A 在 H 中必存在唯一的随机不动点.

证明 令 $T(\omega,x)=x-A(\omega,x)$, 则 T 是随机连续的, 由 (1.4) 式, 对 $\forall\,\omega\in\Omega$ a.e., $\forall\,x,y\in H$, 有

$$\langle T(\omega,x)-T(\omega,y),x-y\rangle=\|x-y\|^2-\langle A(\omega,x)-A(\omega,y),x-y\rangle\geq\beta(\|x-y\|)\|x-y\|,$$

T 是随机强单调的. 由推论 3, $T(\omega,x)=\theta$ 在 H 中存在唯一随机解, 即 A 在 H中存在唯一不动点.

定理 8 设 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 是完全的概率测度空间, D 是实可分的 Hilbert 空间 H 中的有界开集. $\theta\in D$. 若 $A:\Omega\times H\to H$ 是随机连续伪压缩算子, 且 $\forall\omega\in\Omega$ a.e., $\forall x\in\partial D$, 有 $\langle A(\omega,\theta),x\rangle\le 0$, 则 A 在 D 中必存在唯一的随机不动点.

证明 由于随机伪压缩算子必是随机弱非扩张的, 应用定理 6(2) 得, A 在 D 中存在随机不动点. 令 $T(\omega,x)=x-A(\omega,x)$, 由定理 7 的证明可知, T 是随机强单调的, 从而 A 在 D 中的随机不动点是唯一的.

3 应用: 随机 Hammerstein 积分方程的随机解

作为随机双映射理论的应用, 本节考察随机 Hammerstein 积分方程随机解的存在唯一性.

定理 9 设 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 是完全的概率测度空间, $\omega\in\Omega$, m 为 R^n 的 Lebesgue 测度, $L^2(m)$ 中的随机 Hammerstein 积分方程是

$$\varphi(x)=\int_G k(\omega,x,y)f(y,\varphi(y))dy, \tag{3.1}$$

其中 $G\subset R^n$ 是 Lebesgue 可测集, $0<m(G)\le+\infty$; $f:R^n\times R^1\to R^1$ 是函数; $k:\Omega\times R^n\times R^n\to R^1$ 是非负随机对称核, 即 $\forall\omega\in\Omega$ a.e., $\forall x,y\in R^n$, 有 $k(\omega,x,y)=k(\omega,y,x)\ge 0$. 设 k 满足:

$$(1)\ \int_{G\times G}k(\omega,x,y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy\ge 0,\quad \forall\omega\in\Omega\ \text{ a.e.},\ \forall\varphi\in L^2(m); \tag{3.2}$$

$$(2)\ \text{(本性上确界)}\ \operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega}\left\|\int_G k(\omega,x,y)\varphi(y)dy\right\|_{L^2}<+\infty,\quad \forall\varphi\in L^2(m). \tag{3.3}$$

又设 f 满足:

(3) $\forall u\in R^1, f(\cdot,u)$ 在 G 上 Lebesgue 可测, 且 $f(\cdot,0)\in L^2(m)$;

(4) $f(x,\cdot)$ 是几乎一致 Lipschitz 的, 即存在常数 $L_0>0,\forall x\in R^n$ a.e., $\forall u_1,u_2\in R^1$, 有

$$|f(x,u_1)-f(x,u_2)|\le L_0|u_1-u_2|. \tag{3.4}$$

则存在常数 $L_1>0$, 当 $L_0L_1<1$ 时, 方程 (3.1) 存在唯一的随机解.

证明 由 (3.2) 与 (3.3) 式, 可设 $\Omega_0\subset\Omega, P(\Omega_0)=1$, 有

$$\int_{G\times G}k(\omega,x,y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy\ge 0,\quad \forall\omega\in\Omega_0,\quad \forall\varphi\in L^2(m); \tag{3.5}$$

$$\sup_{\omega\in\Omega_0}\left\|\int_G k(\omega,x,y)\varphi(y)dy\right\|_{L^2}<+\infty,\quad \forall\varphi\in L^2(m). \tag{3.6}$$

取定 $\omega\in\Omega_0$, 令 $K(\omega,\varphi)(x)=\int_G k(\omega,x,y)\varphi(y)dy$, $\forall\varphi\in L^2(m)$. 则 $K_\omega=K(\omega,\cdot)$: $L^2(m)\to L^2(m)$ 是线性算子. 由 k 的非负对称性, $\forall\varphi_1,\varphi_2\in L^2(m)$, 当 $\varphi_1\ge 0$, $\varphi_2\ge 0$, 应用 Fubini 定理得

$$\begin{aligned}\langle K_\omega\varphi_1,\varphi_2\rangle&=\int_G\left[\int_G k(\omega,x,y)\varphi_1(y)dy\right]\varphi_2(x)dx\\&=\int_G\left[\int_G k(\omega,y,x)\varphi_2(x)dx\right]\varphi_1(y)dy=\langle\varphi_1,K_\omega\varphi_2\rangle;\end{aligned}$$

对一般的 $\varphi_i \in L^2(m)$, 记 $\varphi_i^+ = \max(\varphi_i, 0)$, $\varphi_i^- = -\min(\varphi_i, 0)$, $(i = 1, 2)$. 由 K_ω 的线性得

$$\begin{aligned}\langle K_\omega\varphi_1, \varphi_2\rangle &= \langle K_\omega\varphi_1^+ - K_\omega\varphi_1^-, \varphi_2^+ - \varphi_2^-\rangle \\ &= \langle K_\omega\varphi_1^+, \varphi_2^+\rangle - \langle K_\omega\varphi_1^+, \varphi_2^-\rangle - \langle K_\omega\varphi_1^-, \varphi_2^+\rangle + \langle K_\omega\varphi_1^-, \varphi_2^-\rangle \\ &= \langle \varphi_1^+, K_\omega\varphi_2^+\rangle - \langle \varphi_1^+, K_\omega\varphi_2^-\rangle - \langle \varphi_1^-, K_\omega\varphi_2^+\rangle + \langle \varphi_1^-, K_\omega\varphi_2^-\rangle \\ &= \langle \varphi_1^+ - \varphi_1^-, K_\omega\varphi_2^+ - K_\omega\varphi_2^-\rangle = \langle \varphi_1, K_\omega\varphi_2\rangle.\end{aligned}$$

按 (3.5) 式, 因为 $\forall\varphi \in L^2(m)$, 有

$$\langle K(\omega, \varphi), \varphi\rangle = \int_{G\times G} k(\omega, x, y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy \geq 0;$$

又因为 $\forall\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(m)$, 有 $\varphi_1 - \varphi_2 \in L^2(m)$ 且

$$\langle K_\omega\varphi_1 - K_\omega\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2\rangle = \langle K(\omega, \varphi_1 - \varphi_2), \varphi_1 - \varphi_2\rangle \geq 0;$$

故 $K_\omega = K(\omega, \cdot)$ 是实的可分的 Hilbert 空间 $L^2(m)$ 上的正的自共轭算子, 且是随机单调的. 下证 K_ω 是有界 (连续) 线性算子. 否则, 存在 $\{\varphi_n\} \subset L^2(m), \|\varphi_n\|_{L^2} \to 0$ 而 $\|K_\omega\varphi_n\|_{L^2} \to +\infty$. 应用引理 8 得, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\varphi_\varepsilon \in L^2(m)$, $\|\varphi_\varepsilon\|_{L^2} \leq \varepsilon$, $\exists\{\varphi_{n_i}\}$, 使

$$\lim_{i\to\infty} \langle K_\omega\varphi_{n_i}, \varphi_{n_i} - \varphi_\varepsilon\rangle = -\infty. \tag{3.7}$$

记 $\beta = \sup_n \|\varphi_n\|_{L^2}$, 由 K_ω 的单调性得

$$\begin{aligned}\langle K_\omega\varphi_{n_i}, \varphi_{n_i} - \varphi_\varepsilon\rangle &\geq \langle K_\omega\varphi_\varepsilon, \varphi_{n_i} - \varphi_\varepsilon\rangle \geq -\|K(\omega, \varphi_\varepsilon)\|_{L^2}\|\varphi_{n_i} - \varphi_\varepsilon\|_{L^2} \\ &\geq -\|K(\omega, \varphi_\varepsilon)\|_{L^2}(\|\varphi_{n_i}\|_{L^2} + \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2}) \geq -\|K(\omega, \varphi_\varepsilon)\|_{L^2}(\beta + \varepsilon).\end{aligned}$$

这与 (3.7) 式矛盾. 因此 K_ω 是有界 (连续) 的.

因为 Hilbert 空间上每个正的有界线性算子有唯一的正的平方根, 故以下记 K_ω 的正的平方根为 $\sqrt{K_\omega}$, $\sqrt{K_\omega}$ 仍是自共轭的有界线性算子, 且 $\|\sqrt{K_\omega}\|^2 = \|K_\omega\|$.

将方程 (3.1) 写成

$$\varphi = K_\omega F\varphi, \tag{3.8}$$

其中算子 F 由 $(F\varphi)(x) = f(x, \varphi(x))$ 定义. 由条件 (3), (4) 并利用引理 2 得 $f(x, \varphi(x))$, 是 Lebesgue 可测的, 由 (3.4) 式得

$$\begin{aligned}\|F\varphi_1 - F\varphi_2\|_{L^2}^2 &= \int_G |f(x, \varphi_1(x)) - f(x, \varphi_2(x))|^2 dx \\ &\leq L_0^2 \int_G |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|^2 dx = L_0^2\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^2}^2, \quad \forall\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(m).\end{aligned}$$

由 $(F\theta)(x) = f(x, 0) \in L^2(m)$ 得 $\|F\varphi\|_{L^2} \leq L_0\|\varphi\|_{L^2} + \|F\theta\|_{L^2}$, $\forall\varphi \in L^2(m)$. 故 $F: L^2(m) \to L^2(m)$ 是连续有界算子. 考虑方程

$$\varphi = \sqrt{K_\omega}F\sqrt{K_\omega}\varphi. \tag{3.9}$$

易知方程 (3.8) 存在唯一解等价于方程 (3.9) 存在唯一解. 对 $\forall\varphi \in L^2(m)$, 按 (3.6) 式, 有 $\{\|K_\omega\varphi\|_{L^2} \,|\, \omega \in \Omega_0\}$ 有界. 由共鸣定理, $\sup_{\omega\in\Omega_0} \|K_\omega\| < +\infty$. 记 $L_1 = \sup_{\omega\in\Omega_0} \|K_\omega\|$, 记

$T(\omega,\varphi)=\varphi-\sqrt{K_\omega}F\sqrt{K_\omega}\varphi$. 下证 $L_0L_1<1$ 时, 有 $T:\Omega_0\times L^2(m)\to L^2(m)$是强单调的. 事实上

$$\begin{aligned}
&\langle T(\omega,\varphi_1)-T(\omega,\varphi_2),\varphi_1-\varphi_2\rangle\\
&\quad=\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^2}^2-\big\langle\sqrt{K_\omega}F\sqrt{K_\omega}\varphi_1-\sqrt{K_\omega}F\sqrt{K_\omega}\varphi_2,\varphi_1-\varphi_2\big\rangle\\
&\quad=\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^2}^2-\big\langle F\sqrt{K_\omega}\varphi_1-F\sqrt{K_\omega}\varphi_2,\sqrt{K_\omega}\varphi_1-\sqrt{K_\omega}\varphi_2\big\rangle\\
&\quad\geq\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^2}^2-L_0\big\|\sqrt{K_\omega}\varphi_1-\sqrt{K_\omega}\varphi_2\big\|_{L^2}^2\geq\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^2}^2-L_0\big\|\sqrt{K_\omega}\big\|^2\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^2}^2\\
&\quad=(1-L_0\|K_\omega\|)\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^2}^2\geq(1-L_0L_1)\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

因 $1-L_0L_1>0$, 故 T 是随机强单调的. 应用推论 3 得, $T(\omega,\varphi)=\theta$ 在 $L^2(m)$ 中存在唯一随机解. 而方程 $T(\omega,\varphi)=\theta$ 即方程 (3.9), 由方程 (3.9) 与方程 (3.8) 的解之间的关系可知方程 (3.1) 存在唯一随机解.

注 2 在定理 9 中, 对随机对称核 $k(\omega,x,y)$ 未假定 $k(\omega,\cdot,\cdot)\in L^2(G\times G)$, 从而算子 K_ω 未必是紧的, 因此本节的结果不能通过随机紧算子理论而得到.

参 考 文 献

[1] Bharucha-Reid A. T., Random fixed point theorems in probabilistic analysis, *Bull Amer. Math. Soc.*, 1976, **82**(5): 641–657.

[2] Wang Z. K., An introduction to random functional analysis, *Advances in Mathematics*, 1962, **5**(1): 45–71 (in Chinese).

[3] O'Regan D., Shahzad N., Agarwal R., Random fixed point theory in spaces with two metrics, *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, 2003, **16**(2): 171–176.

[4] Zhang S. S., Fixed point theory and application, Chongqing: Chongqing Press, 1984 (in Chinese).

[5] Chang S. S., Some random fixed point theorems for continuous random operators, *Pacific J. Math.*, 1983, **105**(1): 21–31.

[6] Ding X. P., Solutions for a system of random operator equations and some applications, *Science in China, Ser A*, 1987, **30**(8): 785–795.

[7] Li G. Z., The fixed point index and the fixed point theorems of 1-Set-Contractive mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1988, **104**(4): 1163–1170.

[8] Li G. Z., The existence theorems of the random solutions for random Hammerstein equation with random kernel, *Applied Mathematics Letters*, 2002, **15**(1): 121–125.

[9] Li G. Z., On random fixed point index and some random fixed point theorems of random 1-set-constraction operator, *Acta Math. Appl. Sinica*, 1996, **19**(2): 203–212 (in Chinese).

[10] Engl H. W., Some random fixed point theorems for strict contractions and nonexpansive mappings, *Nonlinear Analysis*, 1978, **2**(5): 619–626.

[11] Itoh S., A random fixed point theorem for a multivalued contraction mapping, *Pacific J. Math.*, 1977, **68**(1): 85–90.

[12] Itoh S., Random fixed point theorems with an application to random differential equations in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 1979, **67**: 261–273.

[13] Beg I., Shahzad N., On random approximation and coincidence point theorems for multivalued operators, *Nonlinear Anal.*, 1996, **26**(6): 1035–1041.

[14] Shahzad N., Latif S., Random fixed point for several classes of 1-ball-contractive and 1-set-contractive random maps, *J. Math. Anal. Appl.*, 1999, **237**: 83–92.

[15] Zhu C. X., Several theorems of random semiclosed 1-set-contractive operator, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 1999, **42**(3): 501–504.

[16] Zhu C. X., Xu Z. B., A class of random operator equations in the Hilbert space, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2004, **47**(4): 641–646.

[17] Li Z. L., Li G. Z., Topological degree for random multivalued *A*-proper mappings, *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2004, **21**(4): 635–638 (in Chinese).

[18] Guo D. J., Nonlinear functional analysis. Jinan: Shandong Scientific and Technical Publishers, 1995 (in Chinese).

[19] Li L., Wu C. X., Set-valued analysis, Beijing: Seience Press, 2003 (in Chinese).

[20] Rudin W., Real and complex analysis (third edition), Beijing: China Machine Press and McGraw-Hill Companies, 2004.