

## 顺坡渐扩矩形明渠水跃计算公式

赵顺安, 宋志勇

(中国水利水电科学研究院 水力学研究所, 北京 100044)

**摘要:** 顺坡渐扩矩形明渠常被用在排水工程中作为排水口与河道的连接段。由于河道水位变化, 水跃将发生在连接段。本文从动量守恒原理出发推导了顺坡渐扩矩形明渠水跃方程, 在假定水跃水质点作二维运动和水跃段内质点垂向加速度近似为常量的基础上推导了水跃长度近似计算公式。并与扩散角为 $9^\circ$ 、水平坡度角为 $6^\circ$ 特定条件的模型试验结果进行了对比, 结果吻合良好, 可供类似工程参考。

**关键词:** 顺坡渐扩; 明渠; 水跃

**中图分类号:** TV133 **文献标识码:** A

在多数利用河水作为冷却水的火力发电厂的排水工程中, 排水口出口高程与河道水面之间常存在一定的位差, 需作消能工程或连接工程。连接工程常采用一种较简单的顺坡渐扩矩形明渠与河道相连, 通过水跃进行消能。河道的水位随河道流量的变化而变化, 在高水位时, 水跃将发生在顺坡渐扩的矩形明渠中, 如图1所示。因此, 进行顺坡渐扩式水跃计算对于工程设计具有重要意义。但目前还没有顺坡渐扩矩形明渠的水跃计算公式。

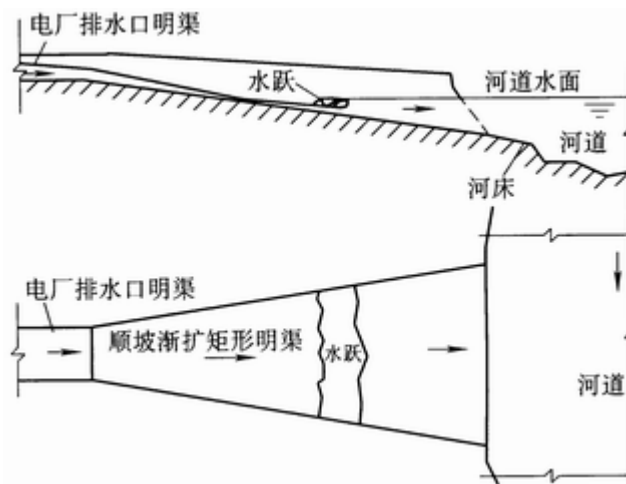


图1 排水口顺坡渐扩矩形消能工程

本文从动量质量守恒原理出发推导出了顺坡渐扩矩形明渠水跃计算公式, 在作了一些假定的基础上推导了水跃长度计算公式, 并进行了简单地模型试验验证, 结果吻合良好。水跃的计算是一个半经验半理论方法, 本文给出的是理论计算公式, 仅作了特定试验的验证, 要较好的解决顺坡渐扩矩形明渠水跃计算, 还应进行大量试验工作, 对不同扩散角度和顺坡的水跃进行验证, 以确定其适用性。

收稿日期: 2004-10-22

作者简介: 赵顺安(1962-), 男, 山西曲沃人, 高级工程师, 主要从事冷却水、冷却塔研究。

1 顺坡渐扩矩形明渠水跃计算公式推导

顺坡渐扩矩形水跃可简化为图2，沿顺坡为X轴可写出动量方程，有

$$\frac{\rho Q}{g}(\alpha_2 V_2 \cos(\psi) - \alpha_1 V_1) = P_1 - P_2 \cos(\psi) + W \sin(\psi) + 2P_n \sin(\theta) - F_f \quad (1)$$

式中： $Q$ 为流量( $m^3/s$ )； $\gamma$ 为水的容重( $N/m^3$ )； $V_1$ 和 $V_2$ 分别表示水跃前后断面处的平均流速( $m/s$ )； $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 分别表示水跃前后断面处的水流动量修正系数； $P_1$ 和 $P_2$ 分别表示水跃前后断面上的动水总压力( $N$ )； $W$ 为水跃段水流的自重( $N$ )； $F_f$ 为水跃中水流受到的明渠阻力( $N$ )； $\theta$ 为顺坡与水平的夹角； $\psi$ 为渐扩明渠水平扩散角。

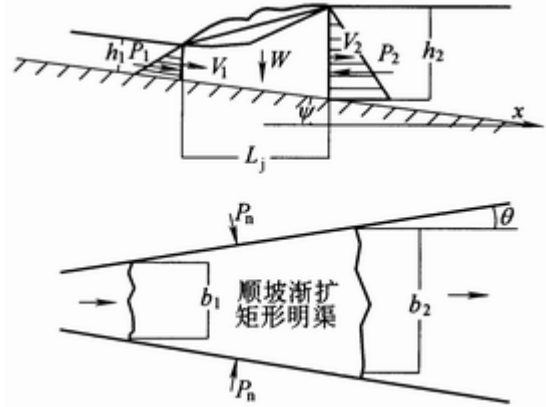


图2 顺坡渐扩矩形水跃

自重可近似为

$$W = \frac{1}{2} \gamma (b_1 h_1 + b_1 h_2) l_j + 2 \left( \frac{1}{3} \gamma l_j h_2 (b_2 - b_1) / 2 \right) = \gamma l_j \left[ \frac{1}{2} (b_1 h_1 + b_1 h_2) + \frac{1}{3} h_2 (b_2 + b_1) \right] \quad (2)$$

式中： $b_1$ 和 $b_2$ 分别为水跃前后的水面宽度( $m$ )； $h_1$ 和 $h_2$ 分别为水跃前后的水深( $m$ )； $l_j$ 为水跃长度( $m$ )。

水跃前后断面和侧壁的动力压力为

$$\begin{cases} P_1 = \frac{1}{2} \gamma h_1^2 b_1 \cos(\psi); P_2 = \frac{1}{2} \gamma h_2^2 b_2; \\ P_n = \frac{1}{2} \gamma \left( \frac{1}{2} h_1^2 + \frac{1}{2} h_2^2 \right) l_j \cos(\psi) = \frac{1}{4} \gamma (h_1^2 + h_2^2) \frac{(b_2 - b_1)}{2 \sin(\theta)} \cos(\psi) \end{cases} \quad (3)$$

忽略水跃段阻力，令  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ，将式(2)和式(3)代入式(1)整理后有

$$\frac{\alpha \rho Q^2}{g} \left( \frac{\cos(\psi)}{b_2 h_2} - \frac{1}{b_1 h_1} \right) = \frac{1}{2} \gamma h_1^2 b_1 \cos(\psi) - \frac{1}{2} \gamma h_2^2 b_2 \cos(\psi) + \gamma l_j (b_1 h_1 + b_1 h_2) + \frac{1}{3} \gamma h_2 (b_2 - b_1) \sin(\psi) + \frac{1}{4} \gamma (h_1^2 + h_2^2) \cos(\psi) (b_2 - b_1) \quad (4)$$

式(4)即为顺坡渐扩矩形明渠水跃的基本方程。

若上式中  $\psi = 0$ 即为水平渐扩式水跃方程

$$\frac{\alpha\gamma Q^2}{g} \left( \frac{1}{b_2 h_2} - \frac{1}{b_1 h_1} \right) = \frac{1}{2} \gamma h_1^2 b_1 - \frac{1}{2} \gamma h_2^2 b_2 + \frac{1}{4} \gamma (h_1^2 + h_2^2) (b_2 - b_1) \quad (5)$$

令  $\beta = \frac{b_2}{b_1}$  ;  $\eta = \frac{h_2}{h_1}$  ;  $F_{r1} = \frac{V_1}{\sqrt{gh_1}}$  式(5)可变化为

$$\alpha F_{r1}^2 \left( \frac{1}{\eta\beta} - 1 \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \eta^2 \beta + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\beta} + \frac{\eta^2}{\beta} \right) (\beta - 1) = 0.5 - 0.5 \eta^2 \beta + \frac{1}{2} (1 + \eta^2) (\beta - 1) \quad (6)$$

简化式(6)有

$$4\alpha F_{r1}^2 \left( \frac{1}{\eta\beta} - 1 \right) = 2 - 2\eta^2 \beta + (1 + \eta^2) (\beta - 1); \frac{4\alpha F_{r1}^2}{\beta(1 + \beta)} = \frac{\eta(1 - \eta^2)}{1 - \eta\beta} \quad (7)$$

式(7)即为水平渐扩式水跃的无量纲方程<sup>[1-3]</sup>。

若上式中  $\beta = 1$  , 即为棱柱体矩形明渠的水跃无量纲方程<sup>[1-4]</sup>。即

$$2 F_{r1}^2 = (1 + \eta); 2 q^2 = gh_2^2 h_1 + gh_1^2 h_2 \quad (8)$$

## 2 水跃长度的近似计算公式的推导

在水跃段内水流受上下游水压力差作用,加速向上跃起。同时水流会向明渠两侧及深度方向逐步扩散,水流质点沿程减速,水跃中流速大致分布情况如图3示。根据文献[6, 7]水跃长度推导和对水跃中水流运动的假定,本文作如下简化假定:(1)水跃主流为恒定流;(2)水跃中间质点作二维运动;(3)水跃段内由压力差引起的水流质点沿垂向加速度为  $f_p$ , 忽略其在水跃程内的变化,近似为常量。

以主流和回流之间的交界线上水跃中线质点运动过程进行分析,取如图4坐标系建立沿y方向随时间的运动方程

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = (f_p - g) \cos \psi \quad (9)$$

式中:  $t$ 为时间;  $y$ 为水跃质点在  $t$ 内沿y方向运动的距离;  $g$ 为重力加速度。

将式(9)积分并代入初始条件( $t=0$ 时质点在坐标原点)得

$$y = \frac{1}{2} ((f_p - g) \cos \psi) t^2 \quad (10)$$

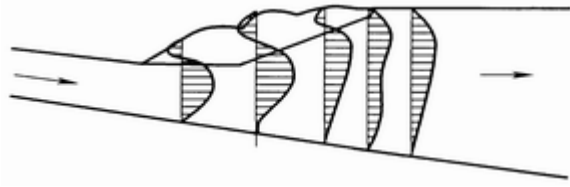


图 3 顺坡渐矩形明渠水跃流速分布示意

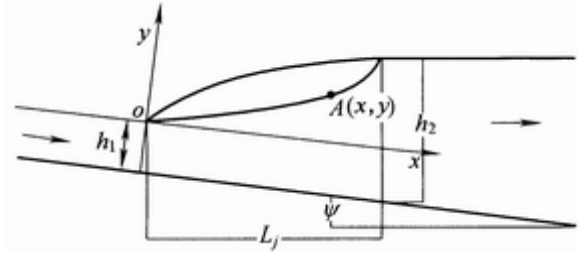


图 4 水跃长度分析坐标系示意

设在  $t$  时刻，该质点运动至  $A$  处，假定沿  $x$  向速度与该断面处的平均速度  $V$  成正比，有

$$\frac{dx}{dt} = cV \tag{11}$$

式中： $c$  为比例系数； $V$  为  $A$  处断面平均流速，可由连续方程求得。

$$V_1 h_1 b_1 \cos \psi = (h_1 + y)(b_1 + 2xtg \theta) V$$

$$V = \frac{V_1 h_1 b_1 \cos \psi}{(h_1 + y)(b_1 + 2xtg \theta)} \tag{12}$$

式中： $V_1$ 、 $b_1$ 、 $h_1$  分别为水跃初始断面平均流速、水面宽度和水深， $x, y$  为  $A$  坐标。在扩散角和顺坡坡度不大时，式(12)可近似为

$$V = \frac{c_1 V_1 h_1 b_1 \cos \psi}{(h_1 + y)(b_1 + 2\theta x)} \tag{13}$$

式中： $c_1$  为式(12)中用  $\cos \psi$  近似代替  $tg \theta$  的修正系数。

式(13)代入式(11)有

$$\frac{dx}{dt} = \frac{cc_1 V_1 h_1 b_1 \cos \psi}{(h_1 + y)(b_1 + 2\theta x)} \tag{14}$$

将式(14)沿水跃段  $OB$  积分有

$$\int_0^{x_j} (b_1 + 2\theta x) dx = \int_0^{t_j} \frac{cc_1 V_1 h_1 b_1 \cos \psi}{(h_1 + y)} dt = \int_0^{t_j} \frac{cc_1 V_1 h_1 b_1 \cos \psi}{\left( h_1 + \frac{1}{2}(f_p - g) \cos(\psi) t^2 \right)} dt \tag{15}$$

$t_j$  为质点从  $O$  运动至  $B$  的时间，整理可得

$$b_1 x_j + \theta x_j^2 = cc_1 V_1 h_1 \cos(\psi) \frac{2}{(f_p - g) \cos(\psi)} \sqrt{\frac{(f_p - g) \cos(\psi)}{2h_1}} \operatorname{tg}^{-1} \left( \sqrt{\frac{(f_p - g) \cos(\psi)}{2h_1}} t_j \right) \quad (16)$$

式中： $x_j$  为水质点在 B 点的 x 坐标值。

最后整理得

$$b_1 x_j + \theta x_j^2 = cc_1 V_1 h_1 \cos(\psi) \sqrt{\frac{2}{h_1 (f_p - g) \cos(\psi)}} \operatorname{tg}^{-1} \left( \sqrt{\frac{h_2 \cos(\psi) - h_1}{h_1}} \right) \quad (17)$$

令  $c_0 = cc_1 \cos(\psi) \sqrt{\frac{2}{h_1 (f_p - g) \cos(\psi)}}$ ，则式(17)变化为

$$b_1 x_j + \theta x_j^2 - c_0 V_1 b_1 h_1 \operatorname{tg}^{-1} \left( \sqrt{\cos(\psi) \eta - 1} \right) = 0 \quad (18)$$

解式(18)可得

$$x_j = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4\theta c_0 V_1 b_1 h_1 \operatorname{tg}^{-1} \left( \sqrt{\cos(\psi) \eta - 1} \right)}}{2\theta} \quad (19)$$

$x_j$  为正值取正根，那么水跃长度为

$$L_j = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 + 4\theta c_0 V_1 b_1 h_1 \operatorname{tg}^{-1} \left( \sqrt{\cos(\psi) \eta - 1} \right)}}{2\theta} \cos(\psi) + h_1 (\cos(\psi) \eta - 1) \sin(\psi) \quad (20)$$

式中： $c_0$  为一个待定的综合系数，它与水跃的形态有关，它包含了水跃前水流特征及公式推导过程中简化近似的影响，可通过试验求得。式(20)即为顺坡渐扩矩形明渠水跃的跃长计算公式。

### 3 顺坡渐扩矩形明渠水跃方程的解

令  $\beta = \frac{b_2}{b_1}$ ； $\eta = \frac{h_2}{h_1}$ ； $F_{r1} = \frac{V_1}{\sqrt{gh_1}}$  式(4)可变化为

$$\frac{\alpha F_{r1}^2 \left( \frac{\cos(\psi)}{\eta \beta} - 1 \right)}{1} = \frac{1}{2} \cos(\psi) - \frac{1}{2} \eta^2 \beta \cos(\psi) + \frac{L_j}{h_1} \left( \frac{1}{2} (1 + \eta) + \frac{1}{3} \eta (\beta - 1) \right) \sin(\psi) + \frac{1}{4} (1 + \eta^2) (\beta - 1) \cos(\psi) \quad (21)$$

$$4\alpha F_{r1}^2 \left( \frac{\cos(\psi)}{\eta\beta} - 1 \right) = (1 - \eta^2)(1 + \beta)\cos(\psi) + \frac{(\beta - 1)b_1}{\text{tg}(\theta)h_1} \left( (1 + \eta) + \frac{2}{3}\eta(\beta - 1) \right) \sin(\psi) \quad (22)$$

式(21)即为顺坡渐扩矩形水跃无量纲方程。上式可写为

$$(1 - \eta^2)\eta(1 + \beta)\cos(\psi) + \eta \frac{(\beta - 1)b_1}{\text{tg}(\theta)h_1} \left( (1 + \eta) + \frac{2}{3}\eta(\beta - 1) \right) \sin(\psi) - 4\alpha F_{r1}^2 \left( \frac{\cos(\psi)}{\eta\beta} - \eta \right) = 0 \quad (23)$$

顺坡渐扩矩形明渠水跃计算方程(23)中包含了跃前水深、水面宽度、跃前水流弗汝德数和渐扩明渠的扩散角和顺坡与水平夹角, 这些参数为已知参数, 和为待求参数, 可写成水跃长度与扩散角的函数, 与式(20)联列即可求解。式(23)中是能量修正系数, 与断面流速分布、断面弗汝德数等有关, 在顺坡矩形明渠中<sup>[1]</sup>, 当tg( )>=0.05时 =1.030, 当tg( )<0.05时 =1.00。本文近似按 =1.00计算, 较准确值可通过试验研究确定。

式(20)和式(23)是一组非线性方程, 可通过牛顿迭代法进行求解。

式(23)与式(20)可改写为

$$F_1 = (1 - \eta^2)\eta(1 + \beta)\cos(\psi) + \eta \frac{(\beta - 1)b_1}{\text{tg}(\theta)h_1} \left( (1 + \eta) + \frac{2}{3}\eta(\beta - 1) \right) \sin(\psi) - 4\alpha F_{r1}^2 \left( \frac{\cos(\psi)}{\eta\beta} - \eta \right) = 0$$

$$F_2 = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4\theta c_0 V_1 b_1 h_1 \text{tg}^{-1}(\sqrt{\cos(\psi)\eta - 1})}}{2\theta} \cos(\psi) + h_1 (\cos(\psi)\eta - 1) \sin(\psi) - L_j = 0$$

对F<sub>1</sub>和F<sub>2</sub>方程进行有限差分近似得

$$F_1 + \frac{\partial F_1}{\partial \eta} \Delta \eta + \frac{\partial F_1}{\partial L_j} \Delta L_j = 0; \quad F_2 + \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \Delta \eta + \frac{\partial F_2}{\partial L_j} \Delta L_j = 0 \quad (24)$$

解方程组式(24)得

$$\Delta \eta = \frac{F_2 \left/ \frac{\partial F_2}{\partial L_j} - F_1 \left/ \frac{\partial F_1}{\partial L_j} \right.}{\frac{\partial F_1}{\partial \eta} \left/ \frac{\partial F_1}{\partial L_j} - \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \left/ \frac{\partial F_2}{\partial L_j} \right.} \quad \Delta L_j = -\frac{F_1}{\frac{\partial F_1}{\partial L_j}} - \Delta \eta \frac{\frac{\partial F_1}{\partial \eta}}{\frac{\partial F_1}{\partial L_j}} \quad (25)$$

先假设与L<sub>j</sub>的一个近似值, 由式(25)求得更接近精确解的近似值, 进行多次迭代, 直到获得满意解。

水跃的求解是一个半经验半理论的方法, 水跃长度通常可通过试验来确定。如: 矩形明渠、梯形明渠、棱柱顺坡明渠及矩形水平扩散明渠的水跃计算公式中水跃长度就是通过大量试验给出的经验公式<sup>[1, 3, 4]</sup>。

若已知水跃长度那么水跃方程式(22)中仅含一个未知数, 可按牛顿迭代法求解, 亦可将式(23)改写为

$$F_1 = a^3 + b^2 + c + d = 0 \quad (27)$$

其中： $a = -(1 + \dots) \cos(\dots)$ ； $b = \frac{(\beta - 1) \sin(\psi) b_1 \left(1 + \frac{2}{3}(\beta - 1)\right)}{\text{tg}(\theta) h_1}$ ；

$$c = 4\alpha F_{r1}^2 + \frac{(\beta - 1) b_1}{\text{tg}(\theta) h_1} \sin(\psi) + (1 + \beta) \cos(\psi)；d = -4\alpha F_{r1}^2 \frac{\cos(\psi)}{\beta}。$$

令  $x = \frac{b}{3a}$ ，将式(27)可化简为卡尔丹公式<sup>[5]</sup>，即

$$x^3 + p x + q = 0 \quad (28)$$

其中： $p = \frac{b^2}{3a} + \frac{c}{a}$ ； $q = \frac{d}{a} - \frac{cb}{3a^2} - \frac{14b^2}{27a^2}$

式(28)可按卡尔丹公式直接求解。

#### 4 顺坡渐扩矩形明渠水跃方程的解的验证

顺坡渐扩式水跃的试验资料未见有文献资料，作者在研究某电厂排水工程时，进行特定扩散角、坡度及水量的(扩散角 = 9° 和坡度 = 6°)顺坡渐扩式水跃试验<sup>[8]</sup>，试验中，扩散角 = 9° 时未发现明显的侧壁分离现象。试验结果与式(27)计算结果对比列于下表1，由表1可见式(27)计算结果与试验吻合良好。

表1 顺坡渐扩式水跃资料

水量/(10 <sup>-3</sup> × m <sup>3</sup> /s)	水跃长 度/m	跃前水深 /(× 10 <sup>-3</sup> m)	跃前水 宽/m	跃前佛 汝德数 F <sub>r1</sub>	跃后水深 (10 <sup>-3</sup> m)	跃后水 宽/m	计算水深 /(× 10 <sup>-3</sup> m)	水深计 算差(%)	综合系数C <sub>0</sub> 计算结果
7.3	0.30	6	0.65	7.7	84	0.74	84	0	24.9
7.3	0.25	7	0.58	6.9	83	0.66	83	0	18.9
7.3	0.22	8	0.52	6.3	87	0.60	84	3	15.4
21.2	0.43	15	0.64	5.8	141	0.76	144	2	13.3

根据试验结果，由式(20)可推算出综合系数C<sub>0</sub>，列于表1末列，通过归纳可得出综合系数的经验公式

$$C_0 = 6.0 F_{r1} - 21.7 \quad (29)$$

由式(29)和式(20)可计算水跃长度，与试验结果比较列于表2，结果表明式(20)计算结果与试验值吻合良好。

表2 水跃长度计算结果

水量/( $10^{-3} \times$ $m^3/s$ )	跃前水深/( $\times$ $10^{-3}m$ )	跃前水 宽/m	跃前佛汝德 数 $F_{r1}$	跃后水深 /( $10^{-3}m$ )	跃后水 宽/m	水跃长 度/m	计算长 度/m	误差 (%)
7.3	6	0.65	7.7	84	0.74	0.30	0.30	-1
7.3	7	0.58	6.9	83	0.66	0.25	0.26	3
7.3	8	0.52	6.3	87	0.60	0.22	0.23	4
21.2	15	0.64	5.8	141	0.76	0.43	0.42	-3

作者在文献[8]中仅是对某一特定工程问题进行的模型试验,无法总结给出水跃长度经验计算公式,要较好地解决顺坡渐扩矩形明渠水跃的计算还需进行大量、系统的试验工作。

## 5 结语

本文给出了顺坡渐扩矩形明渠水跃的计算公式(23)和跃长计算公式(20),在特定坡度( $6^\circ$ )与扩散角( $9^\circ$ )顺坡渐扩式水跃方程计算结果经过与模型试验对比,吻合良好,可供类似工程计算参考。在水平渐扩式明渠中,扩散角较大时,会出现侧壁分离产生回流<sup>[1]</sup>,对于大扩散角与大坡度时,本文所推导的公式宜通过试验验证。要较好地解决顺坡渐扩矩形明渠水跃的计算,本文仅是一个开端,还需进行大量系统的试验工作。

## 参考文献:

- [1] 成都科技大学水力学教研室. 水力学[M]. 北京:人民教育出版社,1980.
- [2] Hunter Rouse. Elementary Mechanics of Fluids, Dover Publications, Inc, 1946.
- [3] 清华大学水力学教研组. 水力学[M],北京:高等教育出版社,1995.
- [4] 李崇智,等. 跌水与陡坡[M]. 北京:水利出版社,1982.
- [5] 《数学手册》编写组. 数学手册[M]. 北京:高等教育出版社,1979.
- [6] 吴宇峰,刘焕芳. 水平矩形扩散水跃跃长的研究[J]. 水利水电技术,2003,34(11):51-52.
- [7] 詹明安,周建国,黄文政. 关于水跃长度的计算[J]. 人民长江,1990,(3).
- [8] 赵顺安,宋志勇. 分宜发电厂技改工程温排水物理模型试验报告[R]. 北京:中国水利水电科学研究院,2004.

## Formula for calculation of hydraulic jump in gradually broadened sloping open channel

ZHAO Shun-an, SONG Zhi-yong

(China Institute of Water Resources and Hydropower Research, Beijing 100044, China)

**Abstract:** The gradually broadened sloping open channel is often used to connect the outfall and river in draining



engineering. Hydraulic jump will happen to the channel. Based on the momentum equation and continuous equation of the flow the formula for calculating this kind of hydraulic jump in rectangular channel is deduced. By assuming the flow is 2-D and the vertical accelerations of the particles in hydraulic jump are constant, an approximate formula for calculating hydraulic jump length is proposed. The validity of the proposed formula is verified by model test for channel with divergence angle  $9^\circ$  and slope  $6^\circ$ .

**Key words:** hydraulic jump; gradually broaden sloping channel; length of jump