

# 基于非均匀阻尼模型 的二阶上界函数暂态稳定域估计方法

刘峰, 邱家驹

(浙江大学电气学院, 浙江省 杭州市 310027)

## TRANSIENT STABILITY DOMAIN ESTIMATION USING A SECOND ORDER BOUNDING FUNCTION BASED ON THE NON-UNIFORM DAMPING MODEL

LIU Feng, QIU Jia-ju

(Electrical Engineering College, Zhejiang University, Hangzhou 310027, Zhejiang Province, China)

**ABSTRACT:** Based on the classical model of multi-machine power system with non-uniform damping, by the aid of the Taylor Theorem and LaSalle Invariance Principle, we present a method for constructing a closed hyper-ball that strictly resides in transient stability domain. This method is termed second order upper bounding function method. First of all, we derive the analytical expression and computational steps of the approximated stability region. Two numerical examples are provided in the end, in contrast to first order upper bounding function method, the method in this paper has a better performance in conservative character. What is more, it is strict and reliable and avoids the difficulty of computing UEP that is essential in traditional transient energy function methods.

**KEY WORDS:** Electric power engineering; Power system; Non-uniform damping model; Transient stability domain; Lyapunov function; Second order upper bounding function method

**摘要:** 该文基于多机系统非均匀阻尼模型, 借助泰勒定理和拉萨尔不变性原理提出了一个新的构建暂态稳定域闭合子集的解析方法——二阶上界函数法。文中首先介绍了构建此稳定域方法的解析表达式和计算步骤, 然后针对9节点系统和10机39节点算例系统分别进行了仿真计算, 仿真结果表明: 相比一阶上界函数法, 文中所提方法保守性有所改善且严格可靠, 而且还避免了计算不稳定平衡点这个传统能量函数法存在的难题。

**关键词:** 电力工程; 电力系统; 阻尼模型; 暂态稳定域; 李亚普诺夫函数; 二阶上界函数

## 1 引言

现代互联电力系统是一个典型的复杂大系统。

保证它的安全稳定运行是电网运行、调度、规划、设计及科研等部门的一项极为重要的工作。系统受大扰动之后的暂态稳定分析和快速决策是其核心课题之一。

尽管暂态稳定域方面的研究至今已有至少40多年的历史, 近年来国内学者也对此进行了相关的理论研究<sup>[1-8]</sup>, 但构建精确的稳定域仍是很困难的。经典的祖波夫法计算量极大, 很难求得封闭形式的解<sup>[9]</sup>, 因此难以应用到多机系统; 势能边界法 PEBS 只能在特定的条件下才能给出没有错误的稳定域估计, 也就是说可能给出乐观的也就是错误的估计。自20世纪80年代提出的基于非线性动力系统理论的稳定域边界理论<sup>[10-12]</sup>将稳定域边界概括为稳定边界上不稳定平衡点的稳定流形并集, 在理论上是一个很大的突破, 但其要涉及到复杂的稳定流形的计算, 这是希望能够尽量避免的。

对任何具有孤立平衡点的非线性动力系统, 精确稳定域的一个闭合子集能够用二次型李亚普诺夫函数来表示<sup>[13]</sup>。然而, 对非线性动力系统来说, 如何计算这个闭合子集却没有一般通用的方法。

文[14]中基于均匀阻尼的多机经典模型借助拉格朗日定理进行了稳定域分析, 从精确度来讲, 拉格朗日定理实质上是保留至一阶项的稳定域分析。对比文[14], 本文将做出两点理论修正: ① 将模型推广至非均匀阻尼经典模型; ② 借助保留至二阶项的泰勒定理和拉萨尔不变性原理构建了一个严格的闭合子集, 称之为二阶上界函数法。本文拓宽了该方法的应用领域, 涵盖了均匀阻尼和零阻尼模型下

的稳定域分析, 最终仿真结果表明, 相比一阶上界函数法, 系统保守性有所改善, 提高了结果性能。

## 2 多机系统的暂态稳定域

### 2.1 系统泰勒定理表达式

非均匀阻尼  $n$  机系统的经典模型可表示为<sup>[9]</sup>:

$$dd_i/dt = w_i, \quad i=1,2,\dots,n \quad (1)$$

$$dw_i/dt = -D_i w_i/M_i + [P_{mi} - P_{gi}(\delta)]/M_i \quad (2)$$

$$P_{gi} = E_i \sum_{l=1}^n E_l (G_{il} \cos d_{il} + B_{il} \sin d_{il}) \quad (3)$$

设  $(d^0, w^0)$  为平衡点, 显然  $w^0 = 0$ , 在平衡点处有

$$P_{mi} = P_{gi}(d^0) \quad (4)$$

令  $x_i = d_{in} - d_{in}^0, y_i = w_i - w^0 = w_i$ ,

$$G'_{il} = E_i E_l G_{il}, \quad B'_{il} = E_i E_l B_{il}。$$

其中  $d_i, w_i$  为第  $i$  台机的发电机转子角度和速度。

将事故后的稳定平衡点变换到原点后, 多机系统的状态方程变为

$$\dot{x}_i = y_i - y_n, \quad (i=1,2,\dots,n-1) \quad (5)$$

$$\dot{y}_i = g'_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -D_i y_i/M_i + g_i(\mathbf{x}) \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (6)$$

$$\text{式中} \quad g_i(\mathbf{x}) = P_{gi}(\mathbf{0})/M_i - P_{gi}(\mathbf{x})/M_i \quad (7)$$

$$P_{gi}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^n \left[ G'_{il} \cos(x_{il} + d_{il}^0) + B'_{il} \sin(x_{il} + d_{il}^0) \right] \quad (8)$$

根据泰勒定理, 将  $g'_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  在包含原点的邻域表达为

$$g'_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{D_i}{M_i} y_i + g_i(\mathbf{0}) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g_i(\mathbf{0})}{\partial x_j} x_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2 g_i(\mathbf{s}\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_k} x_j x_k \quad (9)$$

观察式(7)得  $g_i(\mathbf{0}) = 0$ , 且  $0 \leq s \leq 1$ , 可将式(9)变换为下列形式

$$g'_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{D_i}{M_i} y_i + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g_i(\mathbf{0})}{\partial x_j} x_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2 g_i(\mathbf{0})}{\partial x_j \partial x_k} x_j x_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{\partial^2 g_i(\mathbf{s}\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 g_i(\mathbf{0})}{\partial x_j \partial x_k} \right) x_j x_k \quad (10)$$

令  $\mathbf{z} = (\mathbf{x}^T, \mathbf{y}^T)^T$ , 式(5)和式(6)表示为

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + (\mathbf{T} + \mathbf{H})/2 \quad (11)$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & & & & \\ a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & -D_1/M_1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 & \cdots & -D_n/M_n & \end{pmatrix} \quad (12)$$

式中  $\mathbf{T} = (0 \dots 0 \ T_1 \dots T_n)^T$ ;  $\mathbf{H} = (0 \dots 0 \ H_1 \dots H_n)^T$ ;

$$\mathbf{S} = (\mathbf{I}_{n-1} \quad -\mathbf{e}_{n-1}) \in R^{(n-1) \times n};$$

$$\mathbf{I}_{n-1} \text{ 为 } n-1 \text{ 阶单位阵, } \mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T。$$

各个分量表达式为

(1) 当  $i=1,2,\dots,n-1$  时

$$|T_i| = \left| \mathbf{x}^T \nabla^2 g_i(\mathbf{0}) \mathbf{x} \right| \leq L_{\max} (\nabla^2 g_i(\mathbf{0})) \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (13)$$

(2) 当  $i=n$  时

$$|T_n| = \left| \mathbf{x}^T \nabla^2 g_n(\mathbf{0}) \mathbf{x} \right| \leq L_{\max} (\nabla^2 g_n(\mathbf{0})) \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (14)$$

(3) 当  $i=1,2,\dots,n-1$  时

$$|H_i| = \left| \mathbf{x}^T (\nabla^2 g_i(\mathbf{s}\mathbf{x}) - \nabla^2 g_i(\mathbf{0})) \mathbf{x} \right| \leq \left\| \nabla^2 g_i(\mathbf{s}\mathbf{x}) - \nabla^2 g_i(\mathbf{0}) \right\|_2 \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \sqrt{\left\| \nabla^2 g_i(\mathbf{s}\mathbf{x}) - \nabla^2 g_i(\mathbf{0}) \right\|_1 \left\| \nabla^2 g_i(\mathbf{s}\mathbf{x}) - \nabla^2 g_i(\mathbf{0}) \right\|_\infty} \|\mathbf{x}\|_2^2 = \left\| \nabla^2 g_i(\mathbf{s}\mathbf{x}) - \nabla^2 g_i(\mathbf{0}) \right\|_1 \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (15)$$

(4) 当  $i=n$  时

$$|H_n| = \left| \mathbf{x}^T (\nabla^2 g_n(\mathbf{s}\mathbf{x}) - \nabla^2 g_n(\mathbf{0})) \mathbf{x} \right| \leq \left\| \nabla^2 g_n(\mathbf{s}\mathbf{x}) - \nabla^2 g_n(\mathbf{0}) \right\|_2 \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (16)$$

( $\partial g_i/\partial x_j, a_{ij}, \nabla^2 g_i(\cdot), \nabla^2 g_i(\mathbf{s}\mathbf{x}) - \nabla^2 g_i(\mathbf{0})$  表达式推导详见附录 I)。

因为  $\mathbf{A}$  是故障后平衡点的雅可比矩阵, 所以假设  $\mathbf{A}$  所有特征值实部为负。如果这个假设不满足, 则需要计算的稳定域不存在。

### 2.2 稳定区域的解析表达

现在需求解重新表达后式(11)的稳定域。因为该系统仅包含三角函数, 存在线性上界函数, 因此具有“准线性”的性质。取常见函数

$$V = \mathbf{z}^T \mathbf{P}\mathbf{z} \quad (17)$$

令  $\mathbf{Q}$  为一正定对称矩阵, 式(17)中  $V$  函数的全导数满足

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \mathbf{z}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \mathbf{P} (\mathbf{T} + \mathbf{H}) = \\
 &- \mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \mathbf{P} (\mathbf{T} + \mathbf{H}) \leq -I_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{z}\|_2^2 + \\
 &\|\mathbf{z}\|_2 \|\mathbf{P}\|_2 \|\mathbf{T}\|_2 + \|\mathbf{z}\|_2 \|\mathbf{P}\|_2 \|\mathbf{H}\|_2 \leq -I_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{z}\|_2^2 + \\
 &\|\mathbf{z}\|_2 \|\mathbf{P}\|_2 \|\mathbf{T}\|_1 + \|\mathbf{z}\|_2 \|\mathbf{P}\|_2 \|\mathbf{H}\|_1 = -I_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{z}\|_2^2 + \\
 &\|\mathbf{z}\|_2 \|\mathbf{P}\|_2 \left( \sum_{i=1}^{n-1} |T_i| + |T_n| \right) + \|\mathbf{z}\|_2 \|\mathbf{P}\|_2 \left( \sum_{i=1}^{n-1} |H_i| + |H_n| \right) \leq \\
 &-I_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{z}\|_2^2 + \|\mathbf{z}\|_2 \|\mathbf{P}\|_2 \sum_{i=1}^{n-1} I_{\max}(\nabla^2 g_i(\mathbf{0})) \|\mathbf{x}\|_2^2 + \\
 &\|\mathbf{z}\|_2 \|\mathbf{P}\|_2 I_{\max}(\nabla^2 g_n(\mathbf{0})) \|\mathbf{x}\|_2^2 + \\
 &\|\mathbf{z}\|_2 \|\mathbf{P}\|_2 \sum_{i=1}^{n-1} \|\nabla^2 g_i(\mathbf{s} \mathbf{x}) - \nabla^2 g_i(\mathbf{0})\|_1 \|\mathbf{x}\|_2^2 + \\
 &\|\mathbf{z}\|_2 \|\mathbf{P}\|_2 \|\nabla^2 g_n(\mathbf{s} \mathbf{x}) - \nabla^2 g_n(\mathbf{0})\|_2 \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq -I_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{z}\|_2^2 + \\
 &\|\mathbf{z}\|_2 \|\mathbf{P}\|_2 \sum_{i=1}^{n-1} I_{\max}(\nabla^2 g_i(\mathbf{0})) \|\mathbf{z}\|_2^2 + \\
 &\|\mathbf{z}\|_2 \|\mathbf{P}\|_2 I_{\max}(\nabla^2 g_n(\mathbf{0})) \|\mathbf{z}\|_2^2 + \\
 &\|\mathbf{z}\|_2 \|\mathbf{P}\|_2 \sum_{i=1}^{n-1} \left( 2\sqrt{2} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{n-1} \sqrt{G_{il}^{n2} + B_{il}^{n2}} + \sqrt{G_{in}^{n2} + B_{in}^{n2}} \right) \|\mathbf{z}\|_2^3 + \\
 &\|\mathbf{z}\|_2 \|\mathbf{P}\|_2 \max_j \sqrt{G_{nj}^{n2} + B_{nj}^{n2}} \|\mathbf{z}\|_2^3 = \\
 &-I_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{z}\|_2^2 + \|\mathbf{P}\|_2 \sum_{i=1}^{n-1} a_i \|\mathbf{z}\|_2^3 + \|\mathbf{P}\|_2 b \|\mathbf{z}\|_2^3 + \\
 &\|\mathbf{P}\|_2 \sum_{i=1}^{n-1} c_i \|\mathbf{z}\|_2^4 + \|\mathbf{P}\|_2 d \|\mathbf{z}\|_2^4 \leq 0 \\
 \Rightarrow \|\mathbf{z}\|_2 &\leq h = -(b + \sum_{i=1}^{n-1} a_i) / 2(d + \sum_{i=1}^{n-1} c_i) \quad (18)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \sqrt{\left( b + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right)^2 + 4 \left( d + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \right) I_{\min}(\mathbf{Q}) / I_{\max}(\mathbf{P})} \\
 a_i &= I_{\max}(\nabla^2 g_i(\mathbf{0})), b = I_{\max}(\nabla^2 g_n(\mathbf{0})), \\
 c_i &= 2\sqrt{2} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{n-1} \sqrt{G_{il}^{n2} + B_{il}^{n2}} + \sqrt{G_{in}^{n2} + B_{in}^{n2}}, \\
 d &= \max_j \sqrt{G_{nj}^{n2} + B_{nj}^{n2}}.
 \end{aligned}$$

只要满足式(18)条件, 则  $\dot{V} \leq 0$ 。

由上可以看出: 在闭集合  $D = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{z}\|_2 \leq h\}$  里  $\dot{V}$  是负半定的。一旦找到了这样一个球, 即可选择

$$c = \min_{\|\mathbf{z}\|_2=h} V(\mathbf{z}) = I_{\min}(\mathbf{P})h^2 \quad (19)$$

从而得到不变集

$$W_c = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid V(\mathbf{z}) \leq c\} \subset D \quad (20)$$

根据拉萨尔不变性原理<sup>[10]</sup>, 封闭集合  $\Omega_c$  严格包含于非线性系统式(11)的稳定域 (即本文关心的暂态稳定域) 中。

### 3 仿真结果

第 2 节推导了二阶上界函数稳定域方法闭合子集的解析表达式, 下面将以 3 机 9 节点系统和 10 机 39 节点系统为例研究这个稳定域方法的效果。为此特将采用二阶上界函数法所得的临界切除时刻的机组相角和采用时域仿真法所得临界切除时刻的机组相角进行比较。

#### (1) 9 节点系统仿真结果

系统的参数见文献[15]。对该系统进行仿真计算时, 假设第 5 节点发生三相短路故障, 应用本文方法(二阶上界函数法)进行仿真并和时域仿真法进行分析对比, 其结果如图 1 所示。

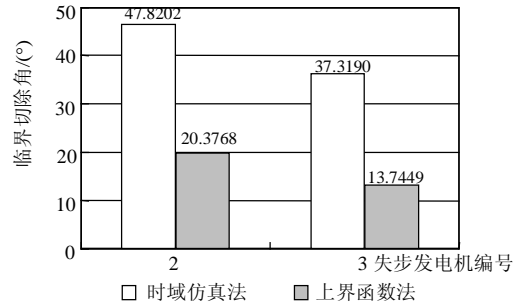


图 1 9 节点系统临界切除角度比较 (第 5 节点三相短路)  
Fig. 1 The comparison of critical clearing angles in the 9-bus system

#### (2) 新英格兰 10 机 39 节点系统

该系统的参数和接线图见文献[12]。以该系统进行与仿真(1)同样的计算, 其结果如图 2 所示。

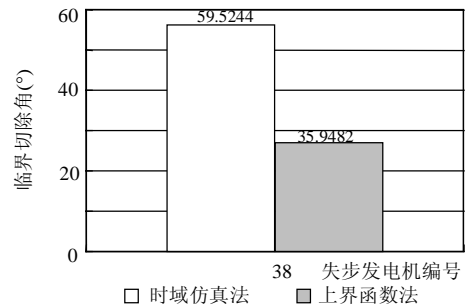


图 2 新英格兰系统临界切除角度比较 (第 26 节点短路)  
Fig. 2 The comparison of critical clearing angles in the New England system

### (3) 与一阶上界函数法对比

前面通过几个不同规模的仿真算例系统将二阶上界函数法与时域仿真法进行了结果分析和对比,下面将针对非均匀阻尼模型下的2种不同的理论方法一阶上界函数法和二阶上界函数法进行分析和比较,对比结果如表1所示。

表1 一阶上界函数法与二阶上界函数法性能对比表

Tab. 1 the comparison form of first order upper bounding function method and second order upper bounding method			
临界切除角/度	9节点系统(第5节点短路)		10机39节点系统(第38台机第26节点短路)
稳定域方法	第2台机	第3台机	
一阶上界函数法	19.9170	13.3328	35.9454
二阶上界函数法	20.3768	13.7449	35.9482

由表1可见,同一阶上界函数法相比,二阶上界函数保守性有所改善。但由于上界函数仅包含了微分方程非线性项的上界,并且由于李亚普诺夫函数的固有保守性及公式推导时多次用到的不等式关系,因此上界函数法所得稳定域与真正的稳定域相比还是可能有较大的差距。为减少保守性,在直接法的早期研究中人们曾对此寄予厚望,结果未获成功。由此导致了各种各样的能量函数法产生<sup>[9,16]</sup>。严格地讲,能量函数不是Lyapunov函数,因此其计算结果同本文方法没有可比性。

## 4 结论

本文基于非均匀阻尼多机系统经典模型,推导了一个二阶上界函数的暂态稳定域估计方法,并针对几个不同规模的算例系统进行了有关仿真计算。与一阶上界函数法相比,本文方法保守性有所改善,并且本文的模型具有更好的通用性,均匀阻尼和零阻尼的情况可以视为其特例情况。理论推导及仿真结果表明,本文方法严格可靠。

## 参考文献

- [1] 李颖辉,张保会. 运用非线性系统理论确定电力系统稳定域的一种新方法[J]. 中国电机工程学报, 2000, (20): 41-44.  
Li Yinghui, Zhang Baohui. A new method to determine the transient stability boundary using nonlinear theory[J]. Proceedings of the CSEE, 2000, (20): 41-44.
- [2] 童建中,韩祯祥. 一种新的Lyapunov函数及其大规模动态系统稳定性分析[J]. 中国电机工程学报, 1989, 9(6): 30-39.  
Tong Jianzhong, Han Zhenxiang. A new Lyapunov function and stability analysis of large-scale dynamic systems[J]. Proceedings of the CSEE, 1989, 9(6): 30-39.
- [3] 邓集祥,张芳. 不稳极限环——一类暂态稳定边界的研究[J]. 中国电机工程学报, 2003, (23)7: 46-50.  
Deng Jixiang, Zhang Fang. Study on transient stability boundary using unstable limit cycle[J]. Proceedings of the CSEE, 2003, (23)7: 46-50.

- [4] 倪以信,姚良忠. 直接暂态稳定分析综合法[J]. 中国电机工程学报, 1992, 12(6): 63-68.  
Ni Yixin, Yao Liangzhong. Synthetical method of direct transient stability analysis[J]. Proceedings of the CSEE, 1992, 12(6): 63-68.
- [5] 吴政球,陈辉华等. 以单机等面积稳定判据分析多机系统暂态稳定性[J]. 中国电机工程学报, 2003, 23(4): 48-52.  
Wu Zhengqiu, Chen Huihua et al. Using single machine equal area criterion to analyze multi-machine systems stability [J]. Proceedings of the CSEE, 2003, 23(4): 48-52.
- [6] 房大中,宋文南. 修正的暂态能量裕度评估策略[J]. 中国电机工程学报, 2000, 22(3): 94-98.  
Fang Dazhong, Liu Yongqi. Strategy for assessment of corrected transient energy margin[J]. Proceedings of the CSEE, 2000, 22(3): 94-98.
- [7] 郭志中,于继来. 暂态能量函数的动力学意义思考[J]. 中国电机工程学报, 1993, 13(6): 54-59.  
Guo Zhizhong, Yu Jilai. Pondering on dynamical meaning of transient energy function[J]. Proceedings of the CSEE, 1993, 13(6): 54-59.
- [9] 余贻鑫,赵义术,等. 基于实用动态安全域的电力系统安全成本优化[J]. 中国电机工程学报, 2004, 24(6): 13-18.  
Yu yixin, Zhao yishu et al. Power system security cost optimization based on practical dynamic security region[J]. Proceedings of the CSEE, 2004, 24(6): 13-18.
- [10] Yaonan Yu, Yongsuriya K. Nonlinear power system stability by liapunov function and Zubov's method[J]. IEEE Trans. PAS, 1967, (12): 1480-1487.
- [11] Chiang H.D. Direct stability analysis of electric power systems using energy functions: theory, applications, and perspective[J]. Proceedings of the IEEE, 1995, 83(11): 1497-1529.
- [12] 刘笙. 电力系统暂态稳定的能量函数分析[M]. 上海交通大学出版社, 1996.
- [13] Pai M.A. Energy function analysis for power system stability[M]. Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [14] Khalil H.K. Nonlinear Systems, second edition[M]. Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River, New Jersey, USA. 1996.
- [15] 刘峰,辛焕海,等. 一个基于上界函数的暂态稳定域估计方法[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(5): 15-20.  
Liu Feng, Xin Huanhai, Gan Deqiang et al. Transient stability domain estimation using an bounding function[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(5): 15-20.
- [16] 王锡凡,方万良,杜正春. 现代电力系统分析[M]. 科学出版社, 2003.
- [17] Pai M A, Mohan M A, Rao J G. Power system transient stability regions using Popov's Method[J]. IEEE trans., PAS-89, 1970, (5): 788-794.

## 附录 I

此处给出了表达式  $\partial g_i / \partial x_j$ ,  $a_{ij}$ ,  $\nabla^2 g_i(\cdot)$ ,  $\nabla^2 g_i(\mathbf{s}\mathbf{x}) - \nabla^2 g_i(\mathbf{0})$  的上界函数。首先得出  $\partial g_i / \partial x_j$  的表达式为

$$\frac{\partial P_{gi}}{\partial x_j} = \begin{cases} G'_{ij} \sin(x_{ij} + d_{ij}^0) - B'_{ij} \cos(x_{ij} + d_{ij}^0), & (j \neq i) \\ \sum_{l=1}^n (-G'_{il} \sin(x_{il} + d_{il}^0) + B'_{il} \cos(x_{il} + d_{il}^0)), & (j = i) \end{cases} \quad (\text{A1})$$

$$\text{令 } G''_{ij} = G'_{ij} / M_i, B''_{ij} = B'_{ij} / M_i \quad (\text{A2})$$

则  $\partial g_i(\cdot) / \partial x_j$  的表达式为

$$\text{当 } i = 1, 2, \dots, n-1 \text{ 时 } (j = i) \\ \frac{\partial g_i(\cdot)}{\partial x_j} = -\frac{1}{M_i} \frac{\partial P_{gi}}{\partial x_j} = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n (G''_{il} \sin(x_{il} + d_{il}^0) - B''_{il} \cos(x_{il} + d_{il}^0)) \quad (\text{A3})$$

$$\frac{\partial g_i(\cdot)}{\partial x_j} = -\frac{1}{M_i} \frac{\partial P_{gi}}{\partial x_j} = -G_{ij}'' \sin(x_{ij} + d_{ij}^0) + B_{ij}'' \cos(x_{ij} + d_{ij}^0), \quad (j \neq i \text{ 时}) \quad (A4)$$

当  $i = n$  时

$$\frac{\partial g_n(\cdot)}{\partial x_j} = -\frac{1}{M_n} \frac{\partial P_{gn}}{\partial x_j} = -G_{nj}'' \sin(x_{nj} + d_{nj}^0) + B_{nj}'' \cos(x_{nj} + d_{nj}^0) \quad (A5)$$

在式(23)~(25)中令  $x = 0$ , 可求出  $a_{ij}$  为

当  $i = 1, 2, \dots, n-1$  时

$$a_{ij} = \begin{cases} \sum_{l=1}^n (G_{il}'' \sin d_{il}^0 - B_{il}'' \cos d_{il}^0), & (j = i) \\ -G_{ij}'' \sin d_{ij}^0 + B_{ij}'' \cos d_{ij}^0, & (j \neq i) \end{cases} \quad (A6)$$

当  $i = n$  时

$$a_{nj} = \frac{\partial g_n(0)}{\partial x_j} = -\frac{1}{M_n} \frac{\partial P_{gn}}{\partial x_j} = -G_{nj}'' \sin d_{nj}^0 + B_{nj}'' \cos d_{nj}^0 \quad (A7)$$

$$\frac{\partial^2 P_{gi}(\cdot)}{\partial x_j \partial x_k} =$$

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^n (-G_{il}' \cos(x_{il} + d_{il}^0) - B_{il}' \sin(x_{il} + d_{il}^0)), & i = j = k \\ -G_{ij}' \cos(x_{ij} + d_{ij}^0) - B_{ij}' \sin(x_{ij} + d_{ij}^0), & i \neq j = k \\ G_{ik}' \cos(x_{ik} + d_{ik}^0) + B_{ik}' \sin(x_{ik} + d_{ik}^0), & i = j \neq k \\ G_{ij}' \cos(x_{ij} + d_{ij}^0) + B_{ij}' \sin(x_{ij} + d_{ij}^0), & i = k \neq j \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (A8)$$

当  $i = n$  时 ( $n \neq j = k$ )

$$\frac{\partial^2 P_{gn}(\cdot)}{\partial x_j \partial x_k} = -G_{nj}' \cos(x_{nj} + d_{nj}^0) - B_{nj}' \sin(x_{nj} + d_{nj}^0) \quad (A9)$$

当  $i = 1, 2, \dots, n-1$  时

$$\nabla^2 g_i(\cdot) = -\frac{1}{M_i} \frac{\partial^2 P_{gi}(\cdot)}{\partial x_j \partial x_k} =$$

$$\begin{cases} i = j = k: \sum_{l=1}^n (G_{il}'' \cos(x_{il} + d_{il}^0) + B_{il}'' \sin(x_{il} + d_{il}^0)) \\ i \neq j = k: G_{ij}'' \cos(x_{ij} + d_{ij}^0) + B_{ij}'' \sin(x_{ij} + d_{ij}^0) \\ i = j \neq k: -G_{ik}'' \cos(x_{ik} + d_{ik}^0) - B_{ik}'' \sin(x_{ik} + d_{ik}^0) \\ i = k \neq j: -G_{ij}'' \cos(x_{ij} + d_{ij}^0) - B_{ij}'' \sin(x_{ij} + d_{ij}^0) \\ i = k \neq j: -G_{ij}'' \cos(x_{ij} + d_{ij}^0) - B_{ij}'' \sin(x_{ij} + d_{ij}^0) \end{cases} \quad (A10)$$

当  $i = n$  时 ( $n \neq j = k$ )

$$\nabla^2 g_n(\cdot) = -\frac{1}{M_n} \frac{\partial^2 P_{gn}(\cdot)}{\partial x_j \partial x_k} =$$

$$G_{nj}'' \cos(x_{nj} + d_{nj}^0) + B_{nj}'' \sin(x_{nj} + d_{nj}^0) \quad (A11)$$

当  $i = 1, 2, \dots, n-1$  时

$$\nabla g_i^2(\mathbf{s}\mathbf{x}) - \nabla g_i^2(\mathbf{0}) =$$

$$\begin{cases} 2 \sum_{l=1}^n \left( -G_{il}'' \sin \frac{Sx_{il} + 2d_{il}^0}{2} + B_{il}'' \cos \frac{Sx_{il} + 2d_{il}^0}{2} \right) \sin \frac{Sx_{il}}{2}, & i = j = k \\ -2 \left( G_{ij}'' \sin \frac{Sx_{ij} + 2d_{ij}^0}{2} - B_{ij}'' \cos \frac{Sx_{ij} + 2d_{ij}^0}{2} \right) \sin \frac{Sx_{ij}}{2}, & i \neq j = k \\ 2 \left( G_{ik}'' \sin \frac{Sx_{ik} + 2d_{ik}^0}{2} - B_{ik}'' \cos \frac{Sx_{ik} + 2d_{ik}^0}{2} \right) \sin \frac{Sx_{ik}}{2}, & i = j \neq k \\ 2 \left( G_{ij}'' \sin \frac{Sx_{ij} + 2d_{ij}^0}{2} - B_{ij}'' \cos \frac{Sx_{ij} + 2d_{ij}^0}{2} \right) \sin \frac{Sx_{ij}}{2}, & i = k \neq j \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (A12)$$

$$\|\nabla^2 g_i(\mathbf{s}\mathbf{x}) - \nabla^2 g_i(\mathbf{0})\| = \max_k \sum_{j=1}^{n-1} \left( \|\nabla^2 g_i(\mathbf{s}\mathbf{x}) - \nabla^2 g_i(\mathbf{0})\|_{jk} \right) =$$

$$\begin{aligned} & \left| 2 \sum_{l=1}^n \left( -G_{il}'' \sin \frac{Sx_{il} + 2d_{il}^0}{2} + B_{il}'' \cos \frac{Sx_{il} + 2d_{il}^0}{2} \right) \sin \frac{Sx_{il}}{2} \right| + \\ & \left| 2 \sum_{j=1}^{n-1} \left( G_{ij}'' \sin \frac{Sx_{ij} + 2d_{ij}^0}{2} - B_{ij}'' \cos \frac{Sx_{ij} + 2d_{ij}^0}{2} \right) \sin \frac{Sx_{ij}}{2} \right| \leq \\ & 4 \sum_{l=1}^{n-1} \sqrt{G_{il}''^2 + B_{il}''^2} \left| \sin \frac{Sx_{il}}{2} \right| + \\ & 2 \left( -G_{in}'' \sin \frac{Sx_{in} + 2d_{in}^0}{2} + B_{in}'' \cos \frac{Sx_{in} + 2d_{in}^0}{2} \right) \sin \frac{Sx_{in}}{2} \leq \\ & 2 \sum_{l=1}^{n-1} \sqrt{G_{il}''^2 + B_{il}''^2} |x_{il}| + \sqrt{G_{in}''^2 + B_{in}''^2} |x_{in}| \leq \\ & 2\sqrt{2} \sum_{l=1}^{n-1} \sqrt{G_{il}''^2 + B_{il}''^2} \|\mathbf{x}\|_2 + \sqrt{G_{in}''^2 + B_{in}''^2} \|\mathbf{x}\|_2 \leq \\ & \left( 2\sqrt{2} \sum_{l=1}^{n-1} \sqrt{G_{il}''^2 + B_{il}''^2} + \sqrt{G_{in}''^2 + B_{in}''^2} \right) \|\mathbf{x}\|_2 = c_i \|\mathbf{x}\|_2 \quad (A13) \end{aligned}$$

当  $i = n$  时 ( $n \neq j = k$ ) 有

$$\nabla g_n^2(\mathbf{s}\mathbf{x}) - \nabla g_n^2(\mathbf{0}) = -2 \left( G_{nj}'' \sin \frac{Sx_{nj} + 2d_{nj}^0}{2} - B_{nj}'' \cos \frac{Sx_{nj} + 2d_{nj}^0}{2} \right) \sin \frac{Sx_{nj}}{2} \quad (A14)$$

$$\|\nabla^2 g_n(\mathbf{s}\mathbf{x}) - \nabla^2 g_n(\mathbf{0})\|_2 = I_{\max} (\nabla^2 g_n(\mathbf{s}\mathbf{x}) - \nabla^2 g_n(\mathbf{0})) = \max_j |I_{jj}| \leq \max_j \sqrt{G_{nj}''^2 + B_{nj}''^2} \|\mathbf{x}\|_2 = d \|\mathbf{x}\|_2 \quad (A15)$$

因为对于  $j = 1, 2, \dots, n-1$ :

$$\begin{aligned} |I_{jj}| &= \left| -2 \left( G_{nj}'' \sin \frac{Sx_{nj} + 2d_{nj}^0}{2} - B_{nj}'' \cos \frac{Sx_{nj} + 2d_{nj}^0}{2} \right) \sin \frac{Sx_{nj}}{2} \right| \leq \\ & 2\sqrt{G_{nj}''^2 + B_{nj}''^2} \left| \sin \frac{Sx_{nj}}{2} \right| \leq \sqrt{G_{nj}''^2 + B_{nj}''^2} |x_{nj}| \leq \sqrt{G_{nj}''^2 + B_{nj}''^2} \|\mathbf{x}\|_2 \end{aligned} \quad (A16)$$

收稿日期: 2005-01-08。

作者简介:

刘 峰 (1976-) 博士研究生, 从事电力系统稳定性研究工作;

邱家驹 (1944-) 教授, 博士生导师, 从事电力系统分析和控制教学与研究工作。