

# 周期变速旋转运动电流变夹层梁的参激振动<sup>1)</sup>

魏克湘<sup>\*,†,2)</sup> 孟光<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup>(上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室, 上海 200240)

<sup>†</sup>(湖南工程学院机械系, 湘潭 411101)

**摘要** 采用多尺度法对周期变速旋转运动电流变夹层梁的动力稳定性进行了研究. 假设电流变夹层梁绕固定轴线做随时间变化的简谐周期运动, 将变速度转动梁作为一个时变参激振动系统, 分析了不同结构和控制参数对失稳区域的影响. 仿真结果表明, 改变外加控制电场强度的大小和梁的结构参数, 可改变旋转电流变夹层梁发生动力失稳的临界角速度和失稳区域. 故在一定的条件下, 可以通过控制作用于电流变夹层梁的电场强度来调节旋转运动柔性梁的振动特性, 提高结构的动力稳定性.

**关键词** 参激共振, 电流变夹层结构, 旋转运动柔性梁, 变速运动, 动力稳定性

中图分类号: O322 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2008)02-0273-08

## 引 言

旋转运动柔性梁作为操作机械臂、直升机旋翼、涡轮机叶片等的简化模型, 具有广泛的工程应用背景. 在过去的几十年中, 已发表了许多关于定轴转动柔性梁动力学建模及其振动特性的研究成果<sup>[1,2]</sup>. 但大多数文献都只研究了定常速度对梁的振动特性的影响, 而没有考虑到变速情况下梁的动力学特性. 对于机械臂等作变速运动的旋转柔性梁, 由于转动速度变化的影响, 梁的振动特性会出现更为复杂的动态特性. 在某些运动参数下, 系统有可能发生运动失稳现象. 因此, 变速旋转运动柔性梁的振动稳定性问题近年来得到了越来越多学者的关注. Abbas<sup>[3]</sup> 研究了固定于柔性基础上的旋转运动柔性梁的动力学特性, 采用有限元法分析了旋转速度和柔性基础对运动柔性梁的静态屈曲载荷和振动失稳区域的影响. Young 与 Lin<sup>[4]</sup> 对随机变速旋转运动梁的参激振动问题进行了探讨. Sinha<sup>[5]</sup> 等讨论了旋转运动柔性梁在具有不同阻尼系数和运动边界条件时, 系统的动力稳定性和控制问题. 盛国刚<sup>[6]</sup> 等基于 Hamilton 原理建立了变速旋转运动梁的振动控制方程, 并利用系统的相轨迹图对变角速度情况下旋转梁的运动稳定性进行了分析. Chung<sup>[7]</sup> 等运用多尺度法对做周期简谐定轴摆动悬臂梁在不同摆动频率和摆动速度

时的动力稳定性进行了研究. 而 Turhan 与 Bulut<sup>[8]</sup> 研究了带中心刚体的旋转运动柔性梁在周期变速运动情况下的振动特性, 对各种运动参数下系统的动态稳定性进行了数值仿真. 然而, 上述研究大多集中于 Euler 梁或 Bernoulli 梁, 而对其他材料结构梁的分析还较少涉及.

电流变夹层结构由于能在外加电场的作用下, 快速可逆地调节自身的阻尼和刚度, 在结构的振动控制中有着广泛的潜在应用前景. 在先前的研究中, 我们对电流变材料应用于旋转运动柔性梁振动控制的可行性进行了探讨<sup>[9,10]</sup>. 本文将对电流变夹层梁在周期变速旋转运动条件下的振动特性进行研究. 假设电流变夹层梁绕固定轴线作随时间变化的简谐周期运动, 将运动梁作为一个时变参激振动系统, 采用多尺度法对系统在不同结构参数和运动边界条件下的动力稳定性进行分析.

## 1 旋转运动电流变夹层梁的控制方程

对如图 1 所示由中心刚体和电流变夹层梁组成的定轴转动电流变夹层结构运动梁系统, 设电流变夹层梁的一端以固支方式固定于中心刚体上, 并随中心刚体在水平面内绕  $O$  点作定轴旋转运动. 中心刚体的半径为  $r$ , 旋转运动的角速度为  $\dot{\theta}$ .

由文献 [11] 可得非惯性系下定轴转动电流变夹

2007-05-24 收到第 1 稿, 2007-10-08 收到修改稿.

1) 中国博士后科学基金(20070410730), 机械系统与振动国家重点实验室开放基金(VSN-2007-01)和湖南省教育厅(07B012)资助项目.

2) E-mail: wei\_kx@163.com

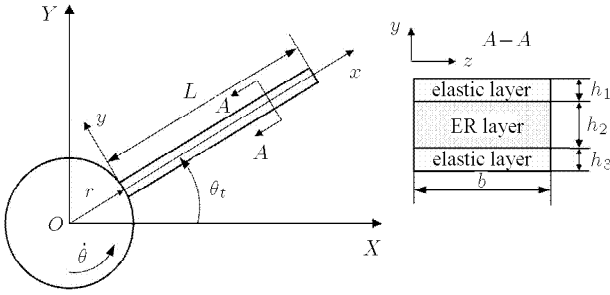


图 1 旋转运动电流变夹层梁结构的示意图

Fig.1 The rotating sandwich beam embedded with ER fluids

层梁的有限元动力学方程为

$$M\ddot{q} + 2\dot{\theta}C\dot{q} + [K_1 + U_2 + \dot{\theta}^2(U_3 - M) - \dot{\theta}C]q = \dot{\theta}^2U_1^T - \ddot{\theta}U_2^T + F_q \quad (1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^n B_i^T \int_0^{L_i} \sum_{k=1}^3 [\rho_k A_k (N_k^T N_k + N_4^T N_4)] dx B_i \\ C &= \sum_{i=1}^n B_i \left( \int_0^{L_i} \sum_{k=1}^3 \rho_k A_k N_k^T N_4 dx \right)^T B_i^T - \sum_{i=1}^n B_i^T \int_0^{L_i} \sum_{k=1}^3 \rho_k A_k N_k^T N_4 dx B_i \\ K &= \sum_{i=1}^n B_i^T \int_0^{L_i} \sum_{k=1}^3 (E_k A_k N_{k,x}^T N_{k,x} + E_k I_k N_{4,xx}^T N_{4,xx}) dx B_i \\ U_1 &= \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \sum_{k=1}^3 [\rho_k A_k (r + x_i + x) N_k] dx B_i \\ U_2 &= \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \left( \sum_{k=1}^3 \rho_k A_k \right) (r + x_i + x) N_4 dx B_i \\ U_3 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n B_i^T \int_0^{L_i} \left( \sum_{k=1}^3 \rho_k A_k \right) [L^2 - (x_i + x)^2] \cdot N_{4,x}^T N_{4,x} dx B_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n B_i^T r \int_0^{L_i} \left( \sum_{k=1}^3 \rho_k A_k \right) \cdot [L - (x_i + x)] N_{4,x}^T N_{4,x} dx B_i \\ U_4 &= \sum_{i=1}^n B_i^T \int_0^{L_i} \frac{G_2(1 + i\eta_2)b}{h_2} \cdot (N_1 - N_3 + hN_{4,x})^T \cdot (N_1 - N_3 + hN_{4,x}) dx B_i \\ F_q &= \sum_{i=1}^n F_{qi} B_i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

上列各式中,  $\rho_k, A_k, E_k, I_k (k = 1, 2, 3)$  分别为夹层梁中各层的材料密度、横截面积、弹性模量和转动惯量;  $G_2$  为电流变材料的储能模量,  $\eta_2$  为电流变材料的损耗因子;  $L$  为梁的长度,  $n$  为有限元单元个数,  $L_i = L/n$  为单元长度,  $r$  为中心刚体的半径,  $x_i$  代表梁的固定点到第  $i$  个单元左边节点的距离;  $\zeta = x/L_i$ , 下标  $(,x)$  表示对  $x$  求导;  $N_1, N_2, N_3$  和  $N_4$  为对应单元节点位移的形函数矩阵, 且

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= [1 - \zeta \ 0 \ 0 \ 0 \ \zeta \ 0 \ 0 \ 0] \\ N_2 &= \frac{1}{2} \left( N_1 + N_3 + \frac{h_1 - h_3}{2} N_{4,x} \right) \\ N_3 &= [0 \ 1 - \zeta \ 0 \ 0 \ 0 \ \zeta \ 0 \ 0] \\ N_4 &= [0 \ 0 \ 1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3 \ (\zeta - 2\zeta^2 + \zeta^3)L_i \\ &\quad 0 \ 0 \ 3\zeta^2 - 2\zeta^3 \ (-\zeta^2 + \zeta^3)L_i] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$B_i$  为山梁单元编号决定的布尔 (Boole) 指示矩阵

$$\left. \begin{aligned} No. \quad &1 \ 2 \ \dots \ m \ \dots \ k \ \dots \ n + 1 \\ B_i &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & I_{5 \times 5} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & I_{5 \times 5} & \dots & 0 \end{bmatrix}_{10 \times 5(n+1)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

假设电流变夹层梁绕固定轴线作正弦周期往复摆动, 运动速度为

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 \sin \tilde{\omega} t \quad (5)$$

式中  $\dot{\theta}_0$  为转动梁的最大角速度,  $\tilde{\omega}$  为往复摆动的频率。

将式 (5) 代入式 (1), 得到周期变速摆动电流变夹层结构梁在无外激励时的动力学方程

$$M\ddot{q} + 2\dot{\theta}_0 \sin \tilde{\omega} t C \dot{q} + [K + U_4 + (\dot{\theta}_0 \sin \tilde{\omega} t)(U_3 - M) - \dot{\theta}_0 \tilde{\omega} \cos \tilde{\omega} t C]q = (\dot{\theta}_0 \sin \tilde{\omega} t)U_1^T - \dot{\theta}_0 \tilde{\omega} \cos \tilde{\omega} t U_2^T \quad (6)$$

设  $\Phi$  为上式所对应的齐次线性方程的正则振型矩阵, 引入线性变换  $\xi = \Phi q$ , 则式 (6) 可转化为有关变量  $\xi$  的形式

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \Lambda \xi &= -2\dot{\theta}_0 H_1 \sin \tilde{\omega} t \dot{\xi} + \dot{\theta}_0 \tilde{\omega} H_1 \cos \tilde{\omega} t \xi - \\ &\quad \dot{\theta}_0^2 H_2 \sin^2 \tilde{\omega} t \xi + \dot{\theta}_0^2 H_3 \sin^2 \tilde{\omega} t - \\ &\quad \dot{\theta}_0 \tilde{\omega} H_4 \cos \tilde{\omega} t \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \omega_i^2 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}, \quad \omega_i = \omega_{i,R} + i\omega_{i,I} \\ \mathbf{H}_1 &= 2\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi}, \quad \mathbf{H}_2 = \boldsymbol{\Phi}^T (\mathbf{U}_3 - \mathbf{M}) \boldsymbol{\Phi} \\ \mathbf{H}_3 &= \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{U}_1^T, \quad \mathbf{H}_4 = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{U}_2^T \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中  $\mathbf{A}$  是对应齐次线性方程的谱矩阵； $\omega_i$  为系统的复频率，可以通过求对应齐次线性方程的特征值得到。

## 2 多尺度法

由式 (7) 可知，周期变速摆动电流变夹层梁的动力学方程是一个参激振动系统。当系统参数的组合达到某一临界值时，运动梁就会出现发散失稳现象<sup>[12]</sup>。本节采用多尺度法来分析周期变速摆动电流变夹层梁的动力稳定性问题。

设电流变夹层梁的最大转动速度可表达为某一小量  $\varepsilon < 1$  的函数

$$\dot{\theta}_0 = \varepsilon \kappa \quad (9)$$

对式 (7) 直接应用多尺度法，将解展开为

$$\left. \begin{aligned} \xi_i(t, \varepsilon) &= \xi_{i0}(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon \xi_{i1}(T_0, T_1, \dots) + \dots \\ i &= 1, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中  $\xi_{i0}$ ,  $\xi_{i1}$  分别表示快尺度与慢尺度的位移函数； $T_0 = t$  为快时间尺度； $T_1 = \varepsilon t$  为慢时间尺度。

把式 (10) 及 (9) 代入式 (7)，比较  $\varepsilon$  的同次幂得到

$$\varepsilon^0: D_0^2 \xi_{i0} + \omega_i^2 \xi_{i0} = 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: D_0^2 \xi_{i1} + \omega_i^2 \xi_{i1} &= \\ &-2D_0 D_1 \xi_{i0} - 2\kappa \sin \tilde{\omega} t \sum_{k=1}^n h_{1ik} D_0 \xi_{k0} + \\ &\kappa \tilde{\omega} \cos \tilde{\omega} t \sum_{k=1}^n h_{1ik} \xi_{k0} - \kappa \tilde{\omega} \cos \tilde{\omega} t h_{4i} \end{aligned} \quad (12)$$

式中  $D_n = \partial/\partial T_n (n = 0, 1)$ ； $h_{1ik}$  为矩阵  $\mathbf{H}_1$  中的第  $i$  行、第  $k$  列单元项， $h_{4i}$  为矩阵  $\mathbf{H}_4$  中的第  $i$  行单元项。采用一阶近似，式 (11) 的通解可以表示为

$$\xi_{i0} = A_i(T_1, T_2) e^{i\omega_i T_0} + \text{cc} \quad (13)$$

其中 cc 代表前面所有项的复数共轭 (下同)， $A_i(T_1, T_2)$  为慢时间尺度的复函数。将式 (13) 的解代入方程 (12)，得到

$$\begin{aligned} D_0^2 \xi_{i1} + \omega_i^2 \xi_{i1} &= \\ &-2i\omega_i D_1 A_i e^{i\omega_i T_0} + 2i\omega_i D_1 \bar{A}_i e^{-i\omega_i T_0} - \\ &\kappa \sum_{k=1}^n h_{1ik} \left\{ \omega_k [A_k (e^{i(\tilde{\omega} + \omega_k) T_0} - e^{-i(\tilde{\omega} - \omega_k) T_0}) + \right. \\ &\bar{A}_k (e^{i(\tilde{\omega} - \omega_k) T_0} - e^{-i(\tilde{\omega} + \omega_k) T_0})] - \\ &\left. \frac{1}{2} \tilde{\omega} [A_k (e^{i(\tilde{\omega} + \omega_k) T_0} + e^{-i(\tilde{\omega} - \omega_k) T_0}) - \right. \\ &\bar{A}_k (e^{-i(\tilde{\omega} + \omega_k) T_0} + e^{i(\tilde{\omega} - \omega_k) T_0})] \} - \\ &\left. \frac{1}{2} \kappa \tilde{\omega} (e^{i\tilde{\omega} T_0} + e^{-i\tilde{\omega} T_0}) b_{4i} \right. \end{aligned} \quad (14)$$

上式可理解为周期激励下的无阻尼系统。为了满足  $\xi_{i1}$  有界的条件，要求式中不出现永年项，即式 (14) 的右边不能含有  $e^{i\omega_i T_0}$  或  $e^{-i\omega_i T_0}$  这样的项。

由文献 [9] 已知，电流变夹层梁的固有频率等于系统复特征值的实部，故设梁的第  $p$  阶固有频率为  $\omega_{p,R}$ 。下面分几种情况来讨论消除永年项的问题。

(1)  $\tilde{\omega}$  远离  $\omega_{p,R} \pm \omega_{q,R}$

当激励频率  $\tilde{\omega}$  远离  $\omega_{p,R} \pm \omega_{q,R}$  时，这种情况属于非共振。消除式 (14) 中永年项的条件是

$$D_1 A_i = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (15)$$

此时方程 (14) 的解为

$$\begin{aligned} \xi_{i1} &= \kappa \sum_{k=1}^n h_{1ik} A_k \left\{ \omega_k \left[ \frac{e^{i(\tilde{\omega} + \omega_k) T_0}}{(\tilde{\omega} + \omega_k)^2 - \omega_i^2} - \right. \right. \\ &\left. \frac{e^{-i(\tilde{\omega} - \omega_k) T_0}}{(\tilde{\omega} - \omega_k)^2 - \omega_i^2} \right] - \frac{1}{2} \tilde{\omega} \left[ \frac{e^{i(\tilde{\omega} + \omega_k) T_0}}{(\tilde{\omega} + \omega_k)^2 - \omega_i^2} + \right. \\ &\left. \left. \frac{e^{-i(\tilde{\omega} - \omega_k) T_0}}{(\tilde{\omega} - \omega_k)^2 - \omega_i^2} \right] \right\} + \text{cc} \end{aligned} \quad (16)$$

系统做有界振动。

(2) 加法型参激组合共振

当激励频率  $\tilde{\omega}$  在第  $p$  阶与第  $q$  阶固有频率之和附近变化时，这种情况属于加法型参激组合共振。

引入调谐参数

$$\tilde{\omega} = \omega_{p,R} + \omega_{q,R} + \varepsilon \sigma \quad (17)$$

则有

$$\left. \begin{aligned} (\tilde{\omega} - \omega_{p,R}) T_0 &= \omega_{q,R} T_0 + \sigma T_1 \\ (\tilde{\omega} - \omega_{q,R}) T_0 &= \omega_{p,R} T_0 + \sigma T_1 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

把式 (18) 代入式 (14), 得到消除式 (14) 中永年项的条件

$$\left. \begin{aligned} 2i\omega_p D_1 A_p + \frac{1}{2} \kappa \bar{A}_q h_{1pq} (\omega_q + \omega_{q,R} + \omega_{p,R}) e^{i\sigma T_0} = 0 \\ 2i\omega_q D_1 \bar{A}_q + \frac{1}{2} \kappa A_p h_{1qp} (\omega_p + \omega_{q,R} + \omega_{p,R}) e^{-i\sigma T_0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中  $\bar{A}_p, \bar{A}_q$  分别为  $A_p$  及  $A_q$  的复数共轭。  
设

$$h_{ij}^* = h_{1ij} (\omega_j + \omega_{j,R} + \omega_{i,R}), \quad i \neq j, \quad i, j = p, q \quad (20)$$

根据式 (19) 有不稳定解的条件, 可以得到系统在加法型参激组合共振时失稳区域的边界曲线方程<sup>[13,15]</sup>

$$\tilde{\omega} = \omega_{p,R} + \omega_{q,R} \pm \frac{(\omega_{p,I} + \omega_{q,I})}{4(\omega_{p,I}\omega_{q,I})^{1/2}} \cdot \left[ \frac{(\varepsilon\kappa)^2 (h_{pq,R}^* h_{qp,R}^* + h_{pq,I}^* h_{qp,I}^*)}{\omega_{p,R}\omega_{q,R}} - 16\omega_{p,I}\omega_{q,I} \right]^{1/2} \quad (21)$$

式中  $\omega_{p,R}, \omega_{q,I}$  分别为系统复特征值的实部和虚部,  $h_{ij,R}^*, h_{ij,I}^*$  分别表示  $h_{ij}^*$  的实部和虚部. 当  $p = q$  时, 式 (21) 简化为  $n$  阶谐波共振失稳的临界条件

$$\tilde{\omega} = 2\omega_{p,R} \pm \frac{1}{2} \left[ \frac{(\varepsilon\kappa)^2 [(h_{pp,R}^*)^2 + (h_{pp,I}^*)^2]}{(\omega_{p,R})^2} - 16(\omega_{p,I})^2 \right]^{1/2} \quad (22)$$

(3) 减法型参激组合共振

当激励频率  $\tilde{\omega}$  在第  $p$  阶与第  $q$  阶固有频率之差附近变化时, 这种情况称为减法型参激组合共振, 其失稳边界条件可从上一情形的结果中改变  $\omega_i$  的符号得到. 其对应稳定和失稳区域的边界曲线为

$$\tilde{\omega} = \omega_{p,R} - \omega_{q,R} \pm \frac{(\omega_{p,I} + \omega_{q,I})}{4(\omega_{p,I}\omega_{q,I})^{1/2}} \cdot \left[ \frac{(\varepsilon\kappa)^2 (h_{pq,R}^* h_{qp,R}^* - h_{pq,I}^* h_{qp,I}^*)}{\omega_{p,R}\omega_{q,R}} - 16\omega_{p,I}\omega_{q,I} \right]^{1/2} \quad (23)$$

3 数值仿真

为了验证本文计算方法的可靠性, 我们先假设电流变夹层梁的转动角速度  $\dot{\theta} = 0$ , 将其作为静态悬臂梁考虑. 采用文献 [14] 中梁的结构和材料参数分别计算电流变夹层梁在电场强度  $E = 3.5 \text{ kV/mm}$  时的前 5 阶固有频率和模态损耗因子, 计算结果如表 1 所示. 从表中可以看到, 虽然本文中方法所得的各阶固有频率都略高于文献 [14] 中基于 Mead-Markus 建模方法得到的悬臂梁情形的计算结果, 但相差很小. 同时两种方法计算得到的损耗因子也基本一致.

此外, 我们选用文献 [15] 中主动约束阻尼层旋转运动梁的几何和材料参数, 计算其在不同旋转速度时的前两阶固有频率和模态阻尼比 (表 2), 比较发现本文方法所得的结果与文献 [15] 中所得的结果也几乎相同.

表 1 本文计算得到的固有频率和损耗因子与文献 [14] 中的结果比较

( $L = 381 \text{ mm}, b = 25.4 \text{ mm}, h_1 = h_3 = 0.79 \text{ mm}, h_2 = 0.5 \text{ mm}, E = 3.5 \text{ kV/mm}, G_2^* = 612\,500(1 + 0.011i)$ )

Table 1 Comparison of natural frequencies and loss factors obtained herein with those of Ref.[14]

Mode	Natural frequency $f/\text{Hz}$		Loss factor $\eta$	
	Present	Ref.[14]	Present	Ref.[14]
1	10.011	10.005	0.003 93	0.003 95
2	40.091	40.051	0.005 07	0.005 12
3	89.125	89.028	0.004 59	0.004 61
4	152.926	152.702	0.003 36	0.003 39
5	236.396	235.761	0.002 44	0.002 50

表 2 本文计算得到的旋转运动梁固有频率和模态阻尼比 ( $\eta^* = \eta/2$ ) 与文献 [15] 中的结果比较

( $L = 300 \text{ mm}, b = 12.7 \text{ mm}, h_1 = 0.762 \text{ mm}, h_3 = 2.286 \text{ mm}, h_2 = 0.25 \text{ mm}, G_2^* = 261\,500(1 + 0.38i)$ )

Table 2 Comparison of a rotating beam for natural frequencies and modal damping ratio obtained herein with those of Ref.[15]

Angular velocity $\dot{\theta}/\text{rpm}$		Natural frequency		Modal damping ratio	
		$f_1/\text{Hz}$	$f_2/\text{Hz}$	$\eta_1^*$	$\eta_2^*$
0	Ref.[15]	20.15	104.0	0.038 2	0.023 5
	present	20.14	103.9	0.038 4	0.023 3
600	Ref.[15]	20.58	106.8	0.036 5	0.022 0
	present	20.53	106.6	0.036 6	0.022 2
1 000	Ref.[15]	21.20	111.2	0.034 0	0.020 1
	present	21.17	111.1	0.034 0	0.020 4

设旋转运动电流变夹层梁的基本几何和材料参数如表 3. 由前面系统发生动力失稳的边界条件可以得到周期变速运动电流变夹层梁在不同结构和运动参数下的动力失稳区域.

表 3 电流变夹层梁的几何尺寸与材料参数

Table 3 Parameters of ER sandwich beam

Parameters of Beam geometry	$L = 300 \text{ mm}, b = 20 \text{ mm},$ $h_1 = h_3 = 0.5 \text{ mm}, h_2 = 2 \text{ mm}$
Elastic layer properties (Al)	$\rho_1 = \rho_3 = 2\,800 \text{ kg/m}^3,$ $E_1 = E_3 = 70 \text{ GPa}$
ER fluids properties	$\rho_2 = 1\,400 \text{ kg/m}^3,$ $m_g = 1\,500 \text{ Pa}\cdot\text{mm/kV}, b_g = 0,$ $m_e = 270 \text{ mPa}\cdot\text{s}\cdot\text{mm/kV},$ $b_e = 3.73 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

图 2 为外加控制电场对动力失稳区域的影响。其中图 2(a) 和图 2(b) 分别为第 1 阶与第 2 阶主参激共振时的稳定与失稳区域的边界曲线，图 2(c)，图 2(d) 分别为前两阶加法型与减法型参激组合共振时的失稳边界。从图中可以看到，随着外加电场强度的增大，各种参激共振条件下的临界激励频率和整个失稳区域都向高频段移动，这主要是由于加大外

加电场强度使梁的刚度增加，导致系统的各阶固有频率增大<sup>[9]</sup>。同时，电场强度的增大还使临界激励系数(发生运动失稳的最小激励系数) $\epsilon_{cr}$  提高(即使系统进入动力失稳区域的临界最大转动角速度 $\dot{\theta}_0$  增大)，失稳区域变小。故周期变速运动电流变夹层梁在外加电场的控制下，能改变结构的参激振动特性，增强结构的动力稳定性。

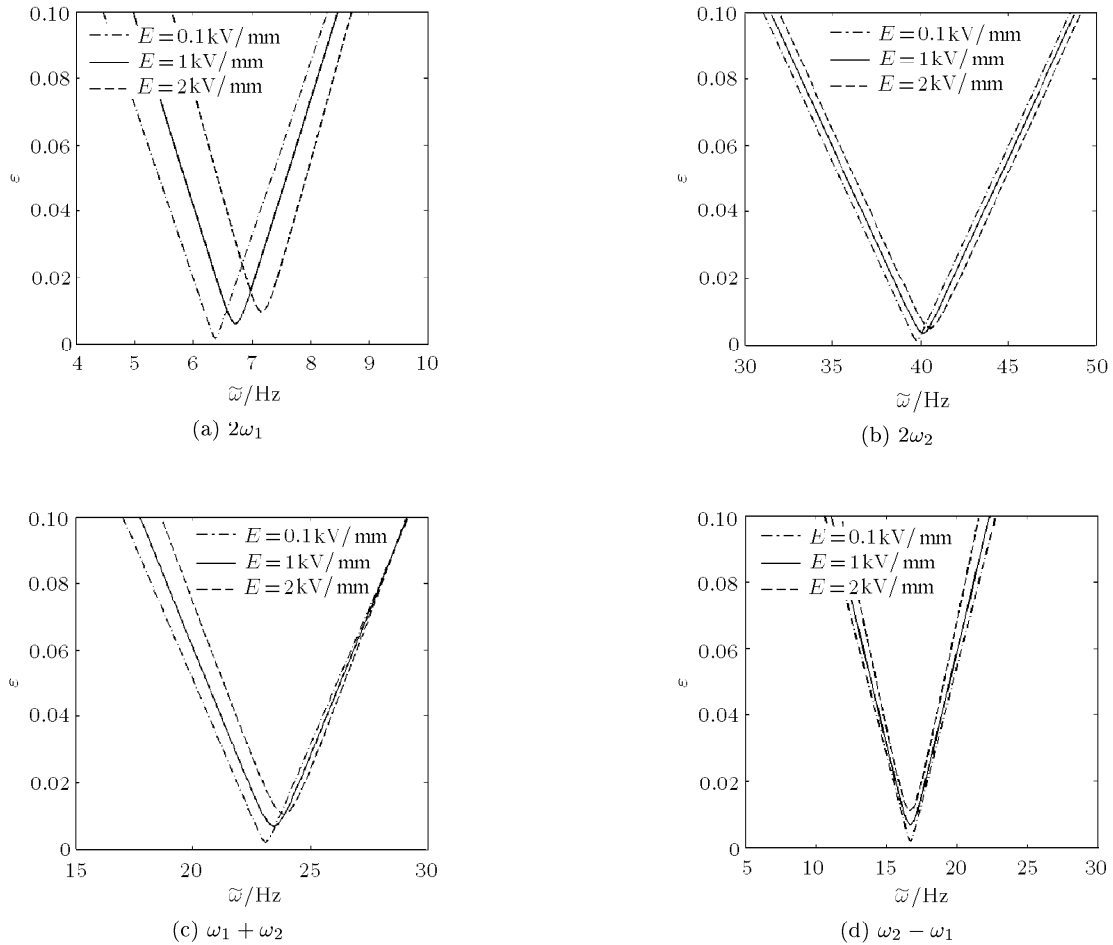


图 2 不同外加电场强度时梁的失稳边界： $h_1 = h_3 = 0.5 \text{ mm}$ ,  $h_2/h_3 = 4$

Fig.2 Instability boundaries for various applied electric fields

电流变材料芯层与表面弹性约束层的不同厚度比对失稳区域的影响见图 3。随着电流变材料层厚度的增加，梁的固有频率降低，故临界激励频率减小，失稳区域向低频段移动。由于电流变材料层厚度的增加将提高结构的阻尼效应，故大的厚度比也可提高临界激励系数  $\epsilon_{cr}$ ，但对失稳区域范围的影响却较为复杂。从图 3 得知，对第 1 阶主参激共振和第 1 阶与第 2 阶组合参激共振，失稳区域随厚度比的增加先有小量的增大，随后再减小。而第 2 阶主参激

共振的失稳区域却一直增大，稳定性变差。

图 4 是梁的长度变化对系统失稳区域的影响。由图可知，增加梁的长度，失稳区域大幅向低频段移动，同时临界激励系数  $\epsilon_{cr}$  下降，失稳区域变大，表明系统的运动稳定性变差。这主要是由于梁的刚度会随着梁长度的增加而降低，其固有频率变小。故当其他参数不变时，长度长的梁比短的梁在参激共振下更容易发生动力失稳现象。

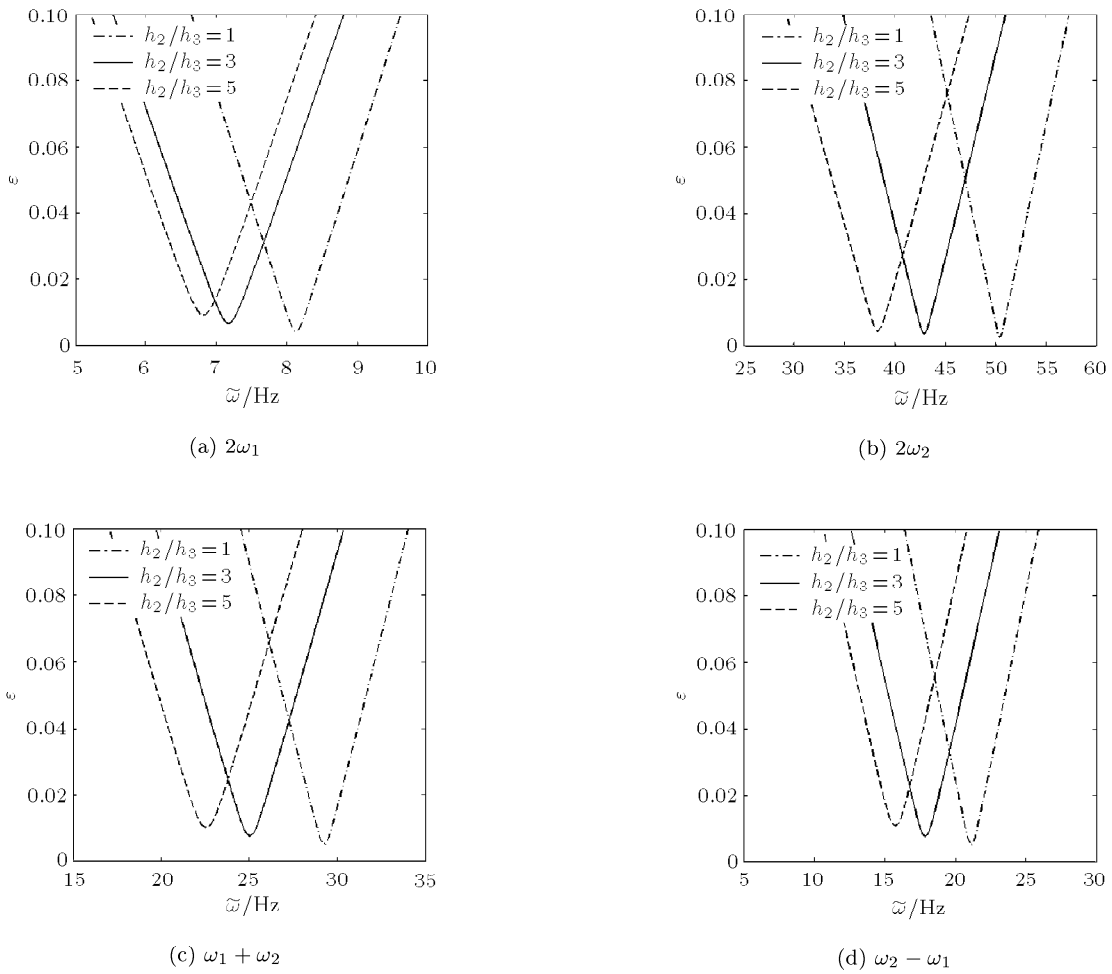


图 3 不同厚度比  $h_2/h_3$  时梁的失稳边界:  $E = 2 \text{ kV/mm}$ ,  $h_1 = h_3 = 0.5 \text{ mm}$

Fig.3 Instability boundaries for various thickness ratios  $h_2/h_3$

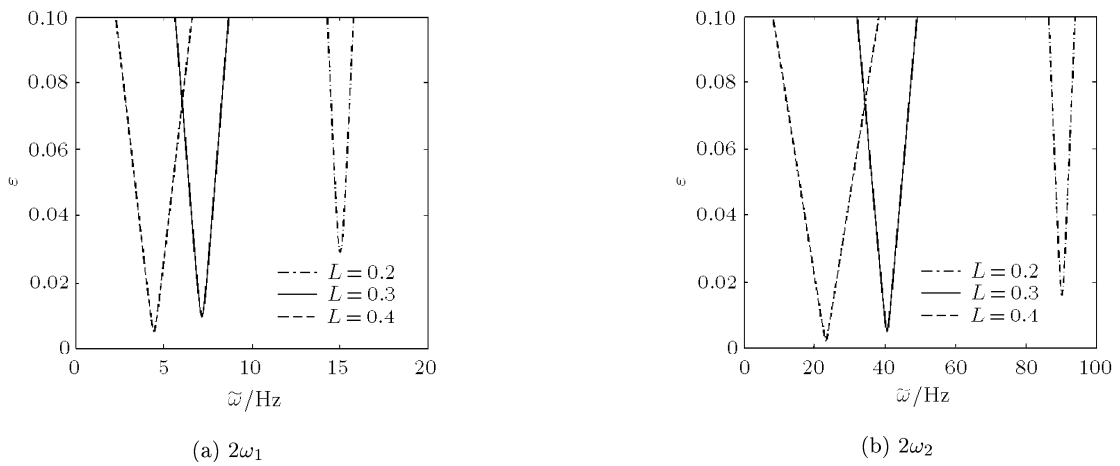
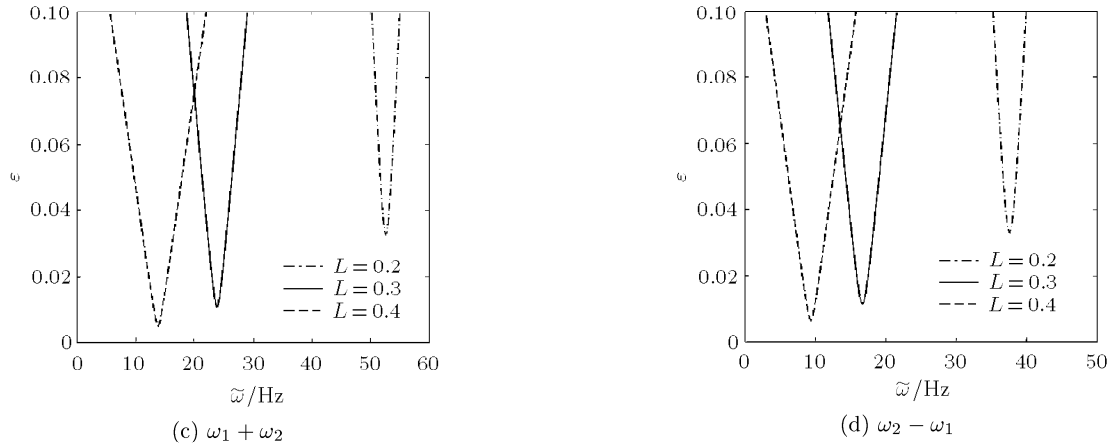


图 4 梁的长度对失稳边界的影响:  $E = 2 \text{ kV/mm}$ ,  $h_1 = h_3 = 0.5 \text{ mm}$

Fig.4 Instability boundaries for various thickness ratios  $h_2/h_3$

图 4 梁的长度对失稳边界的影响:  $E = 2 \text{ kV/mm}$ ,  $h_1 = h_3 = 0.5 \text{ mm}$  (续)Fig.4 Instability boundaries for various thickness ratios  $h_2/h_3$  (continued)

#### 4 结 论

本文采用多尺度法对作正弦往复摆动电流变夹层梁的动力稳定性进行了研究. 分析了不同控制电场强度、电流变材料芯层厚度和梁的长度对失稳区域的影响. 仿真结果显示, 增大外加电场强度在使系统的失稳区域向高频段移动及失稳区域变小的同时, 还可提高结构发生动力失稳的临界激励系数. 换言之, 就是可以提高发生动力失稳时的临界最大角速度; 电流变材料层厚度的增加将导致临界激励频率减小, 失稳区域向低频段移动, 同时也可使转动梁的临界最大角速度提高; 而梁长度的增加将使系统的动力稳定性变差. 故在一定的条件下, 可以通过控制作用于电流变夹层结构运动梁上的电场强度来调节梁的振动特性, 提高系统的动力稳定性.

#### 参 考 文 献

- 肖世富, 陈滨. 一类刚-柔耦合系统的建模与稳定性研究. 力学学报, 1997, 29(4): 439~447 (Xiao Shifu, Chen Bin. Modelling and stability investigation of a rigid-flexible coupling system. *Acta Mechanica Sinica*, 1997, 29(4): 439~447 (in Chinese))
- 蔡国平, 洪嘉振. 旋转运动柔性梁的假设模态方法研究. 力学学报, 2005, 37(1): 48~56 (Cai Guoping, Hong Jiazhen. Assumed mode method of a rotating flexible beam. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, 37(1): 48~56 (in Chinese))
- Abbas BAH. Dynamic stability of a rotating timoshenko beam with a flexible root. *Journal of Sound and Vibration*, 1986, 108(1): 25~32
- Young TH, Lin TM. Stability of rotating pretwisted, tapered beams with randomly varying speeds. *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, 1998, 120(3): 784~790
- Sinha SC, Marghitu Dan B, Boghiu Dan. Stability and control of a parametrically excited rotating beam. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, 1998, 120(4): 462~468
- 盛国刚, 彭献, 赵冰. 变速旋转梁的建模与运动稳定性分析. 湖南大学学报, 2003, 30(2): 16~19 (Sheng Guogang, Peng Xian, Zhao Bing. Vibration of rotating beam with varying angular velocity and subjected to base excitation. *Journal of Hunan University*, 2003, 30(2): 16~19 (in Chinese))
- Chung J, Jung D, Yoo HH. Stability analysis for the flapwise motion of a cantilever beam with rotary oscillation. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 273(4-5): 1047~1062
- Turhan O, Bulut G. Dynamic stability of rotating blades (beams) eccentrically clamped to a shaft with fluctuating speed. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 280(3-5): 945~964
- 魏克湘, 孟光, 鲁宏权. 旋转电流变复合梁的有限元建模分析. 振动与冲击, 2005, 24(5): 1~3 (Wei Kexiang, Meng Guang, Lu Hongquan. Modelling and dynamic analysis of a rotating electrorheological composite beam by using finite element method. *Journal of Vibration and Shock*, 2005, 24(5): 1~3 (in Chinese))
- Wei KX, Meng G, Zhou S. Vibration control of variable speed/acceleration rotating beams using smart materials. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 298 (4-5): 1150~1158
- 魏克湘. 大范围运动电流变夹层梁的动力学特性与振动控制. [博士论文]. 上海: 上海交通大学, 2006 (Wei Kexiang. Dynamic characteristics and vibration control of sandwich beams filled with electrorheological fluids undergoing a large overall motion. [Ph D Thesis]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2006 (in Chinese))
- 胡海岩. 应用非线性动力学. 北京: 航空工业出版社, 2000 (Hu Haiyan. Applied Nonlinear Dynamics. Beijing: Aviation Industry Press, 2000 (in Chinese))
- Saito H, Otomi K. Parametric response of viscoelastically

- supported beams. *Journal of Sound and Vibration*, 1979, 63(2): 169~178
- 14 Yalcintas M, Coulter JP. Electrorheological material based adaptive beams subjected to various boundary conditions. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1995, 6(5): 700~717
- 15 Lin CY, Chen LW. Dynamic stability of a rotating beam with a constrained damping layer. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 267(2): 209~225

## PARAMETRIC VIBRATION OF A ROTATING ER SANDWICH BEAM WITH PERIODICALLY VARYING VELOCITY<sup>1)</sup>

Wei Kexiang<sup>\*,†,2)</sup> Meng Guang<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup>(State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

<sup>†</sup>(Department of Mechanical Engineering, Hunan Institute of Engineering, Xiangtan 411101, China)

**Abstract** The dynamic stability of a rotating electrorheological (ER) sandwich beam with periodically varying velocity is studied by using the method of multiple scales. Assuming the angular velocity of the beam is given as a harmonic function of time, the rotating sandwich beam is regarded as a parametrically excited system. The effects of structure parameters and working condition on the instability boundaries in parametric resonance of the rotating beam are investigated. Numerical results show that the vibration characteristic and dynamic stability of the rotating ER sandwich beam can be adjusted when it subjected to an electric field, and the ER material layer can be used to improve the dynamic stability of the rotating flexible beams.

**Key words** parametric resonance, electrorheological (ER) sandwich structures, rotating flexible beams, varying angular velocity, dynamic stability

---

Received 24 May 2007, revised 08 October 2007.

1) The project supported by China Postdoctoral Science Foundation (20070410730), the Research Fund of State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration (VSN-2007-01), and Scientific Research Fund of Hunan Provincial Education Department (07B012).

2) E-mail: wei\_kx@163.com