

利用单模激光 Lorenz 系统实现混沌反控制*

栾玲¹, 冯立军²

(1 大连大学 物理科学与技术学院, 大连 116622)

(2 海军大连舰艇学院, 大连 116018)

摘 要:利用 Lyapunov 函数方法,对混沌反控制问题进行了研究.以单模激光 Lorenz 系统和描述心脏搏动的 Bonhoeffer-Van der Pol 系统为例,设计了一种控制器,成功地使 Bonhoeffer-Van der Pol 系统混沌化.给出了控制器的具体设计方案以及单模激光 Lorenz 系统与 Bonhoeffer-Van der Pol 系统状态之间误差系统的结构.仿真结果表明,在控制器的作用下,Bonhoeffer-Van der Pol 系统所有状态变量严格地跟踪了单模激光 Lorenz 系统的混沌轨迹,对应的相空间中 Bonhoeffer-Van der Pol 系统的轨迹也由极限环转变为与单模激光 Lorenz 系统的轨迹完全相同的混沌吸引子, Bonhoeffer-Van der Pol 系统严格地跟踪了单模激光 Lorenz 系统混沌的动态行为.

关键词:单模激光 Lorenz 系统; Bonhoeffer-Van der Pol 系统; Lyapunov 函数; 混沌; 反控制

中图分类号: O415.5

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2007)10-1833-4

0 引言

混沌系统的最大特点在于混沌运动对初始状态的敏感依赖—蝴蝶效应,因此在生产和实践中都尽量避免有害混沌. Ott 等人于 1990 年提出了控制混沌的 OGY^[1]方法以来,混沌控制方法已经得到多方面的发展,人们提出各种混沌控制方法,并在光学、化学反应、人工神经网络、生物系统和信息通讯等大量实验和应用中得到验证^[2-11]. 但是随着研究的不断深入,人们发现混沌在某些应用领域是十分有用的,特别是在光学、保密通信以及信号处理等领域有着不可估量的应用前景,由此混沌反控制研究成为目前混沌及其混沌控制研究领域的一个新的前沿课题^[12-14]. 所谓混沌反控制一方面是将一个非混沌系统按照既定的目标混沌化,即对于一个非混沌系统,通过施加一定的控制,使其出现混沌行为;另一方面是对一个混沌系统进一步增强或维持其混沌行为. 本文利用 Lyapunov 函数方法,以单模激光 Lorenz 系统和描述心脏搏动的 Bonhoeffer-Van der Pol (BVP)系统为例,设计了一种控制器,成功地使 BVP 系统混沌化. 给出了控制器的具体设计方案以及单模激光 Lorenz 系统与 BVP 系统状态之间误差系统的结构. 仿真模拟结果表明,在控制器的作用下,BVP 系统所有状态变量严格地跟踪了单模激光 Lorenz 系统的混沌轨迹,系统误差变量经过短暂的时间序列以后始终平稳地趋于零. 对应的相空间中 BVP 系

统的轨迹也由极限环转变为与单模激光 Lorenz 系统轨迹完全相同的混沌吸引子, BVP 系统严格地跟踪了单模激光 Lorenz 系统混沌的动态行为.

1 控制器的设计

单模激光 Lorenz 系统动力学方程为^[15]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sigma(x_1 - y_1) \\ \dot{y}_1 = x_1(\mu - z_1) - y_1 \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - r z_1 \end{cases} \quad (1)$$

当系统参量 $\sigma=10, r=8/3, \mu=28$ 时,系统呈现混沌态.

FitzHugh 提出的 BVP 系统形式为^[16]

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = x_2 - x_2^3/3 - y_2 + u_1(t) \\ \dot{y}_2 = c(x_2 + a - b y_2) + u_2(t) \end{cases} \quad (2)$$

式中 a, b, c 为系统参量, $u_1(t), u_2(t)$ 为控制器.

单模激光 Lorenz 系统式(1)的定态解 (x_0, y_0, z_0) 由 $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$ 给出,即

$$\begin{cases} \sigma(y_0 - x_0) = 0 \\ (\mu - z_0)x_0 - y_0 = 0 \\ x_0 y_0 - r z_0 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

由式(3)可以得到 Lorenz 系统的定态解 (x_0, y_0, z_0) 为 $(\pm\sqrt{r(\mu-1)}, \pm\sqrt{r(\mu-1)}, \mu-1)$.

设 x', y', z' 是定态解 (x_0, y_0, z_0) 附近的小扰动,将其代入式(1)中,得到其扰动线性化方程

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \mu - z_0 & -1 & -x_0 \\ y_0 & x_0 & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (4)$$

其本征值方程为

* 辽宁省自然科学基金(20052151)资助

Tel: 0411-81895310 Email: luanling1998@sina.com

收稿日期: 2007-01-25

$$\begin{vmatrix} -\sigma-\omega & \sigma & 0 \\ \mu-z_0 & -1-\omega & -x_0 \\ y_0 & x_0 & -r-\omega \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

即

$$\omega^3 + c_2\omega^2 + c_1\omega + c_0 = 0 \quad (6)$$

其中

$$c_2 = \sigma + r + 1$$

$$c_1 = \sigma + r(\sigma + 1) - \sigma(\mu - z_0) + x_0^2$$

$$c_0 = r\sigma + \sigma x_0 y_0 - r\sigma(\mu - z_0) + \sigma x_0^2$$

由Routh-Hurwith条件,当 $c_2 > 0, c_0 > 0, c_2 c_1 - c_0 > 0$ 时,本征值根的实部是负的,则系统的定态解 (x_0, y_0, z_0) 是稳定的. 将 $\sigma = 10, r = 8/3, \mu = 28$ 代入上式,发现 $c_2 > 0, c_0 > 0$,而 $c_2 c_1 - c_0 < 0$,则本征值根的实部是正的,系统的定态解 (x_0, y_0, z_0) 是不稳定的,系统(1)处于混沌状态,其相图如图1(a).

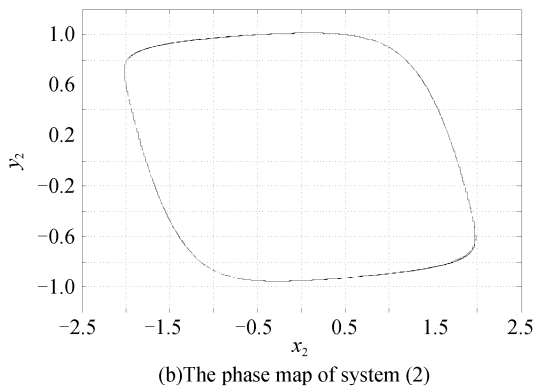
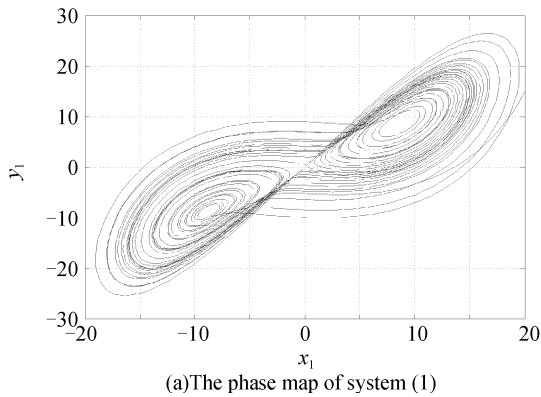


图1 系统(1)和(2)的相图

Fig. 1 The phase maps of system (1) and (2)

同理,当系统(2)参量 $a = c = 0.1, b = 0.2$,由线性稳定性分析可知,其轨迹为单周期振荡的极限环,如图1(b). 相应地系统(1)和(2)状态随时间演化如图2.

对系统(2)设计控制器,引入误差变量 e_i ,以误差变量的动力学方程为基础,构造一个正定的Lyapunov函数 $V(x)$,使其全导数 $\dot{V}(x) \leq 0$,那么,随着时间趋近无穷,系统的误差变量趋于零,从而使BVP系统所有状态变量跟踪单模激光Lorenz系统的混沌轨迹,实现BVP系统的混沌反控制.

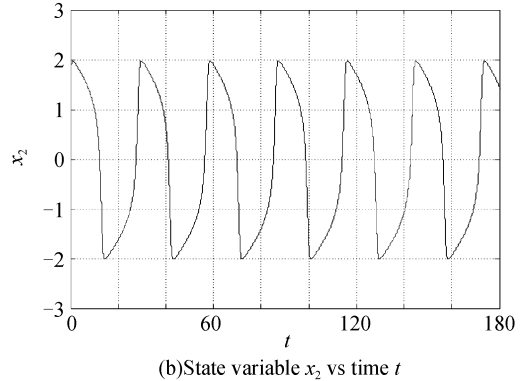
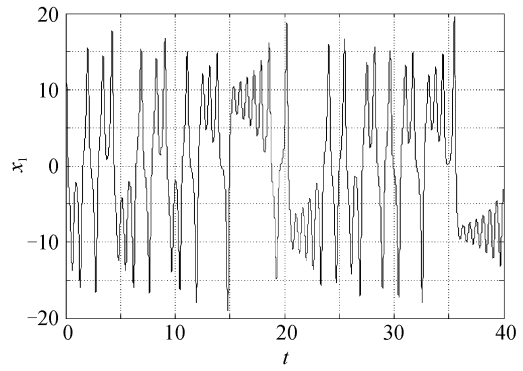


图2 系统(1)和(2)的状态随时间的演化

Fig. 2 State variables of system (1) and (2) vs time t

定义系统(1)和系统(2)中的误差变量

$$e_1 = x_2 - x_1 \quad (7)$$

$$e_2 = y_2 - y_1 \quad (8)$$

构造 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} e_2^2 \quad (9)$$

对式(9)求导,则有

$$\begin{aligned} \dot{V} = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 = & -e_1^2 - e_2^2 + e_1(e_1 + x_2 - x_2^3/3 - \\ & y_2 - \sigma(y_1 - x_1) + u_1(t)) + e_2(e_2 + c(x_2 + a - \\ & by_2) - (\mu x_1 - x_1 z_1 - y_1) + u_2(t)) \end{aligned} \quad (10)$$

若控制器的结构为

$$u_1(t) = -e_1 - x_2 + x_2^3/3 + y_2 + \sigma(y_1 - x_1) \quad (11)$$

$$u_2(t) = -e_2 - c(x_2 + a - by_2) + (\mu x_1 - x_1 z_1 - y_1) \quad (12)$$

则有

$$\dot{V} = -e_1^2 - e_2^2 \quad (13)$$

根据 Lyapunov 稳定性定理^[17],当

$$\dot{V} = -e_1^2 - e_2^2 \leq 0 \quad (14)$$

随着时间的演化,系统的误差变量满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (15)$$

即 BVP 系统所有状态变量严格地跟踪了单模激光 Lorenz 系统的混沌轨迹,实现了 BVP 系统的混沌反控制.

2 仿真模拟

仿真模拟 BVP 系统跟踪单模激光 Lorenz 系统

混沌轨迹的数值结果. 两系统的初值分别取 $(x_1, y_1, z_1) = (20, 15, 40), (x_2, y_2) = (1.7, 2.8)$, 选取参量值分别为 $\sigma=10, r=8/3, \mu=28, a=c=0.1, b=0.2$, 迭代步长为 0.005, 仿真模拟系统状态变化如图 3, 系统误差变量随时间变化如图 4. 从图中可以看出,

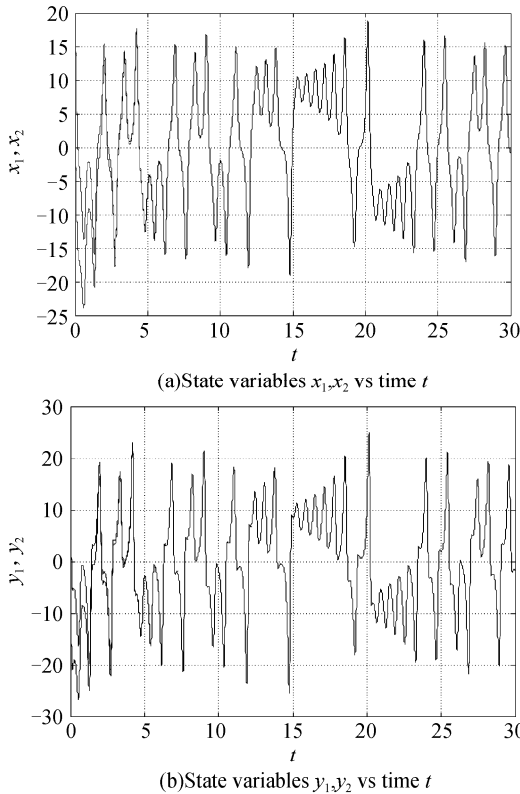


图 3 系统状态变量随时间的演化
Fig. 3 State variables of the systems vs time t

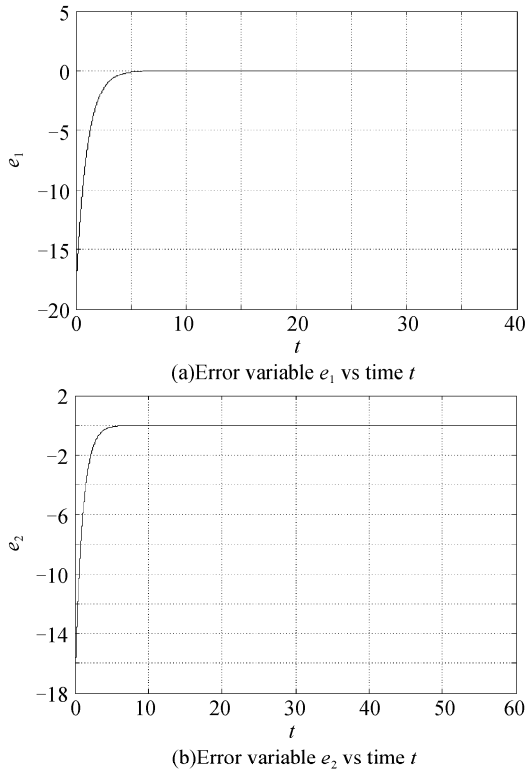


图 4 误差变量随时间的演化
Fig. 4 Error variables vs time t

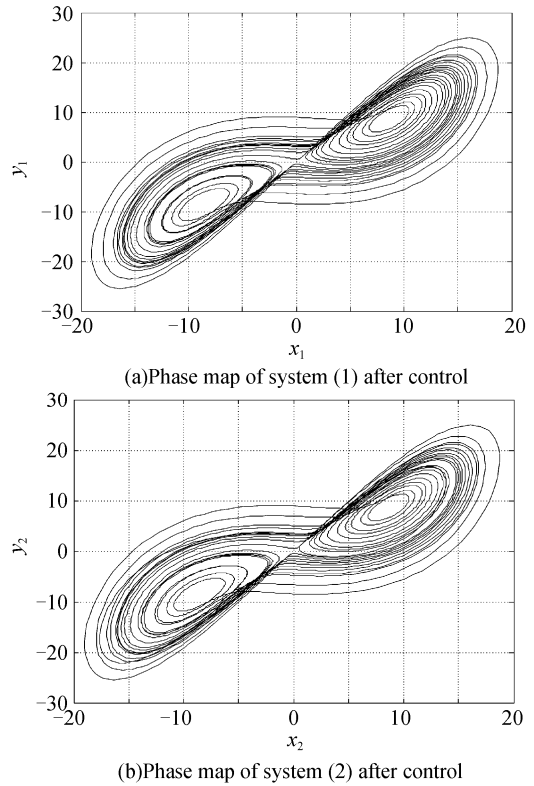


图 5 控制后系统(1)和(2)的相图

Fig. 5 Phase maps of system (1) and (2) after control
在控制器 $u(t)$ 的作用下, BVP 系统所有状态变量严格地跟踪了单模激光 Lorenz 系统的混沌轨迹, 误差变量始终平稳地趋于零, 随着时间变化, 误差曲线一直保持稳定, 无跳跃和陡然上升现象, 对应的相空间中 BVP 系统的轨迹也由极限环转变为与单模激光 Lorenz 系统的轨迹完全相同的混沌吸引子(图 5). 说明实现了 BVP 系统的混沌反控制.

3 结论

利用 Lyapunov 函数方法, 对混沌反控制问题进行了研究. 以单模激光 Lorenz 系统和 BVP 系统为例, 设计了一种控制器, 给出了控制器的具体设计方案以及单模激光 Lorenz 系统与 BVP 系统状态之间的误差系统结构, 严格地使 BVP 系统跟踪了单模激光 Lorenz 系统混沌的动态行为, 成功地使 BVP 系统混沌化.

参考文献

[1] OTT E, GREBOGI C, YORKE J A. Controlling chaos[J]. *Phys Rev Lett*, 1990, **64**(11):1196-1199.
 [2] TRIMPER S, ZABROCKI K. Delay-controlled reactions[J]. *Phys Lett (A)*, 2004, **321**(4):205-215.
 [3] GUEMEZ J, MATIAS M A. Controlling of chaos in unidimensional map[J]. *Phys Lett (A)*, 1993, **181**(1):29-32.
 [4] ROY R, MURPHY JR T W, MAIER T D, et al. Dynamical control of chaotic laser: experimental stabilization of a globally coupled system[J]. *Phys Rev Lett*, 1992, **68**(9):1259-1262.
 [5] YANG T Y, YANG L B, YANG C M. Theory of control of

- chaos using sampled data[J]. *Phys Lett (A)*, 1998, **246**(3-4): 284-288.
- [6] TIAN Y C, TADE M O, LEVY D. Constrained control of chaos [J]. *Phys Lett (A)*, 2002, **296**(2-3): 87-90.
- [7] ALVAREZ-RAMIREZ J, ESPINOSA-PAREDES G, PUEBLA H. Chaos control using small-amplitude damping signals[J]. *Phys Lett (A)*, 2003, **316**(3-4): 196-205.
- [8] AWAD E G. Optimal synchronization of Rossler system with complete uncertain parameters [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, **27**(2): 345-355.
- [9] HUANG Li-lian, FENG Ru-peng, WANG Mao. Synchronization of chaotic systems via nonlinear control[J]. *Phys Lett (A)*, 2004, **320**(4): 271-275.
- [10] YUE Li-juan, SHEN Ke. Controlling and synchronizing spatiotemporal chaos of the coupled Bragg acousto-optical bistable map system using nonlinear feedback[J]. *Chin Phys*, 2005, **14**(9): 1760-1765.
- [11] LÜ Ling, LUAN Ling, GUO Zhi-an. Synchronization of chaotic systems of different orders[J]. *Chin Phys*, 2007, **16**(2): 346-351.
- [12] HU Jia, CHEN Shi-hua, CHEN Li. Adaptive control for anti-synchronization of Chua's chaotic system[J]. *Phys Lett (A)*, 2005, **339**(3-4): 455-460.
- [13] CHEN G, LAI D. Feedback anti-control of discrete chaos[J]. *Int J Bifurcation Chaos Appl Sci Eng*, 1998, **8**: 1585-1590.
- [14] GUAN Xin-ping, FAN Zheng-ping, ZHANG Qun-liang, et al. The study on chaotic anti-control of a continuous-time stable linear system[J]. *Acta Phys Sin*, 2002, **51**(10): 2216-2220. 关新平, 范正平, 张群亮, 等. 连续时间稳定线性系统的混沌反控制研究[J]. *物理学报*, 2002, **51**(10): 2216-2220.
- [15] LÜ Ling, LUAN Ling, DU Zeng. A valid method of controlling chaos in single-mode laser haken-lorenz system [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(4): 416-419. 吕翎, 栾玲, 杜增. 控制单模激光 Haken-Lorenz 系统混沌的一种有效方法[J]. *光子学报*, 2004, **33**(4): 416-419.
- [16] LIU Bing-zheng. Chaos in the life science[M]. Changchun: Northeastern Normal University Press, 1999: 141-144. 刘秉正. 生命科学中的混沌[M]. 长春: 东北师范大学出版社, 1999: 141-144.
- [17] LÜ Ling. Nonlinear dynamics and chaos[M]. Dalian: Dalian Press, 2000: 130-133. 吕翎. 非线性动力学与混沌[M]. 大连: 大连出版社, 2000: 130-133.

Chaotic Anti-control Using Single-mode Laser Lorenz System

LUAN Ling¹, FENG Li-jun²

(1 *Physical Science and Technology Institute, Dalian University, Dalian 116622, China*)

(2 *Dalian Navy Academy, Dalian 116018, China*)

Received date: 2007-01-25

Abstract: The method of Lyapunov function is used to study the chaotic anti-control. Taking the single-mode laser Lorenz system and the Bonhoeffer-Van der Pol (BVP) system as an example, a controller is designed to chaotify the BVP system with the Lorenz system. The design project of controller is given, and the structure of error system is constructed between the state of the BVP system and that of the Lorenz system. The artificial simulation results show that all the state variables of the BVP system can follow those of the Lorenz system, the orbit of the BVP system is exactly the same as that of the Lorenz system. The BVP system is made to track strictly the dynamical behavior of the Lorenz system.

Key words: Single-mode laser Lorenz system; BVP system; Lyapunov function; Chaos; Anti-control



LUAN Ling was born in 1972. She received the M. S. degree in theoretical physics from Liaoning Normal University in 2006. Now she is a teacher at Physical Science and Technology Institute, Dalian University. Her research interest focuses on nonlinear physics.