

模糊数学在海水入侵地下水水质评价中的应用

涂向阳¹, 高学平¹

(1. 天津大学 建筑工程学院, 天津 300072)

摘要: 本文运用模糊数学的基本思想方法, 根据海水入侵地下水水质的特点, 选择了 Cl^- , M 等 5 项化学指标作为综合评判海水入侵程度的指标; 侵染程度划分为 4 级; 把模糊数学最大隶属度原则应用到海水入侵地下水水质评价中, 构造了综合评判模糊数学模型, 并进行了实例计算, 通过对比运用模糊数学的评价结果与运用地下水水质质量, 标准规定的加附注的评分法的评价结果, 验证了此评判模型的可靠性。

关键词: 模糊数学; 海水入侵; 水质评价; 综合评判; 隶属度

中图分类号: X16 **文献标识码:** A

长期以来, 人们对于客观事物的认识习惯于追求其精确性或清晰性。但人脑作为认识和改造客观世界的主体, 对自然现象的反映往往都是模糊的。模糊集合是对这些模糊现象或模糊概念的刻划^[1]。在以地下含水层为重要水源的滨海地区, 由于大量地开采地下水, 造成盐水和淡水之间过渡带逐渐向内陆发展的渐变现象。某一特定地区海水入侵程度的评价是具有“模糊性”的。模糊综合评判是处理这类“模糊不清”问题的较好方法。作者根据海水入侵地下水水质评价的特点, 建立模糊数学模型, 根据模糊数学最大隶属度原则评定水样的等级。

模糊综合评判过程一般归纳为如下几个步骤: (1) 给出被择的对象集; (2) 找出因素(判据集)集; (3) 找出评价矩阵; (4) 确定评价函数; (5) 计算评判指标。

1 模糊数学相关概念和基本模型

1.1 相关定义 设 \bar{A} 是论域 X 到 $[0, 1]$ 的一个映射, 即 $\bar{A}: X \rightarrow [0, 1], x \rightarrow \bar{A}(x)$ 。称是 X 上的模糊集, 而函数 $\bar{A}(\cdot)$ 称为模糊数学集 \bar{A} 的隶属函数, $\bar{A}(x)$ 称为 x 对模糊集的隶属度。

1.2 模糊评判的基本要素 应用模糊数学方法解决综合评判问题, 要求所讨论的问题具有以下特征: 即评判客体在概念上具有模糊性, 评判主体的思维方法上具有多样性, 评判结果在表达上具有口语话的特征。这三点并称为模糊评判的 3 个基本要素。

1.3 模糊评判模型的一般形式 已知一个有限集合 X

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (1)$$

X 中的元素 $x_j (j=1, 2, \dots, n)$ 表示评价对象。

又已知一个有限集合 K

$$K = \{k_1, k_2, \dots, k_m\} \quad (2)$$

收稿日期: 2003-04-07

作者简介: 涂向阳(1981-), 男, 安徽临泉人, 硕士研究生, 研究方向为地下水渗流与地下水资源管理。

K 中的元素 $K_i=1, 2, \dots, m$) 表示不同的评价指标。

令 u_i 为第 i 个评价指标 k_i 对 K 的隶属函数, 即:

$$u_i = \mu(k_i), u_i \in [0, 1] \quad (3)$$

则 U 为一个有限的模糊子集, 即

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \quad (4)$$

所谓模糊评判问题的数学表达即是寻求一个模糊集合 B

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}, b_j \in [0, 1] \quad (5)$$

B 中元素 b_j 表示 j 个被评价对象的综合对象的综合评价指数。由于隶属函数 u_i 适用于所有的评价对象 x_j , 则可得到一个评价矩阵 R 称为模糊关系。即

$$R: U \times X \rightarrow [0, 1]$$

$$R = (r_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中: $r_{ij} = R(x_j, u_i) \in [0, 1]$, 表示 j 个被评价对象关于第 i 个评价指标的隶属度。

给定一个模糊向量

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \quad (7)$$

A 中的元素 $a_k (k=1, 2, \dots, m)$ 表示第 k 个模糊算子相当于评价的权重, 且

$$\sum_{k=1}^m a_k = 1, a_k \in [0, 1] \quad (8)$$

有了评判矩阵 R 和权重矩阵 A 两个矩阵后, 即可进行复合运算进行评判, 可得模糊子集, 记作:

$$B = A \circ R = (b_j)_{1 \times n} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \quad (9)$$

1.4 模糊向量 A 的确定和模糊算子 μ 。模糊向量 A 的含义随所采用的模糊算子对而异, 其物理意义应分别进行讨论, 在模糊评判中, 常用以下 2 个模糊算子。

1.4.1 (\wedge, \vee) 运算规则 (即取大取小法)

$$A(\wedge, \vee)Z = \bigvee_{i=1}^m (a_i, r_{ij}) = \max \{ \min(a_1, r_{1j}), \min(a_2, r_{2j}), \dots, \min(a_m, r_{mj}) \} \quad (10)$$

可以看出, 最终有一个评价指标的贡献被考虑, a_i 表示当第 j 个对象的评判结果仅以 k_j 来描述时所能达到的最大隶属度。

1.4.2 (\cdot, \odot) 运算规则 (即取大取积法)

$$A(\cdot, \odot)Z = \bigvee_{i=1}^m (a_i, r_{ij}) = \max \{ a_1 \cdot r_{1j}, a_2 \cdot r_{2j}, \dots, a_m \cdot r_{mj} \} \quad (10)$$

应用此模糊算子对, 最终也只有一个评价指标被考虑, 但也或多或少地考虑了其他指标的影响。因此, 在这个算子中, a_j 与在 (\wedge, \vee) 中有着相同的意义。

2 海水入侵地下水水化学指标

海水入侵研究中, 水化学特征是判断海水入侵的直接依据。迄今为止, 多采用单一的指标分析, 最普遍的是 Cl^- , 例如以其含量 300mg/L 为入侵标准。另外一种常用的指标是矿化度(M), 以 2.0g/L 为咸—淡

水的临界值,此外,也有用电阻率和电导率为指标的^[2]。

Cl⁻作为首选指标^[3],首先由于它是海水中最主要的稳定常量元素,故反映海水入侵最为敏感;其次,它对淡水的污染及对农业生态的有害效应十分明显;其三,测定简便。矿化度反应水中总盐量水平,以此为指标是基于海水和淡水中矿化度的显著差异性。然而,淡水中Cl⁻和M的水平除受海水侵染影响外,还受生活污水、工业废水、矿区排水等一些非海水因素影响。因此采用1种或2种因素来分析海水入侵程度是不全面的,实际中往往产生偏差。本文中还选择了以下3种指标。SO₄²⁻含量^[3]和Br⁻含量。SO₄²⁻和Br⁻是海水中较稳定的元素,而陆地地下淡水中两者其含量较少,属于微量元素,受到侵染后,两者含量值是随海水入侵程度的发展变化较为敏感的指标,因此这两者的含量可以选为海水入侵水水质评价的评判指标。

钠吸附比(SAR)。Na⁺是海水中首要的阴离子,其含量比淡水要高出2~4个数量级。受海水入侵的地下水及土壤中的Na⁺含量升高,超过一定限度则会导致土壤次生碱化,这是形成重侵染程度区盐渍土形成过程之一。美国盐渍土实验室提出的SAR即是衡量灌溉水质的钠危害程度的一个水化学指标^[4],其表达式为:

$$SAR = rNa^+ / \sqrt{0.5(rCa^{2+} + rMg^{2+})} \quad (8)$$

式中:r表示毫克当量。

确定各项指标分级和界值。被侵染的水体依其程度轻重从淡水变成微咸水乃至咸水,常年严重侵染区中,地下水变成咸水,各项化学指标及其动态多在较高侵染水平上趋于纯化。参照中华人民共和国地下水水质标准,考虑到海水入侵水水质的本身特点,为突出反映海水入侵前缘的变化,应该在其过渡带(微咸水)加以细化。因此,将海水入侵程度分为4级^[5](如表1),通常所说的咸淡水界处于、级之间。

表1 海水入侵程度的等级划分

等级	无或轻度	轻度侵染	较严重侵染	严重侵染
入侵程度	无或轻度	轻度侵染	较严重侵染	严重侵染
水质范围	影响淡水	微咸水	微咸水	咸水及盐水

各个滨海地区应从本区实际情况出发,选择合理的海水入侵水化学指标,参照国内外有关的水质标准,借鉴已有的等级划分先例,对海水入侵水水质等级各指标进行等级范围及界值的确定,本文所采用的相邻两级的临界值和代表值如表2所示。

表2 海水入侵指标的等级划分及代表值

指标 /(mg/L)	等级范围		代表值		等级范围		代表值	
	等级范围	代表值	等级范围	代表值	等级范围	代表值	等级范围	代表值
Cl ⁻	< 250	100	250-600	400	600-1500	800	> 1500	2200
M	< 1000	500	1000-2000	1500	2000-3000	2500	> 3000	3500
SO ₄ ²⁻	< 200	75	200-450	350	450-1200	700	> 1200	1800
Br ⁻	< 0.75	0.25	0.75-1.875	1.25	1.875-5.75	2.50	> 5.75	9.00
SAR	< 2.00	1.40	2.00-3.55	2.60	3.35-10.00	4.50	> 10.0	15.50

3 模糊数学综合评判海水入侵水水质应用实例

3.1 给出评判指标、评判等级及标准 评判指标即所选5项水化学指标,评判等级即上述入侵程度的4个等级,评判标准则是各指标、各等级的代表值。

3.2 单项指标的模糊评价 设论域 $K = \{Cl^-, M, SO_4^{2-}, Br^-, SAR\}$ 为水质各组分含量的集合, $A = \{I, II, III, IV, V\}$ 为水质分级的集合。各项水质污染指标模糊评价是多因素模糊综合评判的基础。

μ_i 为集合的隶属函数, 笔者这里选用的是较为成熟的“降半梯形分布图”^[6](图 1)确定函数即:

$$\mu_{1i} = \begin{cases} 1(x \leq a_1) \\ \frac{a_2 - x}{a_2 - a_1} (a_1 \leq x < a_2) \\ 0(x \geq a_2) \end{cases}$$

$$\mu_{2i} = \begin{cases} 0(x \geq a_3, x \leq a_1) \\ \frac{a_2 - x}{a_2 - a_1} (a_1 \leq x < a_2) \\ \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} (a_2 \leq x < a_3) \\ 0(x \leq a_1, x \geq a_3) \end{cases} \quad (13)$$

μ_{3i} 与 μ_{4i} 相类似。 $\mu_{4i} = \begin{cases} 0(x \leq a_1) \\ \frac{a_2 - x}{a_2 - a_1} (a_1 \leq x < a_2) \\ 1(x \geq a_2) \end{cases}$

式中: x 为被评组分实测浓度; $a_i (i=1, 2, 3, 4)$ 分别为 I, II, III, IV 级水质标准浓度代表值。



图 1 降半梯形分布

应用实例: 某井水质组分含量浓度如表 3, 根据隶属度函数和实测值 x , 对各单项组分分别求出对 I, II, III, IV 级水质的隶属度 μ_i , 测得该井每个单项指标以隶属程度进行评价的结果, 得出 5×4 阶评判矩阵。

表 3 某井水样水质组分含量浓度

指标	Cl^-	M	SO_4^{2-}	Br^-	SAR
含量/(mg/L)	250.7	1875.2	70.1	4.65	3.2

$$R = (r_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0.498 & 0.502 & 0 & 0 \\ 0 & 0.625 & 0.375 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.669 & 0.331 \\ 0 & 0.684 & 0.316 & 0 \end{bmatrix}$$

同样, 可以求得其它各井(孔)水质各项指标的隶属程度及模糊评判矩阵。

3.3 确定指标权重集 指标权重是表示各指标在决定水质上所起的作用的度量，不仅与实测数据大小有关，而且和某种用途水中的允许浓度有关，实测数据相同时，允许浓度含量低、标准高的对污染影响较大^[5]，其计算公式如下

$$W_i = \frac{x_i}{s_i} ; S_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad (14)$$

式中： x_i 为各指标实测值； s_i 为各指标各等级代表值(a_j)的算术平均值； n 为分级数。

对所求得各单项指标权重进行归一化处理，即

$$\ddot{W}_i = \frac{W_i}{\sum_{i=1}^n W} \quad (15)$$

对样本水质进行指标权重计算，得出表 4。

表 4 某井水水质各单项指标权重

项目	Cl ⁻	M	SO ₄ ²⁻	Br ⁻	SAR
W_i	250.7	1875.2	70.1	4.65	3.2
S_i	875.0	2000.0	731.25	3.5	6.00
W_i	0.287	0.938	0.096	1.329	0.533
\ddot{W}_i	0.090	0.295	0.03	0.418	0.167

依 5 个指标给予权重组成模糊矩阵 A。即：

$$A = [0.09 \ 0.295 \ 0.03 \ 0.418 \ 0.167]$$

同理可以求得所研究海水入侵区域各井(孔)各指标权重模糊矩阵。

3.4 进行模糊综合评价 采用前文所述的 2 种常用的模糊算子对对模糊子集 $B = A R$ 进行评判。对得出的 B 再作归一化处理。B 中依次列出水样相对于各入侵程度等级得综合隶属度 b_j ，根据模糊数学最大隶属度原则，取其中最大者的等级为水样的评定等级。

$$B = AR = [0.09 \ 0.295 \ 0.03 \ 0.418 \ 0.167] \begin{bmatrix} 0.498 & 0.502 & 0 & 0 \\ 0 & 0.625 & 0.375 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.669 & 0.331 \\ 0 & 0.684 & 0.316 & 0 \end{bmatrix}$$

3.4.1 取大取小法 在 中，权重矩阵 A 中元素 a_{ij} 与评判矩阵 r_{jk} 两者之间依次取其小值，记为符号“”，而 $a_{ij}r_{jk}$ 与 $a_{ij}r_{jk}$ 之间依次取其极大值，记作符号“”，具体运算如下：

$$\begin{aligned} B=AR &= \{[(0.09 \ 0.498) \ (0.295 \ 0) \ (0.03 \ 1) \ (0.418 \ 0) \ (0.167 \ 0)] \\ &[(0.09 \ 0.502) \ (0.295 \ 0.625) \ (0.03 \ 0) \ (0.418 \ 0) \ (0.167 \ 0.684)] \\ &[(0.09 \ 0) \ (0.295 \ 0.375) \ (0.03 \ 0) \ (0.418 \ 0.669) \ (0.167 \ 0)] \\ &[(0.09 \ 0) \ (0.295 \ 0) \ (0.03 \ 0) \ (0.418 \ 0.331) \ (0.167 \ 0)]\} \\ &= \{[0.09 \ 0 \ 0.03 \ 0 \ 0][0.09 \ 0.295 \ 0 \ 0 \ 0.167] \\ &[0 \ 0.295 \ 0 \ 0.418 \ 0][0 \ 0 \ 0 \ 0.331 \ 0]\} \end{aligned}$$

$$= [0.09 \ 0.295 \ 0.418 \ 0.331]$$

$$= 1.134$$

对上述结果进行归一化处理得到最终的隶属度矩阵：

$$B = [0.079 \ 0.260 \ 0.369 \ 0.292]$$

$$= 1$$

海水入侵程度为 级。

3.4.2 (·,)取大取积法 如果在评价结果中出现最大值有 2 个相同的情况,应以以下原则处理:

(1) 靠近次大级定级。

(2) 应用(·,)法。这种方法是取最小值改为乘积,然后取极大值。按照取大取积法求解得出综合隶属度评语(具体过程略)。

$$B = [0.048 \ 0.291 \ 0.443 \ 0.218]$$

$$= 1$$

海水入侵程度仍为 级。

4 结果分析与评价

海水入侵地下水水质评价以地下水水质调查分析资料或水质监测资料为基础,我国地下水水质标准评判地下水水质采用的是加附注的评分法^[4],具体要求与步骤如下:确定参加评分的项目(应不少于该标准规定的监测项目);进行各单项组分评价,划分组分所属质量类别;对各类别按规定分别确定单项组分评价分值 F_i ;按照该标准规定计算公式计算综合评价分值 F ;根据 F 值,按以下规定划分地下水质量级别。按照此评价方法对本文中实例进行评价,其综合评价分值 $F = 4.8$,其污染程度为 级,这与本文所构造模型评价结果相吻合。从而证明了其可靠性和实用性。对于特定海水入侵研究区域的污染评价,为处理大量的水质样本,以 VB, MATLAB 等开发软件编制程序,为大量数据的处理和分析提供了可能。

5 结语

(1) 用模糊数学的手段进行综合评价是行之有效的先进方法,虽然知识比较密集,但最终都简化为算术和逻辑运算,程序量适中。

(2) 通过建立模糊数学模型综合评判海水入侵程度,是一种“突出主要因素”而不考虑或较少考虑其它次要因素,同时正确的选用了权重,能够反映客观实际,方法简便。各个具体区域应根据当地海水入侵的特点,合理选择评价指标。我国地下水水质标准评判地下水水质采用的是加附注的评分法,实际操作中,可应用这 2 种方法分别进行综合评判,互为补充。

参考文献:

- [1] 刘普寅, 吴孟达. 模糊理论及其应用 [M]. 长沙: 国防科技大学出版社.
- [2] 刘竹梅, 宁玉海. 物探技术检测海水入侵研究 [M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1996.
- [3] 茹湘兰. 地下水污染的早期指示: 以海水入侵为例 [J]. 地质科技动态, 1998, (11).
- [4] 俞仁培, 杨道平, 石万普. 土壤碱化及其防治 [M]. 北京: 农业出版社, 1984.
- [5] 赵建. 海水入侵水化学指标及侵染程度评价研究 [J]. 地理科学, 1998, 18(1).
- [6] 吴国金. 模糊数学法在地下水污染评价中的应用 [J]. 江西地质, 1999, 13(3).
- [7] 李梅玲, 张锡根, 等. 中华人民共和国国家标准地下水质量标准 [S]. 国家技术监督局, 1993