第 17 卷第 2 期
2006 年 6 月

中 国 计 量 学 院 学 报
Journal of China Jiliang University

Vol. 17 No. 2
Jun. 2006

【文章编号】 1004-1540(2006)02-0159-03

Fredholm 模与四元数 Cauchy 奇异积分算子

陶继成
(中国计量学院 理学院,浙江 杭州 310018)

【摘　要】 运用四元数 Cauchy 核奇异积分算子理论和 C^* 代数理论,建立了一个 Fredholm 模结构.

【关键词】 Fredholm 模;四元数 Cauchy 奇异积分算子;C^* 代数理论
【中图分类号】 O177.2　　　　【文献标识码】 A

Fredholm module and quaternionic cauchy singular integral operators

TAO Ji-cheng
(College of Sciences, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: In this paper, we construct a Fredholm module by using singular integral operators theory with the quaternionic Cauchy kernel and C^*-algebra theory.

Key words: Fredholm module; quaternionic Cauchy singular integral operators

在 20 世纪 50—60 年代,以 M. F. Atiyah 为代表的代数几何学家为了解决流形上的 Riemann-Roch 问题而引入指标理论,M. F. Atiyah, I. M. Singer 在文献[1]中用微分拓扑示性类理论给出了可定向紧流形的指标公式,刻画了流形的拓扑不变性,随后又在文献[2]给出了带边流形的指标公式,到了 80—90 年代,A. Connes 等算子代数学家从空间对偶的角度研究几何,建立了非交换几何理论,这一理论已在几何、拓扑、非交换自由概论和量子力学等领域都有很好的应用前景.量子计算的一个非常重要的工具就是 Connes 演算,Connes 演算的非常重要的部分就是非交换空间向量丛的 K-理论,Fredholm 模是 K-理论的基本概念之一,我们的工作是运用四元数 Cauchy 核奇异积分算子理论和 C^* 代数理论构造了一个 Fredholm 模结构,将为进一步讨论奇异积分算子指标与 K-群指标关系提供理论基础.

1　Fredholm 模与指标

定义 2.1[3]　设 A 是复数域 C 上的一个对合代数,我们称对 (H,F) 为 A 上的 Fredholm 模,如果满足下面的条件:

1) 在 A 在 Hilbert 空间的一个对合表示 π.

2) 在 H 中的自伴算子 F, $F=F^*$, $F^2=1$,使得: $[F,\pi(a)]$, $\forall a \approx A$ 是紧算子.

如此定义的模称为 Fredholm 奇模,我们称 (H,F)

【收稿日期】 2005-11-30
【基金项目】 浙江省教育厅基金资助(No. 20040365)
【作者简介】 陶继成(1969—),男,湖南绥宁人,博士,主要研究方向为算子理论.

为 Fredholm 偶模，如果满足上面的1)，2)条件且是 Hilbert 空间的 $Z/2$ 分次 γ 模，$\gamma=\gamma^*$，$\gamma^2=1$ 满足：

3) $\gamma\pi(a)=\pi(a)\gamma,\forall a\in A$，

4) $\gamma F=-F\gamma$.

对于上面定义的 Fredholm 模有如下的指标公式：

定理 2.2[3-5] 设 A 是复数域 C 上的一个对合代数，(H,F) 为 A 上的 Fredholm 模，(H_q,F_q) 是 $M_q(A)=A\otimes M_q(C)$ 根据下面的关系生成的 Fredholm 模，其中 $q\in N$，

$$H_q=H\otimes C^q,F_q=F\otimes 1,\pi_q=\pi\otimes id.$$

设 $\widetilde{A}$ 是代数 A 扩充单位元后生成的对合代数，则下面的结论成立：

1) 如果是 Fredholm 偶模，具有 $Z/2$ 分次 γ 模，设 $e\in Proj(M_q(\widetilde{A}))$，则算子 $\pi_q^-(e)F_q\pi_q^+(e)$：$\pi_q^+(e)H_q^+\to\pi_q^-(e)H_q^-$ 是 Fredholm 算子，且有下面的关系：

$$\varphi([e])=\mathrm{Index}(\pi_q^-(e)F_q\pi_q^+(e)),$$

其中映射 φ 是 $K_0(A)$ 群到整数 Z 的指标映射，$Proj(M_q(\widetilde{A}))$ 是 $M_q(\widetilde{A})$ 上的投影算子全体.

2) 如果 (H,F) 为 Fredholm 奇模，设 $E=\dfrac{1+F}{2}$，$u\in Gl_q(\widetilde{A}$，则算子 $E_q\pi_q(u)E_q:E_qH_q\to E_qH_q$ 是 Fredholm 算子，且有下面的关系：

$$\varphi([u])=\mathrm{index}(E_q\pi_q(u)E_q).$$

其中映射 φ 是 $K_1(A)$ 群到整数 Z 的指标映射，$Gl_q(\widetilde{A})$ 是 $M_q(\widetilde{A})$ 上的所有可逆元全体.

注 2.3：定理 2.2 给出了 Fredholm 模与 k 指标的关系，在下面一节运用四元数 Cauchy 型奇异积分算子理论构建立一个 Fredholm 模结构，将为进一步推广定理 2.2 到四元数提供理论基础.

2 四元数 Cauchy 型奇异积分算子的 Fredholm 模

设 R_y^4 为四维欧氏空间具有固定的正交基：$\Psi_{st}:=\{i_0,i_1,i_2,i_3\}$，$H$ 是 R_y^4 上的实四元数域，i_0 是单位元，i_1,i_2,i_3 是虚单位，如果 $y=\sum_{k=0}^{3}y_ki_k$ 是四元数，则相应的 $y=(y_0,y_1,y_2,y_3)$ 是 R_y^4 上的向量，记 $H^m:=\underbrace{H\times\cdots\times H}_{m}$，其中 $m\in\{3,4\}$.

设 Ω 是 m 维欧氏空间 R^m 上的连通区域，边界 $\partial\Omega:=\Gamma$ 是 $m-1$ 维的光滑紧流形，$<\cdot,\cdot>_{R^4}$ 为 R_y^4 上的欧氏内积，$f=\sum_{k=0}^{3}f_ki_k:\Omega\to H$，对应的 $F=(f_0,f_1,f_2,f_3)$ 是 R_y^4 上的向量值函数，对于 $p\in N\cup\{0\}$，我们给出下面的记号：

$$C^p(\Omega;R^4):=\{F\mid f_k\in C^p(\Omega;R)\},$$

$$C^p(\Omega;H):=\{f\mid F\in C^p(\Omega;R^4)\}.$$

对于 H 值函数 a，我们记 $M^a({}^aM)$ 为 H 上的右(左)乘法算子，$Z:f\to\overline{f}$ 为 H 上的共扼算子，记偏导数 $\partial_k=\partial_{x_k}=\partial/\partial x_k$.

设 $\Psi:=\{\Psi^{4-m},\cdots,\Psi^3\}\in H^m$，$\overline{\Psi}:=\{\overline{\Psi}^{4-m},\cdots,\overline{\Psi}^3\}$，我们分别用下面的公式定义 $C^1(\Omega,H)$ 上的算子 ${}^\Psi D$ 和 D^Ψ：

$${}^\Psi D[f]:=\Big(\sum_{k=4-m}^{3}{}^{\Psi^k}M\cdot\partial_k\Big)[f]=\sum_{k=4-m}^{3}\Psi^k\cdot\partial_kf,$$

$$D^\Psi[f]:=\Big(\sum M^{\Psi^k}\cdot\partial_k\Big)[f]=\sum_{k=4-m}^{3}\partial_kf\cdot\Psi^k.$$

由文献[6,7]，我们知道如果 $\langle\Psi^j,\Psi^k\rangle_{R^4}=\delta_{jk}$，则有：

$${}^\Psi D\cdot{}^{\overline{\Psi}}D={}^{\overline{\Psi}}D\cdot{}^\Psi D=D^\Psi\cdot D^{\overline{\Psi}}=D^{\overline{\Psi}}\cdot D^\Psi=\Delta_H$$

其中 $\Delta_H[f]:=\sum_{k=4-m}^{3}\Delta[f_k]\cdot i_k$，$\Delta$ 是 m 维 Laplace算子. 我们称集合 Ψ 为“structural set”，如果 Ψ 满足条件 $\langle\Psi^j,\Psi^k\rangle_{R^4}=\delta_{jk}$. 从内积的定义知，如果 Ψ 为“structural set”则 $\overline{\Psi}$ 也为“structural set”；反之亦然.

给定“structural set”Ψ，区域 Ω，我们引进集合：

$${}^\Psi M(\Omega):=Ker{}^\Psi D=\{f\in C^1(\Omega;H)\mid{}^\Psi D[f]=0\},$$

$$M^\Psi(\Omega):=KerD^\Psi=\{f\in C^1(\Omega;H)\mid D^\Psi[f]=0\}.$$

我们称 ${}^\Psi M(\Omega)(M^\Psi(\Omega))$ 中的元素为 Ω 内的左(右)超复函数.

下面我们介绍由“structural set”Ψ 生成的 Cauchy 核 K_Ψ，

令 $$K_\Psi(x):=-\frac{1}{(m-2)\mid S^{m-1}\mid}\cdot{}^{\overline{\Psi}}D[\theta_m](x)$$

$$=\frac{1}{\mid S^{m-1}\mid\cdot\mid x\mid^m}\sum_{k=4-m}^{3}\overline{\Psi}^k\cdot x^k,$$

其中 $\theta_m:x\in R^m\backslash\{0\}\to\dfrac{1}{\mid x\mid^{m-2}}$；

$\mid S^{m-1}\mid=\begin{cases}4\pi,if,m=3,\\2\pi^2,if,m=4\end{cases}$ 是单位球 S^{m-1} 在 R^m 中的面积元.

设 $f\in C(\partial\Omega;H)$，当 $x\notin\partial\Omega$ 时定义

$$x \to {}^{\Psi}K[f](x) := (-1)^{m-1}\operatorname{sgn}\Psi\int_{\partial\Omega} K_{\Psi}(\tau - x)\sigma_{\Psi,\tau}^{m-1} f(\tau),$$

$$x \to K^{\Psi}[f](x) := (-1)^{m-1}\operatorname{sgn}\Psi\int_{\partial\Omega} f(\tau)\sigma_{\Psi,\tau}^{m-1} K_{\Psi}(\tau - x).$$

其中 $\sigma_{\Psi,x}^{m-1} = -\operatorname{sgn}\Psi\sum_{k=4-m}^{3}(-1)^k\Psi^k d\hat{x}$，$d\hat{x}$ 表示 $dx^{4-m}\Lambda\cdots\Lambda dx^3$ 中没有 dx^k 项.

如果记 $\Omega^+ := \Omega, \Omega^- := R^m/\overline{\Omega}$，当 $x \to t, x \in \Omega^+ := \Omega$ 或 $x \in \Omega^- := R^m\backslash\overline{\Omega}, t \in \Gamma$，由文献[6,7]有下面的 Sokhotski-Plemelj 公式，

$$\lim_{\Omega^{\pm}\ni x\to t} {}^{\Psi}K[f](x) =: {}^{\Psi}K[f]^{\pm}(t) = \pm\frac{1}{2}f(t) + {}^{\Psi}K[f](t),$$

$$\lim_{\Omega^{\pm}\ni x\to t} K^{\Psi}[f](x) =: K^{\Psi}[f]^{\pm}(t) = \pm\frac{1}{2}f(t) + K^{\Psi}[f](t).$$

如果我们令 ${}^{\Psi}S := 2\cdot{}^{\Psi}K, S^{\Psi} := 2\cdot K^{\Psi}$，则有下面的等价公式：

$${}^{\Psi}K[f]^{\pm}(t) = \pm\frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2}\cdot{}^{\Psi}S[f](t),$$

$$K^{\Psi}[f]^{\pm} = \pm\frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2}\cdot S^{\Psi}[f](t).$$

我们记 $L^2(\Gamma;H) := \{f = \sum_{k=0}^{3} f^k i_k \mid f^k \in L^2(\Gamma;R), k \in \{0,1,2,3\}\}$，则 $L^2(\Gamma;)$ 是 H 双模，且是 Hilbert 模，如果记 $B(X,Y)$ 是所有从空间 X 到 Y 的有界线性算子集合，$T(X)$ 是空间 X 上的紧算子集合，Γ 是 R^m 中无边光滑紧曲面，由文献[6]，我们有 ${}^{\Psi}S \in B(L^2(\Omega,H))$，且有下面的关系：

$${}^{\Psi}S^2 = I$$

若记 ${}^{\Psi}P_{\pm} := \frac{1}{2}(I \pm {}^{\Psi}S)$，则有下面的正交关系，

$${}^{\Psi}P_{\pm}^2 = {}^{\Psi}P_{\pm};\ {}^{\Psi}P_{+}\cdot{}^{\Psi}P_{-} = {}^{\Psi}P_{-}\cdot{}^{\Psi}P_{+} = 0.$$

因此 ${}^{\Psi}P_{\pm}$ 是 $L^2(\Gamma;H)$ 中相互正交的投影算子.

设 $H_{\mu}(\Gamma,H)$ 是所有 Γ 到 H 的 Hölderian 连续函数全体，由文献[7,9]知，$H_{\mu}(\Gamma,H)$ 是一个对合代数，设 $a \in H_{\mu}(\Gamma,H)$，定义算子

$$M^a\cdot{}^{\Psi}S: f \in L^2(\Gamma;H) \mapsto {}^{\Psi}S[f]\cdot a,$$

$${}^{\Psi}S\cdot M^a: f \in L^2(\Gamma;H) \mapsto a\cdot{}^{\Psi}S[f].$$

由文献[6]知 $[M^a;{}^{\Psi}S] := M^a\cdot{}^{\Psi}S - {}^{\Psi}S\cdot M^a$ 是 $L^2(\Gamma;H)$ 上的紧算子.

由上面的性质，若令 $F := {}^{\Psi}S$，则 $F^2 = I, F = F^*$，根据 Fredholm 模的定义，我们有：

定理 3.1　$(L^2(\Gamma;H),F)$ 是对合代数 $H_{\mu}(\Gamma,H)$ 上的 Fredholm 奇模.

【参　考　文　献】

[1] ATIYAH M F, SINGER I M. The Index of elliptic operators on compact manifolds[J]. Bull Am Math Soc, 1963, 69: 422-433.

[2] ATIYAH M, BOTT R. The index problem for manifold with boundary[M]. Differential analysis, Oxford University Press, 1964: 175-186.

[3] CONNES A. Noncommutative Geometry[M]. Academic Press, 1994: 270-290.

[4] ATIYAH M F. Global theory of elliptic operator[C]. Proc Internat Conf on Functional Analysis and Related Topics, Tokyo, 1969: 21-30.

[5] KASPAROV G, Topological invariants of elliptic operators, 1. K-homology[J]. Math USSR, 1975, 9: 751-792.

[6] SHAPIRO M V, VASILEVSKI N L. Quaternionic Ψ-Hyperholomorphic Functions, Singular Integral Operators and Boundary Value Problems Ⅱ. Algebras of Singular Integral Operators Value Problems[J]. Complex Variables, 1995, 27: 67-96.

[7] SHAPIRO M V, VASILEVSKI N L. Quaternionic Ψ-Hyperholomorphic Functions, Singular Integral Operators and Boundary Value Problems 1. Ψ-Hyperholomorphic Functions theory[J]. Complex Variables, 1995, 27: 17-46.

[8] ATIYAH M F. The index theorem for manifolds with boundary[J]. Annals of Math Study, 1965, 57: 337-351.

[9] GILBERT J E, MURRAY A M. Clifford algebras and dirac operators in harmonic analysis[M]. Printed in Great Britain at the Publication Data, 1991: 56-57.