

# 质量不平衡转子的弯扭耦合振动分析

何成兵<sup>1</sup>, 顾煜炯<sup>1</sup>, 陈祖强<sup>2</sup>

- (1. 华北电力大学电站设备状态监测与控制教育部重点实验室, 北京市 昌平区 102206;
2. 福建省电力试验研究院, 福建省 福州市 350007)

## Coupled Flexural-torsion Vibration of Rotors With Unbalance Mass

HE Cheng-bing<sup>1</sup>, GU Yu-jiong<sup>1</sup>, CHEN Zu-qiang<sup>2</sup>

- (1. Key Laboratory of Condition Monitoring and Control for Power Plant Equipment of Ministry of Education, North China Electric Power University, Changping District, Beijing 102206, China;
2. Fujian Electric Power Test and Research Institute, Fuzhou 350007, Fujian Province, China)

**ABSTRACT:** The differential equations of coupled flexural-torsion vibration for a Jeffcott rotor model with unbalance mass are built. Small parameter perturbation method is used for analyzing the characteristic of coupled vibrations. And the analytical results are validated through numerical simulation. Farther analysis results show that: flexural vibration and torsional vibration are coupled, and the mass eccentricity is the precondition. New torsions which main frequency is  $|W - w_1|$  are excited through coupled vibrations when an exterior excited force with frequency  $w_1$  lies. New flexural vibrations which main frequency is  $|W \pm w_{T1}|$  will also be excited by torsion when an exterior excited moment with frequency  $w_{T1}$  lies. Resonance of coupled flexural-torsion vibration happens when rotation frequency  $W$  is equal to the sum (or errand) of inherence frequency  $w_{T0}$  of torsion and  $w_0$  of flexural vibration. The possibility of shaft damage led by coupled resonance is little. Useful information for fault diagnosis is provided by the coupled characteristics.

**KEY WORDS:** rotor; coupled flexural-torsion vibration; mass eccentricity; small parameter perturbation method; nonlinearity

**摘要:** 对 Jeffcott 质量不平衡转子建立弯扭耦合振动方程。利用小参数法, 得到该耦合振动方程的解析解, 并给出数值仿真结果。理论分析与计算表明: 弯振与扭振是相互耦合的, 质量偏心是耦合的前提; 转子在圆频率为  $w_1$  的外部激励作用下, 通过弯扭耦合, 主要激发出频率为  $|W - w_1|$  的扭振。当转子有频率为  $w_{T1}$  的外扭矩作用时, 将主要激励产生  $|W \pm w_{T1}|$  频率成分的弯振; 转速  $W$  等于转轴扭振固有频率  $w_{T0}$  与弯振固有频率  $w_0$  之和或之差时, 可能发生弯扭耦合共振; 当外激励的频率为弯振(或扭振)固有频率时, 也会激发出较大的扭振(或弯振); 弯扭耦合共振导致转子损坏的可能性很小, 可为故障诊断提供有益的信息。

**关键词:** 转子; 弯扭耦合振动; 质量偏心; 小参数法; 非线性

## 0 引言

转子弯曲和扭转振动是旋转机械振动的两种主要形式, 其振动特性分析一直是航空动力、石油化工等领域的研究热点。转子弯曲与扭转振动之间存在着耦合关系, 并且与轴系所处的状态有关。研究弯扭耦合振动特性, 一方面可从扭振特征中提取有用的故障信息, 同时, 综合考虑弯振和扭振也将更有助于掌握和理解转子的动力学特性<sup>[1-13]</sup>。

弯扭耦合振动属于非线性振动力学范畴, 变化规律和数学模型比较复杂。为掌握问题的主要本质规律, 可从单盘转子模型入手进行研究。本文针对存在质量偏心的单圆盘 Jeffcott 转子模型, 利用拉格朗日方程, 建立弯扭耦合振动模型, 该模型忽略陀螺力矩的影响, 但计及了重力影响因素。将非线性领域的小参数法引进来, 得到该耦合振动的解析解, 并通过数值仿真手段验证了理论分析结果。

## 1 质量不平衡转子弯扭耦合振动方程

以 Jeffcott 单质量不平衡转子为研究对象, 系统结构如图 1 示。

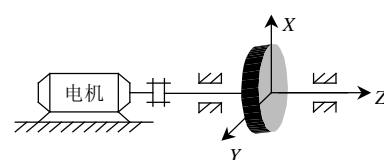


图1 转子系统示意图

Fig.1 The sketch of rotor system

假设转子简化为质量为  $m$  的单圆盘与弯扭柔性的无质量轴，轴是各向同性，轴承为刚性支承。单圆盘的坐标如图 2 示，图中， $o$  为涡动中心， $o_1$  为单圆盘形心， $c$  为单圆盘质心， $f$  为转过的角度。在转子运动学分析的基础上，可以采用拉格朗日方程，导出转子弯扭耦合振动微分方程。

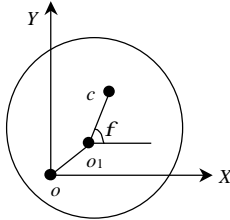


图 2 单圆盘坐标示意图  
Fig.2 Single disc coordinate

根据理论力学知，刚体运动可由刚体质心平动和绕质心转动合成，则单圆盘的动能为

$$T = T_G + T_r \quad (1)$$

式中： $T_G$  为平动动能； $T_r$  为转动动能。它们分别为

$$\begin{cases} T_G = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + e^2\dot{f}^2 + 2e\dot{f}\dot{y}\cos f - 2e\dot{f}\dot{x}\sin f) \\ T_r = \frac{1}{2}(J + me^2)\dot{f}^2 \end{cases} \quad (2)$$

转子系统的势能就是弹性轴的势能，考虑转轴的线弹性、几何对称性及重力影响，单圆盘势能可直接写为

$$U = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}k_t q^2 + mg(y + e\sin f) \quad (3)$$

式中： $k$  为抗弯刚度； $k_t$  为抗扭刚度。

考虑阻尼系数的影响，单圆盘作用的外力有  $x$ 、 $y$  向阻尼力  $-c\dot{x}$ 、 $-c\dot{y}$  和外激励力  $f_x$ 、 $f_y$ ，外力矩则有扭阻矩  $-c_t\dot{f}$  和外扭矩  $M_t$ ，故广义力为：

$Q_x = -c\dot{x} + f_x$ ， $Q_y = -c\dot{y} + f_y$ ， $Q_f = -c_t\dot{f} + M_t$ ，其中， $c$  为平动阻尼， $c_t$  为转动阻尼。将式(1)~(3)代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (4)$$

可得弯扭耦合振动微分方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me(\dot{f}^2 \cos f + \ddot{f} \sin f) + f_x \quad (5)$$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = me(\dot{f}^2 \sin f - \ddot{f} \cos f) + f_y - mg \quad (6)$$

$$(J + me^2)\ddot{f} + c_t\dot{f} + k_t q = me[\ddot{x} \sin f - (\ddot{y} + g)\cos f] + M_t \quad (7)$$

经变换，弯扭耦合振动微分方程可写为

$$\ddot{x} + 2xw_0\dot{x} + w_0^2x = e(\dot{f}^2 \cos f + \ddot{f} \sin f) + \frac{f_x}{m} \quad (8)$$

$$\ddot{y} + 2xw_0\dot{y} + w_0^2y = e(\dot{f}^2 \sin f - \ddot{f} \cos f) + \frac{f_y}{m} - g \quad (9)$$

$$\ddot{f} + 2x_t w_{t0} \dot{f} + w_{t0}^2 q = \frac{me}{J + me^2} [\ddot{x} \sin f - (\ddot{y} + g)\cos f] + \frac{M_t}{J + me^2} \quad (10)$$

式中： $x$ 、 $x_t$  分别为弯振和扭振阻尼系数比，

$$x = \frac{c}{2\sqrt{km}}, \quad x_t = \frac{c_t}{2\sqrt{k_t(J + me^2)}}; \quad w_0、w_{t0} \text{ 分别为}$$

弯振和扭振固有圆频率，其值为  $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ，

$w_{t0} = \sqrt{\frac{k_t}{J + me^2}}$ 。由式(7)可以看出，质量偏心增加了转子的扭转惯量，它将使扭振固有圆频率略有降低。由于质量偏心的存在，转子弯振和扭振之间发生了相互耦合。

## 2 转子弯扭耦合振动特性分析

### 2.1 弯扭耦合方程求解

采用小参数法求解方程组(8)~(10)，各变量按幂级数展开，其中各项逐渐减小<sup>[11]</sup>

$$x = x_0 + e x_1 + e^2 x_2 + \dots \quad (11)$$

$$y = y_0 + e y_1 + e^2 y_2 + \dots \quad (12)$$

$$q = q_0 + e q_1 + e^2 q_2 + \dots \quad (13)$$

式中  $e$  为一小参数， $0 < e \leq 1$ ，故可略去  $e^2$  及更高阶次项。设偏心距  $e$  很小，可令  $e = eE$ ， $E$  为任意的但不是很小的量，将式(11)~(13)代入式(8)~(10)，忽略重力影响，按是否含有  $e$  将方程分为两组，不含  $e$  的方程组为

$$\ddot{x}_0 + 2xw_0\dot{x}_0 + w_0^2x_0 = \frac{f_x}{m} = \frac{F_x}{m} \cos w_1 t \quad (14)$$

$$\ddot{y}_0 + 2xw_0\dot{y}_0 + w_0^2y_0 = \frac{f_y}{m} = \frac{F_y}{m} \sin w_1 t \quad (15)$$

$$\ddot{q}_0 + 2x_t w_{t0} \dot{q}_0 + w_{t0}^2 q_0 = \frac{M_t}{J + me^2} = \frac{M_0}{J + me^2} \cos w_{T1} t \quad (16)$$

式中： $w_1$  为外激励力的圆频率； $w_{T1}$  为外激励力矩的圆频率。

含  $e$  的方程组为

$$\ddot{x}_1 + 2xw_0\dot{x}_1 + w_0^2x_1 = E(\dot{f}_0^2 \cos f_0 + \ddot{f}_0 \sin f_0)$$

$$\ddot{y}_1 + 2xw_0\dot{y}_1 + w_0^2y_1 = E(\dot{f}_0^2 \sin f_0 - \ddot{f}_0 \cos f_0)$$

$$\ddot{q}_1 + 2x_t w_{t0} \dot{q}_1 + w_{t0}^2 q_1 = \frac{mE}{J + me^2} (\ddot{x}_0 \sin f_0 - \ddot{y}_0 \cos f_0)$$

式中  $f_0 = Wt + q_0$ ，因扭角  $q_0$  很小(一般  $q_0 < 1^\circ$ ，约 0.01745rad)，故上式可写为

$$\ddot{x}_1 + 2xw_0 \dot{x}_1 + w_0^2 x_1 = E[W^2 (\cos Wt - q_0 \sin Wt) + \ddot{q}_0 (\sin Wt + q_0 \cos Wt)] \quad (17)$$

$$\ddot{y}_1 + 2xw_0 \dot{y}_1 + w_0^2 y_1 = E[W^2 (\sin Wt + q_0 \cos Wt) - \ddot{q}_0 (\cos Wt - q_0 \sin Wt)] \quad (18)$$

$$\ddot{q}_1 + 2x_t w_{t0} \dot{q}_1 + w_{t0}^2 q_1 = \frac{mE}{J + me^2} [\ddot{x}_0 (\sin Wt + q_0 \cos Wt) - \ddot{y}_0 (\cos Wt - q_0 \sin Wt)] \quad (19)$$

先求解方程组(14)~(16)，可得到一组特解为

$$x_0 = A_x \cos(w_t t + y_1)$$

$$y_0 = A_y \sin(w_t t + y_2)$$

$$q_0 = A_q \cos(w_{T1} t + y_3)$$

式中： $A_x = \frac{F_x}{m\sqrt{(w_0^2 - w_1^2)^2 + 4x^2 w_0^2 w_1^2}}$ ， $\tan y_1 =$

$$\frac{2xw_0 w_1}{w_1^2 - w_0^2}$$

$A_y = \frac{F_y}{m\sqrt{(w_0^2 - w_1^2)^2 + 4x^2 w_0^2 w_1^2}}$ ， $y_2 = y_1$ ，

$$A_q = \frac{M_0}{(J + me^2)\sqrt{(w_{t0}^2 - w_{T1}^2)^2 + 4x_t^2 w_{t0}^2 w_{T1}^2}}$$

$$\frac{2x_t w_{t0} w_{T1}}{w_{T1}^2 - w_{t0}^2}$$

将  $x_0, y_0, q_0$  代入式(17)~(19)，并求解，可得

$$x_1 = A_{x1} \cos(Wt + f_{x1}) + A_{x2} \sin[(W + w_{T1})t + f_{x2}] +$$

$$A_{x3} \sin[(W - w_{T1})t + f_{x3}] + A_{x4} \cos[(W +$$

$$2w_{T1})t + f_{x4}] + A_{x5} \cos[(W - 2w_{T1})t + f_{x5}]$$

$$y_1 = A_{y1} \sin(Wt + f_{y1}) + A_{y2} \cos[(W + w_{T1})t + f_{y2}] +$$

$$A_{y3} \cos[(W - w_{T1})t + f_{y3}] + A_{y4} \sin[(W +$$

$$2w_{T1})t + f_{y4}] + A_{y5} \sin[(W - 2w_{T1})t + f_{y5}]$$

$$q_1 = A_{q1} \sin[(W + w_1)t + g_1] + A_{q2} \sin$$

$$[(W - w_1)t + g_2] + A_{q3} \cos[(W - w_1 - w_{T1}) \cdot$$

$$t + g_3] + A_{q4} \cos[(W - w_1 + w_{T1})t + g_4] +$$

$$A_{q5} \cos[(W + w_1 + w_{T1})t + g_5] + A_{q6} \cos$$

$$[(W + w_1 - w_{T1})t + g_6]$$

式中： $A_{x1} = \frac{E(W^2 - \frac{1}{2}w_{T1}^2 A_q^2)}{\sqrt{(w_0^2 - W^2)^2 + 4x^2 w_0^2 W^2}}$ ，

$$A_{x2} = \frac{-\frac{1}{2}E(W^2 + w_{T1}^2)A_q}{\sqrt{[w_0^2 - (w_{T1} + W)^2]^2 + 4x^2 w_0^2 (w_{T1} + W)^2}}$$

$$A_{x3} = \frac{-\frac{1}{2}E(W^2 + w_{T1}^2)A_q}{\sqrt{[w_0^2 - (W - w_{T1})^2]^2 + 4x^2 w_0^2 (W - w_{T1})^2}}$$

$$A_{x4} = \frac{-1/4Ew_{T1}^2 A_q^2}{\sqrt{[w_0^2 - (2w_{T1} + W)^2]^2 + 4x^2 w_0^2 (w_{T1} + W)^2}}$$

$$A_{x5} = \frac{-1/4Ew_{T1}^2 A_q^2}{\sqrt{[w_0^2 - (W - 2w_{T1})^2]^2 + 4x^2 w_0^2 (W - 2w_{T1})^2}}$$

$$A_{y1} = A_{x1}, A_{y2} = -A_{x2}, A_{y3} = -A_{x3}, A_{y4} = A_{x4}, A_{y5} = A_{x5},$$

$$A_{q1} = \frac{-mEw_1^2 (A_x - A_y)}{2(J + me^2)\sqrt{[w_{t0}^2 - (W + w_1)^2]^2 + 4x_t^2 w_{t0}^2 (W + w_1)^2}}$$

$$A_{q2} = \frac{-mEw_1^2 (A_x + A_y)}{2(J + me^2)\sqrt{[w_{t0}^2 - (W - w_1)^2]^2 + 4x_t^2 w_{t0}^2 (W - w_1)^2}}$$

$$A_{q3} = \{-mEw_1^2 A_q (A_x + A_y) / 4(J + me^2) \sqrt{[w_{t0}^2 - (W - w_1 - w_{T1})^2]^2 + 4x_t^2 w_{t0}^2 (W - w_1 - w_{T1})^2}\}$$

$$A_{q4} = \{-mEw_1^2 A_q (A_x + A_y) / 4(J + me^2) \sqrt{[w_{t0}^2 - (W - w_1 + w_{T1})^2]^2 + 4x_t^2 w_{t0}^2 (W - w_1 + w_{T1})^2}\}$$

$$A_{q5} = \{-mEw_1^2 A_q (A_x - A_y) / 4(J + me^2) \sqrt{[w_{t0}^2 - (W + w_1 + w_{T1})^2]^2 + 4x_t^2 w_{t0}^2 (W + w_1 + w_{T1})^2}\}$$

$$A_{q6} = \{-mEw_1^2 A_q (A_x - A_y) / 4(J + me^2) \sqrt{[w_{t0}^2 - (W + w_1 - w_{T1})^2]^2 + 4x_t^2 w_{t0}^2 (W + w_1 - w_{T1})^2}\}$$

因为转子弯扭耦合振动响应满足： $x = x_0 + e x_1$ ，

$q = q_0 + e q_1$ ，所以可得各量具体响应表达式

$$x = A_x \cos(w_t t + y_1) + e/E \{A_{x1} \cos(Wt + f_{x1}) + A_{x2} \sin[(W + w_{T1})t + f_{x2}] + A_{x3} \sin[(W - w_{T1}) \cdot t + f_{x3}] + A_{x4} \cos[(W + 2w_{T1})t + f_{x4}] + A_{x5} \cos[(W - 2w_{T1})t + f_{x5}]\} \quad (20)$$

$$y = A_y \cos(w_t t + y_1) + e/E \{A_{y1} \cos(Wt + f_{y1}) + A_{y2} \sin[(W + w_{T1})t + f_{y2}] + A_{y3} \sin[(W - w_{T1}) \cdot t + f_{y3}] + A_{y4} \cos[(W + 2w_{T1})t + f_{y4}] + A_{y5} \cos[(W - 2w_{T1})t + f_{y5}]\} \quad (21)$$

$$q = A_q \cos(w_{T1} t + y_3) + e/E \{A_{q1} \sin[(W + w_1)t + g_1] + A_{q2} \sin[(W - w_1)t + g_2] + A_{q3} \cos[(W - w_1 - w_{T1})t + g_3] + A_{q4} \cos[(W - w_1 + w_{T1}) \cdot t + g_4] + A_{q5} \cos[(W + w_1 + w_{T1})t + g_5] + A_{q6} \cos[(W + w_1 - w_{T1})t + g_6]\} \quad (22)$$

## 2.2 弯振对扭振的影响

观察式(22)知，等式右第一项为外部激励力矩响应，剩余各项为扭振对弯振的响应，由此可见，有质量偏心的转子在圆频率为  $w_1$  的外部激励力情

况下，通过弯扭耦合作用，将激发出圆频率为  $|W \pm w_1|$  和  $|W \pm w_{T1} \pm w_1|$  的扭振来，对于各向同性转子， $A_x \approx A_y$ ，故圆频率为  $W + w_1$  和  $|W + w_1 \pm w_{T1}|$  的扭振幅值很小。先分析  $A_q$  的大小，由上可知

$$A_q = \frac{M_0}{(J + me^2)\sqrt{(w_{i0}^2 - w_{T1}^2)^2 + 4x_i^2 w_{i0}^2 w_{T1}^2}}$$

当  $w_{T1} = w_{i0}$  时， $A_q$  最大，其值为  $A_q = \frac{M_0}{2(J + me^2)x_i w_{i0}}$ ，令  $f_T = \frac{M_0}{(J + me^2)w_{i0}}$ ， $f_T$  为在外力矩  $M_0$  作用下转子的扭转角，一般情况下， $f_T < 1^\circ$ （也即  $f_T < 0.01754\text{rad}$ ），不妨设  $f_T = 0.01754$ ，阻尼系数比  $x_i = 0.05$ ，则  $A_q|_{\max} = 0.17$ 。因弯振幅值  $A_x$  与质量偏心  $e$  为同一数量级，则惯性力矩  $mew_1^2 A_x$  相比于外扭矩  $M_0$  较小，故由弯振引起的  $|W - w_1|$  圆频率的扭振幅值并不明显，而  $|W - w_1 \pm w_{T1}|$  圆频率的扭振幅值是  $|W - w_1|$  的  $A_q$  倍，可见它比  $|W - w_1|$  的幅值至少还要小一个数量级。所以，弯扭耦合将激励出新频率成分的扭振来，但它们的幅值并不明显。

### 2.3 扭振对弯振的影响

观察式(20)，等式右第 1 项为外力  $F_x$  作用下的弯振响应，第 2 项为质量偏心引起的弯振响应，它实际上包括两部分，一部分是幅值为

$$\frac{eW^2}{\sqrt{(w_0^2 - W^2)^2 + 4x^2 w_0^2 W^2}}$$

的经典纯弯曲振动响应，一部分是幅值为  $\frac{1}{2} \frac{ew_{T1}^2 A_q^2}{\sqrt{(w_0^2 - W^2)^2 + 4x^2 w_0^2 W^2}}$ 。考虑扭

振影响时的一倍频激振响应，剩余 4 项为扭振对弯振的影响。可见，扭振将激励产生  $W$ 、 $|W \pm w_{T1}|$  和  $|W \pm 2w_{T1}|$  的圆频率成分的弯振，它们的幅值分别

$$\text{为 } \frac{1}{2} \frac{ew_{T1}^2 A_q^2}{\sqrt{(w_0^2 - W^2)^2 + 4x^2 w_0^2 W^2}}、\left| \frac{e}{E} A_{x2} \right| \text{ 和 } \left| \frac{e}{E} A_{x4} \right|。$$

比较由扭振所激励出的弯振幅值与由质量偏心所引起的纯弯振幅值。当  $W = w_0$  时，纯弯振幅值最大，其值为  $\frac{eW^2}{2xw_0^2}$ ，记作  $A_{\max}$ ，此时，由扭

振激发的一倍频成分幅值为  $\frac{ew_{T1}^2 A_q^2}{4xw_0^2}$ ，记作  $A_{1\max}$ ；

当  $W = |w_0 \pm w_{T1}|$  时， $|W \pm w_{T1}|$  圆频率成分的弯振幅

值最大，其值为  $\frac{e(W^2 + w_{T1}^2)A_q}{4xw_0^2}$ ，记作  $A_{2\max}$ ；当

$W = |w_0 \pm 2w_{T1}|$  时， $|W \pm 2w_{T1}|$  圆频率成分的弯振幅值最大，其值为  $\frac{ew_{T1}^2 A_q^2}{8xw_0^2}$ ，记作  $A_{3\max}$ ；一般情况， $w_{T1}$

与  $W$  数量级相当，可取  $w_{T1} = 0.56W$ ， $A_q$  仍取为 0.17，则

$$\frac{A_{1\max}}{A_{\max}} = \frac{w_{T1}^2 A_q^2}{2W^2} \approx 4 \times 10^{-3}, \quad \frac{A_{2\max}}{A_{\max}} = \frac{(W^2 + w_{T1}^2)A_q}{2W^2} \approx$$

$$1 \times 10^{-1}, \quad \frac{A_{3\max}}{A_{\max}} = \frac{w_{T1}^2 A_q^2}{4W^2} \approx 2 \times 10^{-3}。$$

由此可见，因弯扭耦合作用而产生的  $|W \pm w_{T1}|$  圆频率成分的弯振响应比较明显， $|W \pm 2w_{T1}|$  和  $W$  圆频率成分的弯振响应很弱，其幅值比  $|W \pm w_{T1}|$  小两个数量级。

当转动圆频率  $W$  等于轴系扭振固有圆频率  $w_0$  与弯振固有圆频率  $w_0$  之和或之差时，即  $W = |w_{i0} \pm w_0|$  时，将发生弯扭耦合共振。此时如果存在圆频率为  $w_0$  的弯振，它将引起圆频率为  $w_0$  的扭振，该扭振又将产生圆频率为  $w_0$  的弯振，从而使得圆频率为  $w_0$  的弯振得到加强；如果存在圆频率为  $w_0$  的扭振，它也会引起圆频率为  $w_0$  的弯振，并使圆频率为  $w_0$  的扭振得到加强。在发生弯扭耦合共振时，扭振幅值增长不很明显，由质量偏心所引起的纯弯振幅值增长略大于 10%，这个数值也不大，说明由弯扭耦合共振而导致转子损坏的可能性很小。

### 2.4 重力的影响

如果考虑重力的影响，由式(8)~(10)可见：对于弯振它只影响  $y$  向的平衡位置，并不影响其幅值大小；对于扭振，它将使轴系增加一个扭矩，记作  $M_g$ ，其值为

$$M_g = \frac{-mge}{J + me^2} \left[ \cos Wt + \frac{1}{2} A_q \sin(W + w_{T1})t + \frac{1}{2} A_q \sin(W - w_{T1})t \right]$$

该扭矩将激发出圆频率为  $W$  和  $|W \pm w_{T1}|$  的新的扭振成分来。

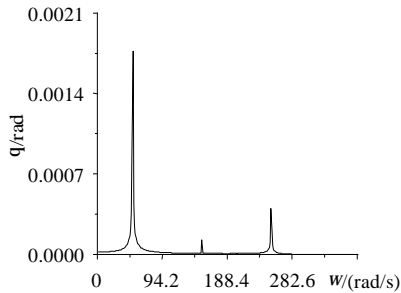
## 3 弯扭耦合振动仿真

### 3.1 计算参数

计算选用的基本参数为： $m=10\text{kg}$ ， $J=0.05\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ， $k=127909.8\text{N/m}$ ， $k_t=386.88\text{N/m}$ ， $e=0.0005\text{m}$ ， $x=0.05$ ， $x_t=0.02$ ，弯振固有圆频率  $w_0=113\text{rad/s}$ ，扭振固有圆频率  $w_{i0}=87.9\text{rad/s}$ 。

### 3.2 弯振对扭振的影响

设定轴系旋转圆频率  $W=150.7\text{rad/s}$ , 弯振激励力  $f_x、f_y$  的圆频率  $w_1=100.5\text{rad/s}$ , 没有外扭矩作用, 图 3 示出了该情况下, 考虑重力影响时的扭振幅值谱。据图可知, 圆频率  $w_1$  下的弯振激发了圆频率为  $W+w_1$  (约为  $251.2\text{rad/s}$ ) 和  $|W-w_1|$  (约为  $50.2\text{rad/s}$ ) 的扭振, 而重力则激发出圆频率为  $W$  的扭振。其中, 圆频率为  $|W-w_1|$  的扭振幅值比其它两个大一个数量级。



考虑重力影响, 且  $W=150.7\text{rad/s}$ ,  $w_1=100.5\text{rad/s}$

图 3 弯振激起的扭振幅值谱

Fig.3 Torsion amplitude spectrum excited by flexural vibration

图 4 描述了轴系旋转圆频率  $W$  固定为  $150.7\text{rad/s}$ , 而弯振激励力圆频率  $w_1$  从  $25.1\text{rad/s}$  逐渐增加到  $314\text{rad/s}$ , 弯振所激励起的圆频率为  $|W-w_1|$  的扭振幅值与弯振激励力圆频率  $w_1$  间的关系。由图可知, 弯振激发的圆频率为  $|W-w_1|$  的扭振幅值在 3 个激励力频率下出现了峰值, 它们分别是  $62.8、238.6$  和  $113\text{rad/s}$ , 前两者圆频率值刚好为旋转圆频率  $W$  与扭振固有圆频率  $w_{t0}$  之差及之和 (即  $|W-w_{t0}|$  与  $W+w_{t0}$ ), 它们激起了扭振固有圆频率, 所以幅值较大; 而后者圆频率为  $113\text{rad/s}$ , 它是弯振的固有圆频率, 由于共振将引起很大的弯振幅值  $A_x$  和  $A_y$  (约为  $w_1=100.5\text{rad/s}$  时的 6 倍), 故激起的扭振幅值也是很大的。可见, 上述数值计算的

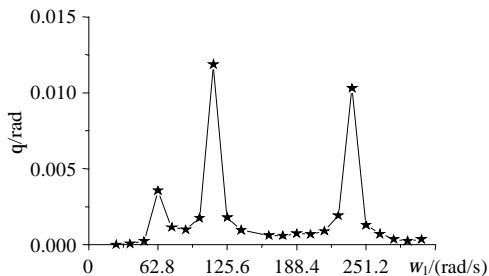


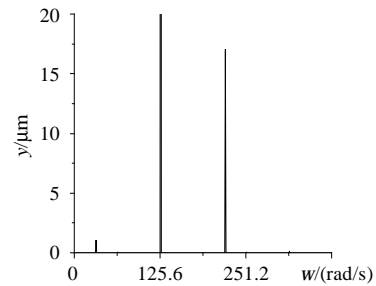
图 4 弯振激起的频率为  $|W-w_1|$  的扭振幅值与激励力频率  $w_1$  的关系

Fig.4 The relation between torsion amplitude with  $|W-w_1|$  frequency excited by flexural and exciting force with  $w_1$  frequency

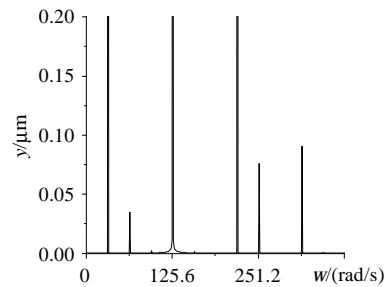
结果与节 2.2 中的理论分析是完全一致的。

### 3.3 扭振对弯振的影响

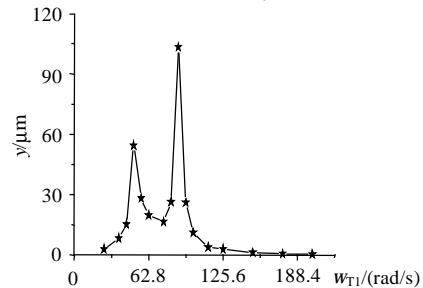
设定轴系旋转圆频率  $W=125.6\text{rad/s}$ , 外扭矩  $M_t$  的圆频率  $w_{T1}=94.2\text{rad/s}$ , 图 5 示出了该情况下弯振幅值谱。由于质量偏心引起的一倍频弯振幅值很大 (约为  $1100\mu\text{m}$ ), 其他频率成分被湮没了, 故把图 5(a) 中纵坐标上限值减小至  $20\mu\text{m}$ , 这样一倍频幅值远超过了上限, 而其它一些峰值则显现出来。由图可清晰看到, 除了一倍频峰值外, 在  $|W-w_{T1}|$  (约为  $31.4\text{rad/s}$ ) 和  $W+w_{T1}$  (约为  $219.8\text{rad/s}$ ) 处也出现了峰值, 它们是由扭振激励产生的, 其中, 圆频率为  $W+w_{T1}$  的幅值远大于  $|W-w_{T1}|$ 。继续减小纵坐标上限值至  $0.2\mu\text{m}$  (图 5(b)), 除上述频率峰值外, 又出现了一些新的峰值, 分别是  $|W-2w_{T1}|$  (对应  $62.8\text{rad/s}$ ) 和  $W+2w_{T1}$  (对应  $314\text{rad/s}$ ) 处, 但它们幅值很小, 比  $W+w_{T1}$  的约小 2 个数量级。这与 2.3 节中的理论分析一致。



(a) 纵坐标限定为  $20\mu\text{m}$



(b) 纵坐标限定为  $0.2\mu\text{m}$



(c) 扭振激起的频率为  $W+w_{T1}$  的弯振幅值与外扭振频率  $w_{T1}$  的关系

$W=125.6\text{rad/s}$ ,  $w_{T1}=94.2\text{rad/s}$

图 5 扭振激起的弯振幅值谱  
Fig.5 Flexural vibration amplitude spectrum excited by torsion

图 5(c)描述了轴系旋转圆频率  $W$  固定为  $62.8\text{rad/s}$ , 而外扭矩频率  $w_{T1}$  从  $25.1\text{rad/s}$  逐渐增加到  $188.4\text{rad/s}$  时, 扭振所激励起的圆频率为  $W+w_{T1}$  的弯振幅值与外扭矩圆频率  $w_{T1}$  间的关系。由图可知, 扭振激发的圆频率为  $W+w_{T1}$  的弯振幅值在  $50.2\text{rad/s}$  和  $87.9\text{rad/s}$  两个圆频率下出现了峰值, 前者圆频率值刚好为弯振固有圆频率与旋转圆频率之差(即  $|W-w_0|$ ), 它激起了弯振固有圆频率, 所以幅值较大; 而后者是扭振的固有圆频率值, 由于共振将引起很大的扭振幅值  $A_q$ , 故激起的弯振幅值也是很大, 其值约为一倍频的 10%。

## 4 结论

本文建立了弯扭耦合振动非线性微分方程, 该方程具有较强的非线性, 质量偏心是导致弯扭耦合的前提条件, 由于偏心的存在, 扭振的转动惯量将略有增加, 从而对扭振固有圆频率产生一定的影响。通过理论求解该微分方程, 以及数值验证, 还得到了更多的分析结果。

(1) 有质量偏心的转子在圆频率为  $w_1$  的外部激励力情况下, 通过弯扭耦合作用, 将激发出圆频率为  $|W \pm w_1|$  和  $|W \pm w_{T1} \pm w_1|$  的扭振。其中, 圆频率为  $|W - w_1|$  的扭振幅值最大, 比其它的至少大一个数量级。

(2) 当转子有圆频率为  $w_{T1}$  的外扭矩作用时, 扭振将激励产生  $W$ 、 $|W \pm w_{T1}|$  和  $|W \pm 2w_{T1}|$  的圆频率成分的弯振。其中,  $|W \pm w_{T1}|$  圆频率成分的弯振响应明显,  $|W \pm 2w_{T1}|$  和  $W$  圆频率成分的弯振响应很弱, 其幅值比  $|W \pm w_{T1}|$  的小两个数量级。

(3) 转动圆频率  $W$  等于轴系扭振固有圆频率  $w_{T0}$  与弯振固有圆频率  $w_0$  之和或之差时, 即  $W = |w_{T0} \pm w_0|$  时, 有可能发生弯扭耦合共振。当外激励力(或力矩)的圆频率为弯振(或扭振)固有圆频率时, 它也会激发出较大的扭振(或弯振)。

(4) 即便是在发生弯扭耦合共振时, 弯振和扭振幅值增长也并不显著, 因此由弯扭耦合共振而导致转子损坏的可能性很小, 但这些弯扭耦合特征有可能对转子的故障诊断提供有益的信息, 从而提高诊断的准确率。

## 参考文献

- [1] 何成兵, 杨昆, 顾煜炯. 质量偏心对碰摩转子弯振和扭振特性的影响[J]. 中国电机工程学报, 2002, 22(7): 105-110.  
He Chengbing, Yang kun, Gu Yujiong. Influence of mass eccentricity

- on bending and torsional vibrations of a rub-impact rotor [J]. Proceedings of the CSEE, 2002, 22(7): 105-110(in Chinese).
- [2] 胡芑庆, 温熙森. 转子碰摩故障振动特征的数值分析与辨识方法[J]. 中国电机工程学报, 2002, 22(12): 70-73.  
Hu Niaoqing, Wen Xisen. Analysis and identification methods for vibration haracteristics of rotor rub-impact fault[J]. Proceedings of the CSEE, 2002, 22(12): 70-73(in Chinese).
- [3] 杨建刚, 蔡霆, 高鑫. 转子—轴承耦合系统动力响应问题研究[J]. 中国电机工程学报, 2003, 23(5): 94-97.  
Yang Jiangan, Cai Ting, Gao Wei. Research on the dynamic response problem of coupled rotor-bearing system[J]. Proceedings of the CSEE, 2003, 23(5): 94-97(in Chinese).
- [4] 邱家俊. 电机的机电耦合与磁固耦合非线性振动研究[J]. 中国电机工程学报, 2002, 22(5): 109-115.  
Qiu Jiajun. Investigation on coupled mechanical and electrical vibration and coupled magnetical and solid vibration of electrical machine [J]. Proceedings of the CSEE, 2002, 22(5): 109-115(in Chinese).
- [5] 史进渊, 杨宇, 孙庆, 等. 大型汽轮发电机故障特征规律的研究[J]. 中国电机工程学报, 2000, 20(7): 44-47, 51.  
Shi Jinyuan, Yang Yu, Sun Qing, et al. Study on fault characteristics law for large capacity turbogenerators[J]. Proceedings of the CSEE, 2000, 20(7): 44-47, 51(in Chinese).
- [6] 何成兵, 顾煜炯, 杨昆. 一种新的转子碰摩故障诊断特征的研究[J]. 机械强度, 2003, 25(4): 1-5.  
He Chengbing, Gu Yujiong, Yang Kun. Research of a new characteristic for fault diagnosis of rub-impact rotor[J]. Journal of Mechanical Strength, 2003, 25(4): 1-5(in Chinese).
- [7] 张勇, 蒋滋康. 旋转轴系弯曲振动与扭转振动耦合的分析[J]. 清华大学学报, 2000, 40(6): 80-83.  
Zhang Yong, Jiang Zikang. Analysis of the coupled flexural-torsional vibrations of rotory shaft systems[J]. Journal of Tsinghua University, 2000, 40(6): 80-83(in Chinese).
- [8] 张勇, 蒋滋康. 轴系弯扭耦合振动的数学模型[J]. 清华大学学报, 1998, 38(8): 114-117.  
Zhang Yong, Jiang Zikang. Mathematic model of coupled bending and torsional vibration of shaft systems[J]. Journal of Tsinghua University, 1998, 38(8): 114-117(in Chinese).
- [9] 黄典贵. 平行不对中和不平衡故障转子扭振特征的研究[J]. 机械工程学报, 1998, 34(5): 91-100.  
Huang Diangui. Research on the torsional characteristics of a rotor with unbalance and misalignment[J]. Journal of Mechanical Engineering, 1998, 34(5): 91-100(in Chinese).
- [10] Huang Diangui. Experiment on the characteristics of torsional vibration of rotor-to-stator rub in turbomachinery[J]. Tribology International, 2000, 33: 75-79.
- [11] 刘英哲, 傅行军. 汽轮发电机组扭振[M]. 北京: 中国电力出版社, 1997.
- [12] 傅忠广, 杨昆, 宋之平. 弯曲和质量失衡对转子弯扭耦合振动影响的探讨[J]. 汽轮机技术, 1999, 41(4): 197-202.  
Fu Zhongguang, Yang Kun, Song Zhiping. Research on the effect of the bend and mass unbalance on the coupling flexural-torsional vibration of rotor[J]. Turbine Technology, 1999, 41(4): 197-202(in Chinese).
- [13] 傅忠广, 任福春, 杨昆. 弯扭耦合振动模型及重力影响因素初探[J]. 华北电力大学学报, 1998, 25(1): 67-72.  
Fu Zhongguang, Ren Fuchun, Yang Kun. The coupling model of the latera and torsional vibrations of the rotor system and the gravity influence[J]. Journal of north china electric power university, 1998, 25(1): 67-72(in Chinese).

收稿日期: 2006-02-15.

作者简介:

何成兵(1974—), 男, 博士, 讲师, 从事汽轮发电机组弯扭耦合振动及故障诊断研究, [hcbyy@ncepubj.edu.cn](mailto:hcbyy@ncepubj.edu.cn).

(责任编辑 韩 蕾)