

【文章编号】 1004-1540(2007)01-0062-04

# 统计过程控制的进一步讨论

陶靖轩, 刘春雨

(中国计量学院 管理学院, 浙江 杭州 310018)

**【摘要】** 就统计过程控制在实施过程中遇到的若干问题进行深入研究, 首先进行判异准则的小概率推算, 纠正了过去小概率计算中一些错误; 其次论述了过程异常的两面性及其对过程的改进作用, 最后说明进行 SPC 不能单纯依赖控制图, 还应进行能力分析(即技术稳态分析), 并及时有效地采取措施对过程进行改进, 才能从实施统计过程控制中获得效益。

**【关键词】** 判异准则; 统计稳态; 技术稳态; 过程能力

**【中图分类号】** TB114. 3; O211. 64

**【文献标识码】** A

## Further discussions about the statistics process control

TAO Jing-xuan, LIU Chun-yu

(College of Management, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** The paper deeply researches many problems in the execution of statistics control. Firstly it deduces the abnormality-judging standards for small probability, and corrects some errors in the past computations. Secondly it explains the two sides of process abnormality and its improvement on the process. Finally it explains that SPC-conducting can't only depend on control charts but should do capability analysis (that is the steady state of technology), and timely and effectively take measures on improving the process, which results in obtaining efficiency in the SPC.

**Key words:** abnormality-judging standards; state of statistical control; steady state of technology; process capability

统计过程控制(简称 SPC)是一种借助数理统计方法的过程控制工具, 它对生产过程进行分析评价, 根据反馈信息及时发现异常因素的先兆, 并采取措施清除其影响, 使过程维持在仅受随机因素影响的受控状态, 以达到控制质量的目的。

20 世纪 20 年代, 休哈特博士发明了控制图, 在工业和服务等行业得到推广应用, 成为统计过程

控制的主要工具。随着控制图理论的深入研究, 又推出了对小波动进行监控的 EWMA 和 CUSUM 控制图, 对小批量多品种生产过程进行控制的比例控制图和目标控制图用的 T2 控制图, 大大拓宽了 SPC 的研究领域, 也增强了 SPC 工具的有效性。

但在应用中我们发现部分质量工程师对 SPC 的若干基本理论缺乏进一步的理解, 比如判

**【收稿日期】** 2006-04-17

**【基金项目】** 国家质量技术监督局基金资助项目(No. 2004QK04)

**【作者简介】** 陶靖轩(1948-), 男, 河南许昌人, 教授。主要研究方向为数理统计与质量管理, 六西格玛管理等。

异准则缺乏基于数理统计认识的理解;对异常波动的改进作用引不起重视;过分相信统计稳态,等等.本文就这三个方面进行讨论,特别强调的是 SPC 不仅是用于评价改进效果并对改进成果进行维持,而且可以帮助寻找改进的机会,在新的水平上进一步开展改进工作.

## 1 8 种判异模式的统计分析

《常规控制图》国家标准 GB/T4091-2001 明确给出了可查明原因的 8 种模式,为方便分析,下面我们统一规定上下控制限分别位于中心线的上、下  $3\sigma$  距离处,并将它们之间的图面分为 6 个区间,每个区间的宽度为  $1\sigma$ ,自上而下分别记为 A、B、C、C、B、A,即两个 A 区、B 区、C 区分别在中心线两侧,关于中心线对称.主要适用于均值图和单值图,并一律假定  $X$  的观测值服从正态  $N(\mu, \sigma^2)$ .

(1) 模式 1:点出界就判异,此时发生误判(弃真)的概率为:

$$\begin{aligned} P(|x| \geq 3\sigma) &= P\left(\frac{|x-\mu|}{\sigma} \geq 3\right) = 2\phi(-3) \\ &= 2[1 - \phi(3)] = 2[1 - 0.998\ 65] \\ &= 2 \times 0.001\ 35 = 0.002\ 7 = 0.27\% \end{aligned}$$

(2) 模式 2:连续 9 点落在中心线同一侧,此准则是为补充模式 1 而设计的,为的是改进控制图的灵敏度,因为之所以会出现模式 2 的情况,主要是过程均值  $\mu$  减小(或扩大)的缘故.其误判(弃真)的概率为(又称虚发警报):

$$P(\text{连续 9 点落在中心线同一侧}) = 2 \times (0.498\ 65)^9 = 0.003\ 812 \approx 0.38\%$$

注:文献[1]中误判概率为  $P(\text{连续 9 点落在中心线同一侧}) = 2 \times (0.5)^9 = 0.003\ 906 \approx 0.390\ 6\%$

(3) 模式 3:连续 6 点递增或递减,此准则主要针对过程均值的趋势进行设计,它判定过程均值的较小趋势比模式 2 更为灵敏,产生趋势的原因可能是工具逐渐磨损、维修逐渐变坏,操作人员技能的逐渐提高,从而使参数  $\mu$  随时间而变化.当过程处于统计控制状态时,虚发警报的概率是:

$$\begin{aligned} P(\text{连续 6 点递增或递减}) &= 2 \times \frac{(0.997\ 3)^6}{6!} \\ &= 0.002\ 733 \approx 0.27\% \end{aligned}$$

(4) 模式 4:当过程处于统计控制状态时,连续 3 点中有 2 点落在中心线同一侧的 B 区以外的概率为:

$$\begin{aligned} P(\text{点子落在中心线一侧 B 区以外}) &= P(X > \mu + 2\sigma) - P(X \geq 3\sigma) = 0.022\ 8 - 0.001\ 35 = \\ &= 0.021\ 45 \end{aligned}$$

注:[1]中  $P(\text{点子落在中心线一侧 B 区以外}) = P(X > \mu + 2\sigma) = 1 - P(X \leq \mu + 2\sigma) = 1 - 0.977\ 2 = 0.022\ 8$

$$\begin{aligned} P(X < \mu - 2\sigma) - P(X \leq -3\sigma) &= 0.021\ 45 \\ \text{注:[1]}(X < \mu - 2\sigma) &= 0.022\ 8 \end{aligned}$$

$P(\text{连续 3 点中有 2 点落在中心线同一侧的 B 区以外}) = 2 \times C_3^2 \times 0.021\ 45^2 \times 0.975\ 6 = 0.002\ 701 \approx 0.27\%$ ,即虚发警报的概率为  $0.27\%$  与第一类模式的概率  $\alpha = 0.27\%$  相同.

注:文献[1]中  $P(\text{连续 3 点中有 2 点落在中心线同一侧的 B 区以外}) = 2 \times C_3^2 \times (1 - 0.977\ 2)^2 \times 0.977\ 2 = 0.304\ 8\%$

(5) 模式 5:考虑当过程处于统计控制状态时,连续 15 点落在两侧 C 区内的概率,

$$P(\text{连续 15 点落在中心线两侧的 C 区内}) = 0.682\ 6^{15} = 0.003\ 254 \approx 0.32\%$$

即虚发警报的概率为  $0.32\%$ ,与第一种模式中虚发警报概率为  $\alpha = 0.27\%$  接近.

(6) 模式 6:连续 5 点中有 4 点落在中心线同一侧的 C 区以外,考虑到第 5 点可在任何处,所以一旦参数  $\mu$  发生变化,发生这种异常的可能性是存在的.在正常(稳态)情况下,发生这一事件的概率是:

$$\begin{aligned} P(\text{点子落在中心线一侧 C 区以外}) &= P(X > \mu + \sigma) - P(X > \mu + 3\sigma) = 0.158\ 7 - 0.001\ 35 = \\ &= 0.157\ 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{点子落在中心线一侧 C 区以外}) &= P(X < \mu - \sigma) - P(X < \mu - 3\sigma) = 0.158\ 7 - 0.001\ 35 = \\ &= 0.157\ 3 \end{aligned}$$

注:文献[1]中  $P(\text{点子落在中心线一侧 C 区以外}) = P(X > \mu + \sigma) = 1 - 0.841\ 3 = 0.158\ 7$

$P(\text{点子落在中心线一侧 C 区以外}) = P(X < \mu - \sigma) = 1 - 0.841\ 3 = 0.158\ 7$

所以,  $P(\text{连续 5 点中有 4 点落在中心线同一侧的 C 区以外}) = 2 \times C_5^4 \times 0.157\ 3^4 \times 0.682\ 6 = 0.004\ 17 \approx 0.42\%$

注:文献[1]中  $P(\text{连续 5 点中有 4 点落在中心线同一侧的 C 区以外}) = 2 \times C_5^4 \times (1 - 0.841\ 3)^4 \times 0.841\ 3 = 0.533\ 1\%$

(7) 模式 7:连续 8 点落在中心线两侧且无一在 C 区内,这是考虑到模式(5)中的每个子组中的数据要么来自 A,要么来自 B,而不是同时来自这两个分布,极有可能出现这种分层不够的情况,在过程处于统计稳态情况下,发生这一事件的概率是:

$$P(\text{连续8点落在中心线两侧且无一在C区内}) \\ = (0.9973 - 0.6826)^8 = 0.000096 \approx 0.01\%$$

注:文献[1]中  $P(\text{连续8点落在中心线两侧且无一在C区内})$   
 $= (0.1587 \times 2)^8 = 0.000103 \approx 0.0103\%$

(8) 模式 8: 连续 14 个点上下交替, 出现周期变化

GB/T4091-2001 的参数文献(Nelson, L. S. Interpreting shewhart  $\bar{X}$ Control Chart. Journal of Quality Technology, 1985, 17(2)114~116)谈到“例如: 两台设备、两只纺锤、两位操作工、两台自动售货机, 它们交替使用所带来的系统影响就会引发这样的现象. 在记录交替倒置的鸡蛋计时器流出的沙子的时间时, 也会观察到这样的现象, 因此, 这种模式又名“鸡蛋计时器效应”. 点子数的选择依据 Monte Carlo 的试验结果, 设想自左而右的 14 个位置(样本点), 第一个点落入界内的概率为 0.9973, 其后每一个位置的三个可能情形中只有两个是有利的场合; 从而此时虚发警报的概率为:

$$P(\text{连续14个点上下交替, 出现周期变化}) \\ = (0.9973)^{14} \times 1 \times (2/3)^{13} = 0.9628 \times 0.005138 \\ = 0.004947 \approx 0.49\% \text{ 与模式1基本一致.}$$

## 2 重视异常波动的改进作用

《常规控制图》国家标准 GB/T4091-2001 明确给出了过程改进的策略, 收集 25 组大小为 4 或 5 的子组(计量值控制图), 如果(1) 点在中心线周围随机分布; (2) 点在控制限内; (3) 无链、趋势或其他模式; (4) 过程稳定可预测。

新标准将“35 点中最多一点在限外或连续 100 点中最多 2 点在限外”的判稳准则删去, 只保留“连续 25 点没有一点在限外”的情况. 其道理很明显, 旧标准与判异准则 1(即模式 1) 矛盾, 依据准则 1, 任何情况下, 只要出现了出限点, 就需“查明异因, 采取措施, 加以消除, 纳入标准, 不再出现”。

但出现异常或点子出界, 是否一定要“采取措施, 加以消除”呢? 笔者认为查明异因是必要的, 但要区分这种异因所引起的后果是向“更好”的方向变化呢或是向“更坏”的方向变化, 这一点尤为重要; 如下图 1<sup>[3]</sup>, 异因的存在导致过程中心严重偏离规格中心从而使生产过程失去控制(比如刀具磨损后加工的零件尺寸普遍偏大), 就应该立即采纳 20 条方针, 经过调整后, 后 3 个分布图形完全相同, 已经达到稳定。

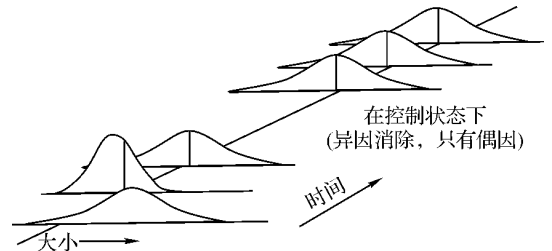


图 1 异因的存在导致过程中心严重偏离规格中心

再如图 2<sup>[3]</sup>, 注意它随时间变化而出现过程的输出不稳定, 除过程中心偏离规格中心外, 曲线的波动幅度也忽大忽小, 实际上过程是失控的. 这种情况当然不可以预测未来, 但我们注意了第 2 个分布(波动)曲线的离散幅度明显小于其余 3 个波动曲线, 导致短暂的时间内, 加工产品的质量明显提高, 不良品率明显下降(比如可能是由于原材料质量大幅度提高, 更换了技术熟练的工人等); 在此情况下, 应查明导致波动的原因, 特别注意引起波动变小的决定因素, 及时加以总结、推广. 也就是说, 当特殊原因(异因)引起的过程分布的改变有利时, 实际上就为低成本地改进过程提供了非常好的机会, 故应细究原因, 并使其成为过程的恒定的一部分持续发挥作用, 从而使过程得到改进。

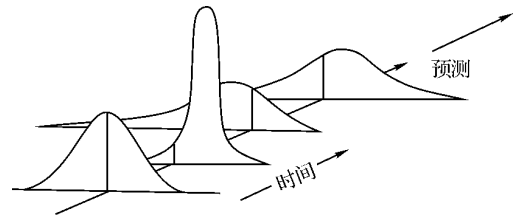


图 2 曲线的波动幅度忽大忽小

再比如常规控制图中的 C 图和 P 图, 通常在下控界线大于零情况下我们打点时点子越接近于零越好, 如果 C 或 P 值超过了(低于)下控线当然是向“好的”方向出现了“异常干扰”, 从统计学观点看是“不正常”, 也是由于异常因素的“干扰”所造成的; 然而这个“干扰”大多是由于操作技术或工艺方法得到了改进, 致使原来的分布改变了. 在这种情况下, 当然应该积极分析“异因”, 总结经验, 加以推广, 并重新设计一个符合实际的控制图。

## 3 统计稳态并非生产追求的最佳目标

不少材料中提到“鉴于稳态对质量有完全的

把握、生产最经济,因而稳态是生产追求的目标。”<sup>[2]</sup>还提到一道工序达到稳态称为稳态工序,道道工序都达到统计稳态称全稳生产线。然而目前我们所说的稳态主要指只有偶因没有异因的状态,没有异因并不一定说明过程有足够能力满足技术规范要求,而不满足技术规范要求就可能生产不良产品。见图 3<sup>[3]</sup>,从图 3 可见前 3 个分布图形相同,已达到了稳态,但他们的不合格品率过大,即过程能力指数太低;在经过调整后,后 3 个分布不但图形相同、达到了稳态,而且它们的不合格品率,即过程能力指数也同时满足了要求。

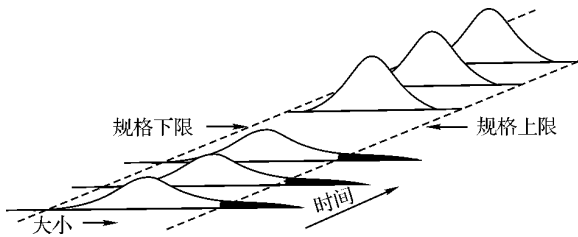


图 2 前 3 个分布图形相同已达到了稳态,但它们的不合格品率过大

著名的荷兰学者维尔达(S. L. Wierda)把过程能力指数满足技术要求称作技术稳态。技术稳态主要受偶然波动情况影响,而提高技术稳态需要经过减少偶因的波动来达到。但我们通常所说的控制图却不是控制偶因的工具,因之控制图对提高技术稳态没有多少帮助;也就是说统计稳态和技术稳态是相互独立的两个概念,需分别处理。

为定量描述技术稳态,文献[2]中给出了稳态系数:

$$d_{\sigma} = \frac{\hat{\sigma}_{LT} - \hat{\sigma}_{ST}}{\hat{\sigma}_{LT}}$$

对同一个过程而言,通常长期标准差的估计值 $\hat{\sigma}_{LT}$ 大于短期标准差的估计值 $\hat{\sigma}_{ST}$ ;因此过程的质量改进就是逐步减少 $\hat{\sigma}_{LT}$ ,使之不断向 $\hat{\sigma}_{ST}$ 逼近。利用这一过程稳定系数,可以对过程的实际情况,即对过程偏离技术稳态的稳定程度进行评估。

表 1 过程相对稳态系数的评价参考标准<sup>[2]</sup>

| $d_{\sigma}$ 的范围                 |      |
|----------------------------------|------|
| $< 10\%$                         | 稳定   |
| $10\% \leq d_{\sigma} \leq 20\%$ | 不太稳定 |
| $20\% \leq d_{\sigma} \leq 50\%$ | 不稳定  |
| $\geq 50\%$                      | 很不稳定 |

现在的另一个问题是 $\hat{\sigma}_{ST}$ 究竟多大才叫达到了技术稳态呢?关于这一点,一般用它与规范限比来表述:由于 $c_p = \frac{T}{6\hat{\sigma}_{ST}}$ ,而 $\hat{\sigma}_{ST} = \bar{R}/d_2$ 或 $\bar{s}/c_4$ 估计;当然这种估计必须在统计稳态下进行;以下给出技术稳态的参考评价标准:

表 2 过程能力指数  $c_p$  值的评价参考<sup>[4,5]</sup>

| $c_p$ 值的范围                | 级别  | 过程能力的评价参考                     |
|---------------------------|-----|-------------------------------|
| $c_p \geq 1.67$           | I   | 过程能力过高                        |
| $1.33 \leq c_p \leq 1.67$ | II  | 过程能力充分,表示技术管理能力已很好,应维持        |
| $1.0 \leq c_p \leq 1.33$  | III | 过程能力充足,但技术管理能力勉强,应设法提高为 II 级  |
| $0.67 \leq c_p \leq 1.0$  | IV  | 过程能力不足,表示技术管理能力已很差,应立即采取改善措施  |
| $c_p \leq 0.67$           | V   | 过程能力严重不足,应采取紧急措施,全面检查,必要时停工整顿 |

## 4 结 论

综上所述,我们可以给出统计过程控制的改进策略,它应包括:判断过程是否处于统计控制状态(统计稳态)和评价过程能力两个环节。通常是先进行判稳,即判断过程是否受控;在稳态情况下,估计过程的不合格品率,也即进行过程能力分析。前者的主要工具正是 7 种工具中的核心——过程控制图。

正确识别过程中是否存在特殊原因,过程输出的不合格品率是否令人满意,以及指出过程改进的方向,并且及时有效地采取适当措施对过程进行改进,这些都属统计过程控制的主要任务。应该强调的是,只有及时有效地采取适当措施对过程进行改进,才能从实施统计过程控制中获得效益<sup>[6]</sup>。

## 【参 考 文 献】

[1] 孙 静. 实现六西格玛质量的途径[M]. 北京:清华大学出版社,2005:69-78.  
 [2] 国家质量技术监督检验总局. 质量专业理论与实务(中级)[M]. 北京:中国人事出版社,2006:177-180.  
 [3] 王霄锋. QS9000—统计过程控制[M]. 北京:清华大学出版社,2004:20-21.  
 [4] 陶靖轩. 六西格玛管理简明教程[M]. 北京:中国计量出版社,2005:138-145.  
 [5] 陈育蕾,陶靖轩. 过程能力分析的若干探讨[J]. 中国计量学院学报,2005,16(4):305-310.  
 [6] JOHNSON N L, LEONE F C. Cumulative sum control chart-mathematical principles and applied to their construction and use, Part I[J]. Industrial Quality Coality Control, 1962a:15-28.