

衡量潮流雅可比矩阵及其降阶阵 不对称性和奇异性的指标

徐志友¹, 纪延超¹, 钮文艳¹, 骆济寿²

(1. 哈尔滨工业大学, 黑龙江省 哈尔滨市 150001; 2. 东北电力学院, 吉林省 吉林市, 132012)

Indices for Evaluating the Unsymmetry and Singularity of Load Flow Jacobian Matrix and Its Reduced Ones

XU Zhi-you¹, JI Yan-chao¹, NIU Wen-yan¹, LUO Ji-shou²

(1. Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, Heilongjiang Province, China;

2. Northeast China Institute of Electric Power Engineering, Jilin 132012, Jilin Province, China)

ABSTRACT: The indices for evaluating the unsymmetry of a matrix are constructed according to the norm relation between matrix and its symmetrical part or its unsymmetrical part, the relation between 1-norm and ∞ -norm, the relation between maximum of absolute eigenvalue and maximum singular value, the relation between spectrum condition number and the ratio of maximum of absolute eigenvalue to minimum of absolute eigenvalue, the relation between the sum of participation factors based on left and right singular vectors corresponding to maximum singular value and 1. At the same time, the new indices for evaluating the singularity of unsymmetrical matrix are constructed according to the relation between minimum of absolute eigenvalue and minimum singular value, the relation between the sum of participation factors based on left and right singular vectors corresponding to minimum singular value and one. These indices are verified using load flow Jacobian matrix and its reduced ones on IEEE 30 system, and the result shows that the ranking of spectrum condition number of load flow Jacobian matrix and its reduced ones are determined by their minimum singular values. At last, the relation between unsymmetry and singularity of load flow Jacobian matrix is discussed.

KEY WORDS: Load flow Jacobian matrix; Unsymmetry; Singularity; Spectrum condition number; Participation factor based on left and right singular vectors

摘要: 依据: ①矩阵与其(反)对称部分范数间的关系; ②矩阵的 1-范数与 ∞ -范数之间的关系; ③矩阵特征值的绝对值的最大值与其最大奇异值之间的关系; ④矩阵特征值的绝对值最大值和矩阵特征值的绝对值的最小值之比与矩阵的谱条件数之间的关系; ⑤对最大奇异值, 对应的奇异参与因子之和与 1 之间的关系, 构造了衡量矩阵不对称性的指标, 并依据: ①矩阵特征值的绝对值最小值与最小奇异值之间的关

系; ②对最小奇异值而言, 对应的奇异参与因子之和与 1 之间的关系, 构造了衡量矩阵奇异性的指标。应用 IEEE30 系统算例和潮流雅可比矩阵及其相应的降阶雅可比矩阵对上述指标进行了分析, 得出了潮流雅可比矩阵及其相应的降阶矩阵的谱条件数排序由相应的矩阵最小奇异值排序决定的结论。

关键词: 潮流雅可比矩阵; 不对称性; 奇异性; 谱条件数; 奇异参与因子

1 引言

在静态电压稳定性分析中, 会涉及到潮流雅可比矩阵的对称性问题, 并认为潮流雅可比矩阵是准对称的^[1-5], 文献[6]中提到潮流雅可比矩阵在临界点的对称性越好, 其文中提出的算法精度就越高, 但以上所述都没有提出衡量一般实矩阵不对称程度的量化指标。同时在静态电压稳定性分析中, 几乎都涉及到潮流雅可比矩阵的奇异性问题^[7-12], 但并没有对潮流雅可比矩阵及其降阶矩阵的奇异程度作一定量的比较, 也没有对潮流雅可比矩阵的不对称性和奇异性之间的关系进行分析。为此, 本文将从数学角度出发根据实对称阵的特征构造不对称性指标, 并针对不对称矩阵构造出适用于矩阵接近奇异时新的奇异性指标, 对潮流雅可比矩阵不对称性和奇异性之间的联系进行了分析, 证明了潮流雅可比矩阵最大奇异值的有界性。最后, 应用上述指标对 IEEE 30 系统进行了分析, 并得出了潮流雅可比矩阵及其相应的降阶矩阵的谱条件数排序取决于相应的矩阵最小奇异值排序的结论。

2 实矩阵的不对称性指标

2.1 关于矩阵对称性的3个证明

由潮流方程, 可得

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{Pq} & J_{PV} \\ J_{Qq} & J_{QV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q \\ \Delta V \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \Delta q \\ \Delta V \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中 J_{Pq} 、 J_{PV} 、 J_{Qq} 和 J_{QV} 是雅可比子矩阵, 分别表示有功 P 和无功 Q 对电压角度 q 和电压幅值 V 的偏导数。

令 $\Delta P=0$ 和 $\Delta Q=0$, 得到相应的降阶矩阵为

$$J_r(V) = J_{QV} - J_{Qq} J_{Pq}^{-1} J_{PV} \quad (2)$$

$$J_r(q) = J_{Pq} - J_{PV} J_{QV}^{-1} J_{Qq} \quad (3)$$

证明 1 若潮流雅可比矩阵 J 为对称阵, 且其奇异值分解形式为 $J=U\Sigma V^T$, 则 $V^T U=I$ 。

对任一奇异值 s_i , 有

$$J v_i = s_i u_i \quad (4)$$

$$J^T u_i = s_i v_i \quad (5)$$

式中 非零向量 u_i 和 v_i 分别称为矩阵 J 的对应于奇异值 s_i 的左、右奇异向量。

式(4)、(5)可用矩阵表示为

$$J V = U \Sigma \quad (6)$$

$$J^T U = V \Sigma \quad (7)$$

由 $J=J^T$, 得 $U=V$, 即对应于奇异值 s_i 的左、右奇异向量完全相同, 由式(6)得 $J=U\Sigma U^{-1}$, 形式上与特征值分析完全相同。另一方面, 因为矩阵 U 为正交矩阵, 所以 $J=U\Sigma U^T$, 并且 $U^T U=I$, 上述结论对正交矩阵 V 同样成立。由 $V^T U=I$ 得 $v_i^T u_i=1$, 令 $p_{ji} = u_{ji} v_{ji}$, 称 p_{ji} 为奇异参与因子, 则对所有的变量 $j(j=1,2,\dots,m)$ 和所有的模态 $i(i=1,2,\dots,n)$, 都

有 $\sum_{j=1}^m p_{ji} = \sum_{i=1}^n p_{ji} = 1$ 。另外, $J=U\Sigma U^T$ 与对称矩

阵的 LDL^T 分解完全不同。

证明 2 若潮流雅可比矩阵 J 为对称阵, 则降阶矩阵 $J_r(q)$ 和 $J_r(V)$ 也是对称阵。

$$\text{设 } J = \begin{bmatrix} J_{Pq} & J_{PV} \\ J_{Qq} & J_{QV} \end{bmatrix}, \quad J^T = \begin{bmatrix} J_{Pq}^T & J_{Qq}^T \\ J_{PV}^T & J_{QV}^T \end{bmatrix},$$

当 $J=J^T$ 时, 有

$$\begin{aligned} J_r^T(q) &= J_{Pq}^T - J_{Qq}^T (J_{QV}^T)^{-1} J_{PV}^T = \\ &= J_{Pq}^T - J_{Qq}^T (J_{QV}^T)^{-1} = J_r(q) \end{aligned} \quad (8)$$

同理可证 $J_r(V) = J_r^T(V)$ 。

证明 3 若潮流雅可比矩阵 J 可分解为 $J=J_S+J_{AS}$, 其中 J_S 表示其对称部分, J_{AS} 表示其反对称部分, 则有 $\|J\| - \|J_S\| \leq \|J_{AS}\|$ 。

由 $J=J_S+J_{AS}$, 得 $\|J\| = \|J_S+J_{AS}\| \leq \|J_S\| + \|J_{AS}\|$, $\|J\| - \|J_S\| \leq \|J_{AS}\|$; 由 $\|J_S\| = \|J-J_{AS}\| \leq \|J\| + \|J_{AS}\|$ 得 $-\|J_{AS}\| \leq \|J\| - \|J_S\|$, 故得 $\|J\| - \|J_S\| \leq \|J_{AS}\|$ 。

2.2 非奇异对称矩阵特点

若矩阵 J 具有对称性, 即 $J=J^T$, 则 J 具有以下特点:

(1) $\sum_{j=1}^m p_{ji} = 1, \forall j(j=1,2,\dots,m)$ 。其中 $J=U\Sigma V^T; V^T U=I$, 奇异值 $\Sigma = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n), s_i = \max s, s_n = \min s$ 。

(2) $s_i(J) = |I_i(J)|, \forall i(i=1,2,\dots,n)$ 。

对正规矩阵, 均有 $s_i(J) = |I_i(J)|$ 成立, 对称阵和反对称阵都是正规矩阵, 但潮流雅可比矩阵 J 不是反对称阵, 因为若 $J=-J^T$, 必有对角元素 $J_{ii}=0$, 而事实上 $J_{ii} \neq 0$, 所以 $J \neq -J^T$ 。

(3) $k_2 = \max |I| / \min |I|$, 适用于非奇异正规阵。其中 $k_2 = \max s / \min s$, 称为矩阵的谱条件数。

(4) $\|J\|_1 = \|J\|_\infty$, 对称阵和反对称阵都成立。

(5) $\|J\| = \|J_S\|$, 或 $\|J_{AS}\| = 0$, 可用矩阵的 1—范数、2—范数或 ∞ —范数表示。

2.3 不对称矩阵的充要条件

对应地, 若矩阵 J 具有不对称性, 即 $J \neq J^T$, 则其成立的充要条件如下:

(1) $\exists i(i=1,2,\dots,n), \text{st } \sum_{j=1}^m p_{ji}(s_i) \neq 1$ 。

(2) $\exists i(i=1,2,\dots,n), \text{st } s_i(J) \neq |I_i(J)|$ 。

(3) $k_2 \neq \max |I| / \min |I|$ 。

(4) $\|J\| \neq \|J_S\|$, 或 $\|J_{AS}\| \neq 0$ 。

事实上, 根据矩阵 J 与 J_S 的关系可生成新的充要条件, 如 $|I_i(J)| \neq |I_i(J_S)|$, 或 $s_i(J) \neq s_i(J_S)$ 。

另外, $\|J\|_1 \neq \|J\|_\infty$ 只是矩阵 J 不对称的充分条件, 即 $\|J\|_1 = \|J\|_\infty$ 是矩阵 J 对称的必要条件。

2.4 矩阵不对称性指标划分及其特点

(1) 指标 1 为 $\sum_{j=1}^m p_{ji}(s_i)$, 选用 $\sum_{j=1}^m p_{j1}(s_1)$ 。

(2) 指标 2 为 $|s_i - |I_i|| / |I_i|$, 选用 $(\max s - \max |I|) / \max |I|$ 。

(3) 指标 3 为 $[k_2 - (\max |I| / \min |I|)] / k_2$ 。由式(9)

可得^[13] $0 \leq \frac{\max|I|}{\max S} \frac{\min S}{\min|I|} \leq 1$ 。

$$\min S \leq \min|I| \leq \max|I| \leq \max S \quad (9)$$

指标 3 越小于 1，矩阵不对称性越强。

(4) 指标 4 为 $\|\mathbf{J}\|_1 - \|\mathbf{J}\|_\infty / \|\mathbf{J}\|_\infty$ 。

(5) 指标 5~7 为 $\|\mathbf{J}\| - \|\mathbf{J}\|_S / \|\mathbf{J}\|$ ，分别用矩阵的 1—范数、2—范数和 ∞ —范数表示，其中指标 6 等于 $|\max S(\mathbf{J}) - \max S(\mathbf{J}_S)| / \max S(\mathbf{J})$ 。

(6) 指标 8~10 为 $\|\mathbf{J}\|_{AS} / \|\mathbf{J}\|$ 。分别用矩阵的 1—范数、2—范数和 ∞ —范数表示，其中指标 9 等于 $\max S(\mathbf{J}_{AS}) / \max S(\mathbf{J})$ 。

当 $\mathbf{J}=\mathbf{J}^T$ 时，除指标 1 等于 1 外，其他指标均等于 0。事实上，以上所有指标都可转化为以 0 或 1 为极限值。当 $\mathbf{J} \neq \mathbf{J}^T$ 时，均以 0 或 1 为极限值。

上述指标的构成可分为 2 种：①如指标 1 所示，由数学量之和构成，其最大值或上确界为 1，②如其余指标所示，由 2 数学量的比值构成，且分子为 2 项相减，对应的分母可为分子中的任 1 项。

上述关于矩阵 \mathbf{J} 自身的指标可分为 3 类，①如指标 1 所示，用奇异参与因子之和表示；②如指标 2 和 3 所示，用矩阵 \mathbf{J} 的特征值和奇异值表示；③用矩阵 \mathbf{J} 的范数表示，如指标 4 应用矩阵 \mathbf{J} 的 1—范数与 ∞ —范数，指标 5~10 应用矩阵 \mathbf{J} 、 \mathbf{J}_S 和 \mathbf{J}_{AS} 的 1—范数、2—范数和 ∞ —范数表示。矩阵的最大奇异值与矩阵的 2—范数之间的关系是 $\|\bullet\|_2 = \max S$ 。

3 实不对称矩阵新的奇异性指标

3.1 关于潮流雅可比矩阵奇异性的证明

矩阵条件数趋于无穷大的原因是矩阵的最大奇异值趋于无穷大和（或）最小奇异值趋于零。对潮流雅可比矩阵而言，条件数趋于无穷大只是由最小奇异值趋于零引起的，下面给出证明。

证明 4 潮流雅可比矩阵最大奇异值的有界性。

证明过程如下：

无功潮流方程为

$$Q_i = -V_i^2 B_{ii} + V_i \sum_{j \neq i}^n V_j (G_{ij} \sin d_{ij} - B_{ij} \cos d_{ij}) \quad (10)$$

式中： V_i 和 V_j 表示节点 i 和 j 的电压幅值， d_{ij} 表示节点 i 和 j 的电压相位差， G_{ij} 和 B_{ij} 表示节点 i 和 j 间的互电导和互电纳， G_{ij} 和 B_{ij} 表示节点 i 的自电导和自电纳， n 为系统中 PQ 节点数。

由式(10)则有

$$|Q_i| < -V_i^2 B_{ii} + V_i \sum_{j \neq i}^n V_j (-G_{ij} + B_{ij}) \quad (11)$$

设潮流雅可比矩阵 $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{N} \\ \mathbf{K} & \mathbf{L} \end{bmatrix}$ ，现仅以潮流雅可比矩阵 \mathbf{J} 的 \mathbf{H} 子矩阵表示 $\|\mathbf{J}\|$ 有界性证明的过程。

由式 (10)、 $H_{ij} = -V_i V_j (G_{ij} \sin d_{ij} - B_{ij} \cos d_{ij})$ 和 $H_{ii} = V_i^2 B_{ii} + Q_i$ 得 $|H_{ii}| \leq -V_i^2 B_{ii} + |Q_i| < -2V_i^2 B_{ii} + V_i \sum_{j \neq i}^n V_j (-G_{ij} + B_{ij})$ ， $|H_{ij}| < V_i V_j \cdot (-G_{ij} + B_{ij})$ ，以上表明 \mathbf{H} 子矩阵的每一项都是有界的，同理可证其他 3 个子矩阵的每一项也是有界的，即潮流雅可比矩阵 \mathbf{J} 的每一项都是有界的，又由于潮流雅可比矩阵 \mathbf{J} 是有限维的，故其每一列元素的绝对值之和是有界的。因此 $\|\mathbf{J}\|_1$ 是有界的。设 $\sup(\|\mathbf{J}\|_1) = p (p > 0)$ ，由于有限维矩阵的任何范数都是等价的，因此设 $a \|\mathbf{J}\|_1 \leq \|\mathbf{J}\|_2 \leq b \|\mathbf{J}\|_1$ ，其中 $b \geq a > 0$ 。由于 $\|\mathbf{J}\|_1 < p$ ，所以 $0 < \|\mathbf{J}\|_2 < np = M$ ，即 $0 < \max S < M$ ，从而使 $k_2 = +\infty$ 由 $\min S = 0$ 惟一确定。

又由于 $\max |I(\mathbf{J})| \leq \max S(\mathbf{J})$ ， $0 < \max S < M$ ，所以 $\max |I(\mathbf{J})| < M$ ，因此 $\max |I| / \min |I| = +\infty$ 与 $\min |I| = 0$ 也是一致的。

3.2 矩阵的奇异性特点

若矩阵 \mathbf{J} 具有奇异性，则矩阵 \mathbf{J} 具有以下特点：

(1) $\min S = 0$ 或 $\min I = 0$ 。

(2) $\max S / \min S = +\infty$ 或 $\max |I| / \min |I| = +\infty$ 。

(3) $\sum_{j=1}^m p_{jn}(S_n) = 1$ 。

3.3 矩阵奇异性的新指标

(1) 指标 11 为 $\sum_{j=1}^m p_{jn}(S_n)$ 。

(2) 指标 12 为 $(\min |I| - \min S) / (\min |I|)$ 。

指标 2、3 和 12 的构成依据为：由式(9)得 $\max S - \max |I| \geq 0$ ， $\min |I| - \min S \geq 0$ ， $k_2 - \max |I| / \min |I| \geq 0$ ，以保证指标始终不小于零。指标 3 和 12 的缺点为：在临界状态下， $\min |I| = 0$ 。

4 仿真

应用 IEEE 30 系统算例^[14]，假设全系统负荷以同一负荷因子 k 增加， $k_{\max} = 1.86$ 。表 1 给出了发电机节点 PV-PQ 转换时负荷因子 k 的值。由表 1 可

以看出：当 $k=1.62$ 时，系统中所有PV节点都已转化为PQ节点。从图1可以看出：矩阵 J 的不对称性明显强于矩阵 $J_r(V)$ 和 $J_r(q)$ ，且指标11的突变与PV-PQ的转换密切相关。图2是对图1的局部放大，从图2可以看出：矩阵 $J_r(q)$ 的不对称性稍强于矩阵 $J_r(V)$ 。图1和图2的最大不同在于：对指标11而言，矩阵 J 的变化趋势与矩阵 $J_r(V)$ 和 $J_r(q)$ 正好相反，且对矩阵 J 而言，指标11趋于1，这是因为矩阵 J 趋于奇异， $\min|I|$ 和 $\min s$ 同时趋于零的缘故。

从图3可以看出：对3个矩阵而言， $\min s=f(k)$ 是严格单调减函数，且在PV-PQ转换时都不同程度地出现陡降现象，即使维数恒定的矩阵 $J_r(q)$ 也不例外，只是其降幅较小。以矩阵 J 为例，负荷因子 k 的增大使 $\min s(J)$ 缓降，而PV-PQ转换使 $\min s(J)$ 陡降，这2方面原因使 $\min s(J)=f(k)$ 成为严格单调减函数。另外，这3个矩阵是同时奇异的^[15]。

从图4可以看出：除矩阵 $J_r(V)$ 的 $\min s$ 在初始阶段由于PV-PQ的转换出现陡升现象外，其他矩阵、其余阶段均不明显，显然符合矩阵增维后 $\min s$ 不减的性质，同时这也与 $\min s(J)$ 形成鲜明对比，并且 $\min s=f(k)$ 是(分段)严格单调减函数。

以矩阵 J 为例，从图5中可以看出： $\min|I(J)|-\min s(J)=G(k)$ 是分段单调减函数， $\min|I(J)|-\min s(J)=G(k)$ 曲线的陡升现象是PV-PQ转换的结果。当 $k>1.62$ 后，二者的差值越来越小，直至等于零。但这不能说明矩阵的对称性增强，因为矩阵对称是指对所有的 i 都有 $s_i(J)=|I_i(J)|$ 成立，并不单纯指最小值， $\min|I|-\min s$ 只是矩阵对称的必要条件，但是可用 $\min|I|-\min s$ 表示矩阵的奇异性。同时也可以看到：矩阵 J 的数值大于矩阵 $J_r(V)$ 和 $J_r(q)$ 的数值，但由于其数量级非常小，无法与图6中的数值相比，因此对这3个矩阵而言，可认为 $\min|I|-\min s$ 。

表1 IEEE 30系统中PV-PQ转换节点
Tab. 1 The PV-PQ transition nodes in IEEE30 system

负荷因子 k	1.05	1.46	1.48	1.62
转换节点号	8	2	5	11,13

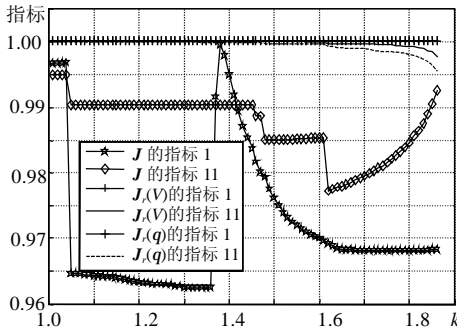


图1 负荷因子 k 与指标1和11的关系曲线
Fig. 1 The curves of k versus indices 1 and 11

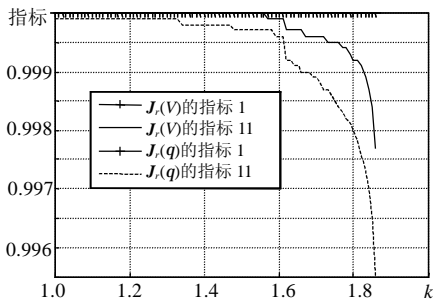


图2 负荷因子 k 与指标1和11的关系曲线
Fig. 2 The curves of k versus indices 1 and 11

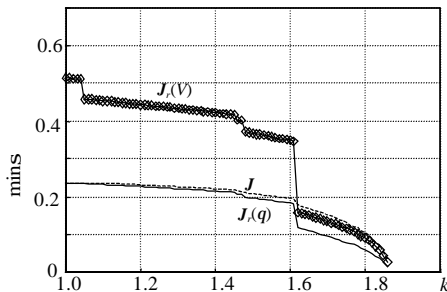


图3 负荷因子 k 与最小奇异值 $\min s$ 的关系曲线
Fig. 3 The curves of loading factor k versus $\min s$

设矩阵的奇异值排序为 $\max s = s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n = \min s$ ，特征值排序为 $\max|I| = |I_1| \geq |I_2| \geq \dots \geq |I_n| = \min|I|$ ，因 $\max s \geq \max|I| \geq \min|I| \geq \min s$ ，此若 $\max s - \max|I| < e_1$ ， $\min|I| - \min s < e_2$ (e_1, e_2 均为非常小的正数)，则可认为矩阵是对称的，

同时这也与 $\min s(J)$ 形成鲜明对比，并且 $\min s=f(k)$ 是(分段)严格单调减函数。

从图4可以看出：除矩阵 $J_r(V)$ 的 $\min s$ 在初始阶段由于PV-PQ的转换出现陡升现象外，其他矩阵、其余阶段均不明显，显然符合矩阵增维后 $\min s$ 不减的性质，同时这也与 $\min s(J)$ 形成鲜明对比，并且 $\min s=f(k)$ 是(分段)严格单调减函数。

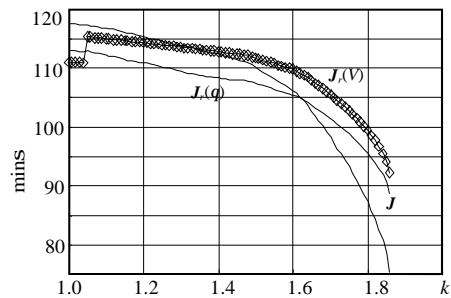


图4 负荷因子 k 与最大奇异值 $\min s$ 的关系曲线
Fig. 4 The curves of k versus $\min s$

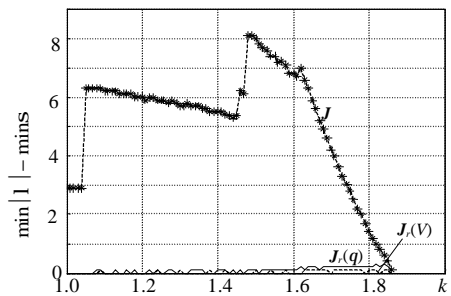


图5 负荷因子 k 与 $\min|I|-\min s$ 的关系曲线
Fig. 5 The curves of k versus $\min|I|-\min s$

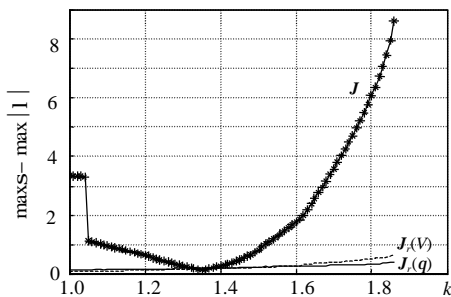


图 6 负荷因子 k 与 $\max_s - \max |I|$ 的关系曲线
 Fig. 6 The curves of k versus $\max_s - \max |I|$

从图 5、6 中可以看到，矩阵 $J_r(V)$ 和 $J_r(Q)$ 就是这种情况，对矩阵 J 而言， $\min |I| - \min_s < e_2$ 可认为是始终成立的，而 $\max_s - \max |I| < e_1$ 是否成立应看作是矩阵不对称性强弱的标志，因此从这个角度讲， $k=1.35$ 时，矩阵 J 的对称性是最强的，指标 2、3 可以衡量矩阵的不对称性。

由于 $\min |I(J)| - \min_s$ 与 $\max_s - \max |I(J)|$ 相比是可以忽略的，因此可以认为矩阵不对称性的变化趋势是由 $\max_s - \max |I(J)|$ 决定的。由图 6 可以看出：矩阵 J 的数值远远大于矩阵 $J_r(V)$ 和 $J_r(Q)$ 的数值，例如，当 $k > 1.35$ 后，这 3 条曲线都是单调上升的，且矩阵 $J_r(Q)$ 的数值略大于矩阵 $J_r(V)$ 的数值，因此可认为矩阵 J 、 $J_r(Q)$ 和 $J_r(V)$ 的不对称性依次增强。

由上知可用 $\min_s - \min |I(J)|$ 表示矩阵的不对称程度，用 $\min |I(J)| - \min_s$ 表示矩阵的奇异程度。

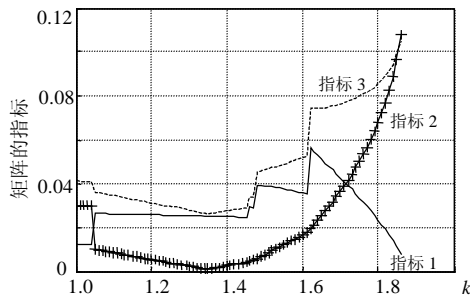


图 7 负荷因子 k 与指标 2、3 和 12 的关系曲线
 Fig. 7 The curves of k versus indices 2,3 and 12

从图 7 可以看出： $k=1.05$ 时，3 个指标同时突变。从图 4 可以看出： $\max_s(J)=f(k)$ 是严格单调减函数，从图 6 可以看出：当 $k > 1.35$ 时， $\max_s(J) - \max |I(J)| = g(k)$ 是单调增函数，因此 $\max |I(J)| = f(k)$ 也是单调减函数，由此可推出指标 2 是单调增函数，正如图 7 中所示，当 $k < 1.35$ 时也可做类似分析。因此 $\max_s(J) - \max |I(J)|$ 与指标 2 的曲线特性完全一致，这可通过对比图 6 和图 7 中相关曲线进行验证。

从图 7 可以看出：指标 2 和 3 的变化趋势始终一致，并且 $k=1.35$ 时，指标 2 和 3 同时到达最小

值。指标 3 的等价形式为 $1 - \max |I| \min_s / \max_s \min |I|$ 。从图 5、6 可以看到：由于 $\min |I(J)| - \min_s(J)$ 与 $\max_s(J) - \max |I(J)|$ 相比要差 2 个数量级，因此可以认为 $\min |I| \equiv \min_s$ ，由此指标 3 近似等于 $1 - \max |I| / \max_s$ 。若 $\max_s(J) - \max |I(J)| = g(k)$ 是单调增函数，则 $\max |I| / \max_s$ 是单调减函数，所以 $1 - (\max |I| / \max_s)$ 即 $1 - \max |I| \min_s / \max_s \min |I|$ 是单调增函数，同理， $\max_s / \max |I| - 1$ 是单调增函数，所以 $\max_s / \max |I| - 1$ 也是单调增函数，若 $\min_s(J) - \min |I(J)| = g(k)$ 是单调减函数，也可得出相同的结论。因此指标 2 和 3 的变化趋势一致是自然的，如图 7 所示。

指标 2 与指标 3 相比，可以看出指标 2 的曲线比较光滑，而指标 3 的曲线不可导点比较多，但指标 3 能反映 PV-PQ 转换，两指标都能反映矩阵不对称性的变化趋势。

从图 7 可看出：而指标 3 和 12 的突变点相同且与 PV-PQ 转换点一致，在 $k \in [1, 1.62]$ 阶段，指标 12 可作为衡量矩阵不对称性的指标。在 $k \in (1.62, 1.86]$ 阶段，指标 12 是负荷因子 k 的单调减函数，且 $\min_s(J)$ 和 $\min |I(J)| - \min_s(J)$ 都已非常小，因此仍作为矩阵不对称性指标已不合适，这一点与指标 11 相同，但可作为衡量矩阵奇异性的指标。

下面对指标 2、3 和 12 间的关系作一简单说明。

从图 5、图 6 中也可以看到：当 $k_{\max} = 1.86$ 时， $\min |I(J)| - \min_s(J)$ 取得最小值，而 $\max_s(J) - \max |I(J)|$ 取得最大值。

(1) 指标 2 与指标 3 之差为

$$\frac{[(\max_s)^2 \min |I(J)| + (\max |I(J)|)^2 \min_s] / \max_s \max |I| \min |I| - 2}{}$$

在 $k=1.35$ 及其附近， $\max_s(J) \approx \max |I(J)|$ ，此时 2 指标之差为 $(\min |I| + \min_s) / \min |I| - 2 < 0$ ，当 $k=1.86$ 时， $\min |I(J)| = \min_s(J)$ ，此时 2 指标之差为 $[(\max_s)^2 + (\max |I(J)|)^2] / \max_s \max |I| - 2 > 0$ ，即 2 指标之差出现了由负到正的转折。

(2) 指标 2 与指标 12 之差为

$$\left(\frac{\max_s}{\max |I|} - 1 \right) - \left(1 - \frac{\min_s}{\min |I|} \right) = \frac{\max_s}{\max |I|} + \frac{\min_s}{\min |I|} - 2$$

由式(9)得 $\max_s / \max |I| \geq 1$ ， $\max_s / \max |I| \leq 1$ ，在 $k=1.35$ 及其附近， $\min |I(J)| > \min_s(J)$ ，并且可认为 $\max_s(J) = \max |I(J)|$ ，因此 2 指标之差小于零，而在 $k=1.86$ 及其附近时， $\max |I(J)| < \max_s(J)$ ，并且可认为 $\min_s(J) = \min |I(J)|$ ，因此 2 指标

之差大于零,即2指标之差也出现了由负到正的转折,只是转折点对应的 k 值不同。

(3) 指标3与指标12之差为

$$\left(1 - \frac{\max|I|}{\max S} \frac{\min S}{\min|I|}\right) - \left(1 - \frac{\min S}{\min|I|}\right) = \frac{\max S - \max|I|}{\max S \min|I|} \min S \geq 0$$

即指标3与12之差始终不小于零。

以上所述均可从图7中得到验证。

对比图7中指标12与图5中关于矩阵 J 的曲线,可以看到2条曲线的突变点完全相同且与PV-PQ转换点重合,并且变化趋势一致。且图7中指标2与图6中关于矩阵 J 的曲线也存在类似情况。

当 $k \geq 1.47$ 后,从图8可以看出不对称性排序按矩阵 J 、 $J_r(q)$ 和 $J_r(V)$ 依次增强。

若 $\|J\|_1 \neq \|J\|_\infty$,则矩阵 J 必不对称,且 $\|J\|_1 - \|J\|_\infty$ 越大,则矩阵 J 可能越不对称。但 $\|J\|_1 = \|J\|_\infty$,则矩阵 J 也不一定对称。虽然 $\|J\|_1$ 和 $\|J\|_\infty$ 都只与矩阵的某一特殊行或列有关,不能反映矩阵的整体特征,但此指标同时涉及到矩阵的2个范数,因此对潮流雅可比矩阵而言有一定的适用性。

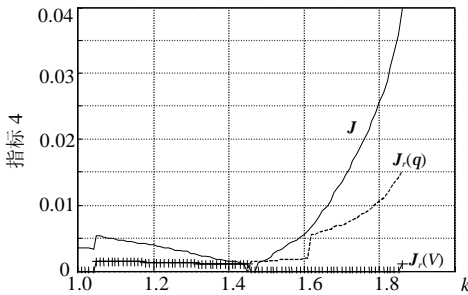


图8 负荷因子 k 与指标4的关系曲线
Fig. 8 The curves of k versus index 4

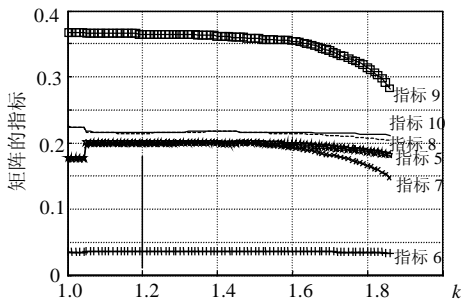


图9 矩阵 J 的负荷因子 k 与指标5~10的关系曲线
Fig. 9 The curves of k versus indices 5~10 of matrix J

从图9可以看出:指标5~7均小于指标8~10,这是由 $\|J\| - \|J_S\| \leq \|J_{AS}\|$ 决定的。指标6显著小于指标5和7,指标9显著大于指标8和10,这是因为矩阵 J_S 和 J_{AS} 都属于正规矩阵,而对于正规矩阵

而言,有 $\|\bullet\|_2 = \min\{\|\bullet\|\}$ 成立,并且矩阵 J 是准对称的。同时可以看出:除指标6外,其他指标明显偏大。不论指标5和7还是指标8和10,当 $k > 1.62$ 后,这2对指标的差距加大,因此尽管其变化趋势都是下降的,但矩阵 J 的不对称性是增强的。

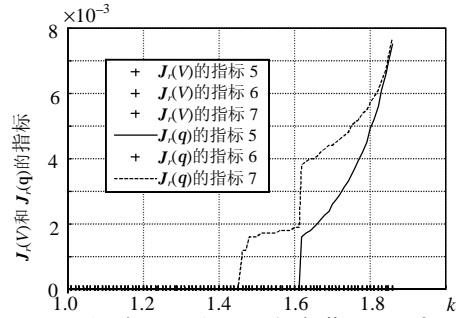


图10 矩阵 $J_r(V)$ 和 $J_r(q)$ 的负荷因子 k 与指标5-7的关系曲线

Fig. 10 The curves of k versus indices 5-7 of matrices $J_r(V)$ 和 $J_r(q)$

从图10也可以得出矩阵 $J_r(q)$ 的不对称性稍强于矩阵 $J_r(V)$ 的结论,但从其数量级上可以认为矩阵 $J_r(q)$ 和 $J_r(V)$ 都是对称的。

从图9、10可以看出:矩阵 J 的不对称性明显强于矩阵 $J_r(q)$ 和 $J_r(V)$ 。从图11可以看出:对3个矩阵而言, $k_2 = F(k)$ 是严格单调增函数,且在PV-PQ转换时都有不同程度的陡升现象,这与 $\min S = f(k_2)$ 曲线极为一致。从图11还可以看出:虽然3个矩阵的条件数不同,但变化趋势相同,且都反映同一客观现象。对于任一 k 值,排序与 $\min S$ 的排序始终相反,而与 $\max S$ 的排序无关,这说明 k_2 主要由 $\min S$ 决定。当 $k > 1.62$ 后,在这3个矩阵中,矩阵 J 的不对称最强,奇异性也最强。

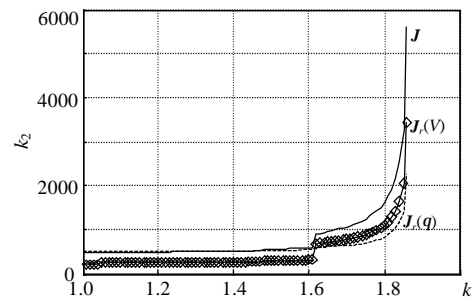


图11 负荷因子 k 与谱条件数 k_2 的关系曲线

Fig. 11 The curves of k versus k_2

对实矩阵而言,维数增加使 $\max S$ 不减少, $\min S$ 不增加,因此 k_2 不减少。对潮流雅可比矩阵 J 而言,每一次PV-PQ转换都使 $\max S(J)$ 不减少, $\min S(J)$ 陡降,因此 $k_2(J)$ 陡升。

当矩阵奇异时,即负荷因子 $k=k_{\max}$ 时, $k_2=+\infty$, 这说明 $d(\min s)/dk < d(\max s)/dk$, 即 $\max s$ 的平均减少速率明显小于 $\min s$ 的平均减少速率。

5 关于潮流雅可比矩阵的不对称性和奇异性的关系

就潮流雅可比矩阵 J 而言, 其不对称性由导纳阵中电导 G_{ij} 是否为零惟一确定, 其奇异性由负荷因子 k 惟一确定。若 $J=J^T$, 不对称性与奇异性无关。若 $J \neq J^T$, 则二者间有一定的关联, 接近临界点处, 不对称性与奇异性都在增强。 $\max s - \max |I|$ 表示不对称程度, 而 $\min |I| - \min s$ 表示奇异程度, 同理, 对应于最大奇异值的参与因子之和的大小也是表示对称程度的一个量度, 而对应于最小奇异值的参与因子之和的大小则是表示奇异程度的一个量度。以上说明, 虽然潮流雅可比矩阵 J 是网络拓扑和运行参数的函数, 但网络拓扑对其对称性的影响是决定性的, 由此导出的参与因子也是如此。

谱条件数 k_2 和指标 3 虽然都与 $\max s$ 和 $\min s$ 有关, 但由于 k_2 主要由 $\min s$ 决定, 因此 k_2 应是衡量矩阵奇异性的指标, 而指标 3 主要由 $\max s$ 和 $\max |I|$ 决定, 因此指标 3 应是衡量矩阵不对称性的指标, 这在仿真中也得到证实。

综上所述, 在衡量矩阵不对称性方面, 指标 2 和 3 最好, 因此也可用 $s_i(J_s)$ 代替 $|I_i(J)|$ 重构这 2 个指标。在衡量矩阵奇异性方面, 指标 11 和 12 只适用于负荷因子 k 已很大的情况。

6 结论

本文提出了衡量矩阵不对称程度的指标, 并提出了衡量不对称矩阵奇异程度的新指标, 而且对矩阵不对称性和奇异性间的关系进行了分析, 最后针对潮流雅可比矩阵及其相应的降阶雅可比矩阵, 用 IEEE30 系统算例验证了上述指标的合理性并作了分析。

参考文献

- [1] P-A Lof T, Smed G, Anderson D J Hill. Fast calculation of a voltage stability index[J]. IEEE Trans on Power Systems, 1992, 7(1): 54-64.
- [2] 王锡凡. 现代电力系统分析[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [3] Claudio A Canizares, Antonio C Z de Souza, Victor H Quintana. Comparison of performance indices for detection of proximity to voltage collapse[J]. IEEE Trans on Power Systems, 1996, 11(3): 1441-1447.

- [4] C W Taylor. 电力系统电压稳定 (影印版)[M]. 北京: 中国电力出版社, 2001.
- [5] P Kundur. 电力系统稳定与控制(影印版)[M]. 北京: 中国电力出版社, 2001.
- [6] 程浩忠. 电力系统电压崩溃状态的近似算法[J]. 电力系统自动化, 1996, 20(5): 14-18.
Cheng Haozhong. An approximate algorithm of the critical state of voltage collapse in electric power systems[J]. Automation of Electric Power Systems, 1996, 20(5): 14-18.
- [7] 周双喜, 姜勇, 朱凌志. 电力系统电压静态稳定性指标述评[J]. 电网技术, 2001, 25(1): 1-7.
Zhou Shuangxi, Jiang Yong, Zhu Lingzhi. Review on steady state voltage stability indices of power systems[J]. Power System Technology, 2001, 25(1): 1-7.
- [8] 周双喜, 朱凌志, 郭锡玖, 等. 电力系统电压稳定性与控制[M]. 北京: 中国电力出版社, 2004.
- [9] 贾宏杰, 余贻鑫, 王成山. 利用局部指标进行电压稳定在线监控的研究[J]. 电网技术, 1999, 23(1): 45-49.
Jia Hongjie, Yu Yixin, Wang Chengshan. An application of local index to on-line monitoring and control of power system voltage stability [J]. Power System Technology, 1999, 23(1): 45-49.
- [10] 贾宏杰, 李鹏, 宿吉峰, 等. 天津电网电压稳定性分析[J]. 电网技术, 2002, 26(7): 42-45.
Jia Hongjie, Li Peng, Su Jifeng, et al. Voltage stability study on tianjin power system[J]. Power System Technology, 2002, 26(7): 42-45.
- [11] 李兴源, 王秀英. 基于静态等值和奇异值分解的快速电压稳定性分析方法[J]. 中国电机工程学报, 2003, 23(4): 1-4, 20.
Li Xingyuan, Wang Xiuying. Fast voltage stability analysis methods based on static equivalence and singular value resolution [J]. Proceedings of the CSEE, 2003, 23(4): 1-4, 20.
- [12] 马平, 蔡兴国, 于继来, 等. 基于最小不匹配函数的低压减载算法研究[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(1): 27-31.
Ma Ping, Cai Xingguo, Yu Jilai, et al. A study on a undervoltage load shedding strategy based minimum mismatch function[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(1): 27-31.
- [13] G H 戈卢布, C F 范洛恩著, 袁亚湘译. 矩阵计算[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [14] 张伯明, 陈寿孙. 高等电力网络分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [15] L C P da Silva, Y Wang, V F da Costa, et al. Assessment of generator impact on system power transfer capability using modal participation factors[J]. IEE Proc. -Gener. Transm Distrib., 2002, 149(5): 564-570.

收稿日期: 2006-02-08。

作者简介:

徐志友 (1965-), 男, 博士研究生, 研究方向为电力系统电压稳定性;

纪延超 (1962-), 男, 博士, 博士生导师, 现从事 FACTS 在电力系统中的应用;

(责任编辑 喻银凤)