

潮流雅可比矩阵中有功/相角子矩阵的分析

曹国云, 刘丽霞

(上海交通大学 电子信息与电气工程学院, 上海市 闵行区 200240)

Analysis on the Active Power/Angle Submatrix in Power Flow Jacobian Matrix

CAO Guo-yun, LIU Li-xia

(School of Electronic Information and Electrical Engineering, Shanghai Jiaotong University,
Minhang District, Shanghai 200240, China)

ABSTRACT: The authors study the property of the active power/angle sub-matrix in power flow Jacobian matrix and the sufficient condition for the invertibility of the sub-matrix as well as the necessary condition for singularity are given. These theoretical results not only can clarify the vague understanding of this sub-matrix, but also can offer firm mathematical foundation for the application based on order-reduced power flow Jacobian matrix. Finally, the correctness of this theoretical analysis is validated by numerical results of IEEE 14-bus system.

KEY WORDS: power system analysis; voltage stability; static analysis approach; power flow Jacobian matrix; active power/angle sub-matrix; dominant and irreducible matrix

摘要: 探讨了潮流雅可比矩阵中有功/相角子矩阵的性质, 给出了该矩阵可逆的充分条件及其奇异的必要条件。这些理论结果不仅可以澄清对该矩阵性质的模糊理解, 而且可以为基于降阶潮流雅可比矩阵的应用提供坚实的数学基础。IEEE 14节点算例的仿真结果说明了该理论分析的正确性。

关键词: 电力系统分析; 电压稳定; 静态分析法; 潮流雅可比矩阵; 有功/相角子矩阵; 对角占优与不可约化矩阵

0 引言

保证电力系统电压稳定性已成为电力系统安全运行的一个重要方面。近十几年来, 学术和工程界提出了2种不同的用于分析、计算和控制电力系统电压稳定性的方法, 即静态分析法与时域仿真法^[1-14]。

静态分析法不仅能够判定电力系统是否为电压小扰动稳定, 而且能够计算获得电压薄弱节点, 及对电压稳定有重要影响的发电机和输电线路的灵敏度, 从而为预防电压失稳的控制设计提供重要依据。另一方面, 时域仿真法(不论是短期或中长期仿真)在重现有关电压失稳事故, 或者检验有关控制

策略的有效性等方面具有不可替代的作用。在计算上, 时域仿真法比静态分析法需要更多的计算量。因而静态分析法和时域仿真法各有不同的应用目的和优缺点, 这2种方法是互为补充的。

在静态分析方法中, 潮流方程的雅可比矩阵, 以及反映节点无功注入的微增量与节点电压微增量的降价潮流雅可比矩阵会起到重要的作用。例如, 潮流雅可比矩阵的奇异被认为是电压失稳的临界点。另一方面, 基于降价潮流雅可比矩阵的VQ灵敏度也可用来作为电压小扰动稳定的一个判据, 即当电力系统中所有PQ节点的VQ灵敏度为正值时, 系统电压是稳定的; 反之, 若任一PQ节点的VQ灵敏度为负值时, 系统电压是不稳的。另外, 通过Schur公式可得到潮流雅可比矩阵奇异将导致降价潮流雅可比矩阵奇异, 从而这两者在判断系统的电压稳定性方面是等价的。由于降价雅可比矩阵物理意义明显, 它反映了交流电力系统中的无功与电压之间的关系, 因而线性系统中的奇异值和特征值分解技术都被应用到该矩阵中来分析电力系统的电压稳定性^[5-10]。

然而无论是从潮流雅可比矩阵来获得降价潮流雅可比矩阵或是应用Schur公式来联系这两者之间的关系, 都会利用到潮流雅可比矩阵中有功/相角子矩阵的求逆问题, 在现有文献中, 主要有2种方法或观点来处理该问题, 一是假设该子矩阵为可逆的, 这一点在实际中得到广泛采用, 且实际系统中也没有遇到该矩阵奇异的现象; 另一种观点认为该子矩阵奇异表明电力系统处于功角失去小扰动稳定的临界点, 这种观点主要来自于下述观察: 在单机无穷大系统中, 当发电机向无穷大系统输送最大有功功率且发电机采用经典模型时, 该系统恰好运

行于功角小扰动失稳的临界点, 此时系统的有功/相角子矩阵奇异。

本文主要探讨该子矩阵的性质, 论证在一般条件下, 该矩阵在数学上为对角占优且不可约化, 从而它是可逆的; 反之, 若该一般性条件遭到破坏, 则可能导致该矩阵变为奇异。

1 问题的提出

首先, 考虑一个具有 $n+1$ 个节点(不包含接地点)的电力系统, 其中编号 $1\sim m$ 为 PQ 节点, 编号 $m+1\sim n$ 为 PV 节点, 第 $n+1$ 节点为松弛节点, 则该系统的常规潮流方程为

$$P_{is} = P_i \equiv V_i \sum_{j=1}^{n+1} V_j (G_{ij} \cos q_{ij} + B_{ij} \sin q_{ij}) \quad (1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

$$Q_{is} = Q_i \equiv V_i \sum_{j=1}^{n+1} V_j (G_{ij} \sin q_{ij} - B_{ij} \cos q_{ij}) \quad (2)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m)$$

其中 $P_{is} = P_{Gi} - P_{LDi}$ 和 $Q_{is} = Q_{Gi} - Q_{LDi}$ 分别为指定的注入节点的有功和无功功率, P_i 和 Q_i 分别定义为节点有功和无功功率(bus active and reactive power)。若由某数值方法求得潮流式(1)(2)的解, 在该点附近可得上述潮流方程的线性化模型为

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中 $\Delta P = [\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_n]^T$ 和 $\Delta Q = [\Delta Q_1, \Delta Q_2, \dots, \Delta Q_m]^T$ 为节点的有功和无功功率的微增量, $J = \begin{bmatrix} P_\theta & P_V \\ Q_\theta & Q_V \end{bmatrix}$ 为潮流雅可比矩阵。若假定 $\Delta P = \mathbf{0}$ 且 P_θ^{-1} 存在的条件下, 则由式(3)可得下述方程

$$\Delta Q = J_R \Delta V \quad (4)$$

其中 $J_R = [Q_V - Q_\theta P_\theta^{-1} P_V]$ 为降价潮流雅可比矩阵, 式(4)直接反映节点的无功注入微增量与节点电压微增量之间的关系。显然, J_R 逆的对角线元素即为对应节点的 VQ 灵敏度。

正如在上节引论中所述, 在现有文献中, 基于式(4)的电压稳定性分析会提出如下一些主要问题: 一是有功/相角子矩阵 P_q 的逆是否存在。有文献曾提出在电力系统轻载时, 式(4)是存在的, 而在重载条件时, 该方程可能不成立。二是从式(3)推导式(4)时, 还假定节点注入有功不变, 即 $\Delta P = \mathbf{0}$, 对此研究人员提出可在不同运行条件下利用式(4)分析电

压稳定性。而实际上由 Schur 公式可得到如下关系

$$\det(J) = \det(P_\theta) \cdot \det(J_R) \quad (5)$$

而利用 Schur 公式的前提条件是 P_θ^{-1} 存在。由式(5)可知, 潮流雅可比矩阵 J 奇异对应于降价雅可比矩阵 J_R 的奇异。由此可知, 由潮流可比矩阵的奇异来判断电压失稳临界点和应用基于降价潮流雅可比矩阵的 VQ 灵敏度来判断电压稳定性是完全等价的。从上述分析中可以看到, P_q 的性质不仅涉及到降价潮流雅可比矩阵 J_R 的存在性, 而且它也是联系 J 和 J_R 的关键。

2 理论分析

2.1 对角占优与不可约化矩阵性质简介

本节重点分析矩阵 P_q 的性质。一般条件下, 该矩阵在数学为对角占优且不可约化的, 从而是可逆的。首先来回顾对角占优与不可约化矩阵的性质。

定义 1: 设矩阵 A 为一 k 阶方阵, a_{ij} 为其任一元素。如果下列不等式对于 i 从 1 到 k 都成立, 则称 A 为对角占优的。

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^k |a_{ij}| \quad (6)$$

若对 i 从 1 到 k 下述不等式都严格成立, 则称 A 为严格对角占优的。

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^k |a_{ij}| \quad (7)$$

若上述严格不等式对至少某一点 i 是成立的, 则称 A 为弱对角占优的。

定义 2: 如果存在某一交换阵 S , 下述关系成立, 则称方阵 A 是可约化的。

$$S^T A S = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中 A_{11} 和 A_{22} 都为方阵。式(8)的左端相当于对方阵 A 的节点进行重新编号。反之, 若不存在交换阵使上式(8)成立, 则称 A 为不可约化的。下述引理是下面分析的基础^[15]。

引理: 若某方阵 A 为对角严格占优的, 或者为弱对角占优且不可约化的, 则矩阵 A 为可逆的。

2.2 P_q 矩阵的整体性质及其非对角线元素的符号

现在分析矩阵 P_q 的性质。首先, 由潮流式(1)(2), 可得到矩阵 P_q 的对角线和非对角线元素分别为

$$H_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial q_j} = V_i V_j (G_{ij} \sin q_{ij} - B_{ij} \cos q_{ij}), (i \neq j) \quad (9)$$

$$H_{ii} = \frac{\partial P_i}{\partial q_i} = -B_{ii}V_i^2 - Q_i \quad (10)$$

将式(2)所定义的节点无功功率 Q_i 代入式(10)并整理可得

$$H_{ii} = -(H_{i1} + H_{i2} + \dots + H_{i(i-1)} + H_{i(i+1)} + \dots + H_{in}) - H_{i(n+1)} \quad (11)$$

根据上式,可以构造如下矩阵 P'_q 。由式(11)可知,该矩阵所有列之和为一零向量,故它是奇异的。

$$P'_q = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & L & H_{1i} & L & H_{1n} & H_{1(n+1)} \\ H_{21} & H_{22} & L & H_{2i} & L & H_{2n} & H_{2(n+1)} \\ M & M & & M & & M & M \\ H_{i1} & H_{i2} & L & H_{ii} & L & H_{in} & H_{i(n+1)} \\ M & M & & M & & M & M \\ H_{n1} & H_{n2} & L & H_{ni} & L & H_{nn} & H_{n(n+1)} \\ H_{(n+1)1} & H_{(n+1)2} & L & H_{(n+1)i} & L & H_{(n+1)n} & H_{(n+1)(n+1)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

而将矩阵 P'_q 的最后一行和最后一列删去便可得到矩阵 P_q , 由此可以期望矩阵 P_q 是可逆的。

下面探讨矩阵 P'_q 非对角线元素的符号。由于没有直接相联的 2 个节点对应的非对角线元素等于零,可只考虑具有直接相联的 2 个节点对应的非对角线元素的符号。又由式(9)可知,非对角线元素和连接它们之间的支路的串联参数有关。设某直接相联的 2 个节点的支路的阻抗为 $Z = R + jX$, 且该 2 个节点的相角差 q 满足下述条件,则容易推断该非对角线元素是负的。

$$-a < q < \pi - a \quad (13)$$

其中 $a = \arctan(X/R)$ 为支路的阻抗角。一般来讲,输电网络中的输电线路,变压器等元件的阻抗角都较大,特别在高压电网中,电抗值 X 都会远大于电阻值 R 。尤其若忽略支路电阻,则要求 2 个直接相联的 2 个节点的相角差小于 90° 。而在实际运行时,该条件是能满足的。

2.3 P_q 可逆的充分性条件及其奇异的必要条件

若假定电力系统中所有直接相联的 2 个节点间的相角差满足条件(13),则由式(11)(12)可知,矩阵 P_q 必为一弱对角占优的,因为编号为 $1 \sim n$ 的节点中至少有一个节点和松弛节点是直接相联的,则该节点所对应的该行将满足严格不等式条件(7)。从科学计算观点来看,由于 P_q 为对角占优阵,则其必为一良态矩阵。若节点 $1 \sim n$ 都和松弛节点相联,则 P_q 将为严格对角占优矩阵,此时该矩阵为可逆的。当

然,在实际电力系统中,不可能所有的节点都和松弛节点直接相联。然而,根据矩阵 P_q 具有位置对称的特点,下面将论证在 P_q 为弱对角占优的情况下,该矩阵仍是可逆的。

定理 1: 若一个互联的电力系统中所有直接相联的 2 个节点间对应的 P_q 的非对角线元素都为负值,则该矩阵为可逆的。

首先,对互联电力系统可进行如图 1 所示的划分。从图中可以看到,若去掉松弛节点和跟该松弛节点直接相联的支路,则剩下的系统将有 N 个不互联的子系统(子块) $1 \sim N$ 。其中,任一子块至少有一条支路和松弛节点是直接相连的,且任一个子系统 i 中的节点是互联的。

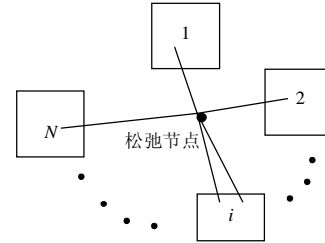


图 1 互联电力系统的一种划分

Fig. 1 A partition of a connected power system

应该指出上述划分对任意一个互联的电力系统都是成立的。虽然实际电力系统中的子系统总个数可能为 1。显然在上述划分下, P_q 可写为一个分块对角阵,即

$$P_q = \begin{bmatrix} P_q^1 & & & & \\ & O & & & \\ & & P_q^i & & \\ & & & O & \\ & & & & P_q^N \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中的任一分块对角矩阵 P_q^i 为一弱对角占优阵,因为该子块必有至少一条支路和松弛节点是直接相联的。下面将利用反证法来证明,所有的对角子矩阵都为不可约化的。

设某一子矩阵 P_q^i 为可约化的,则存在某交换阵 S 使得下式成立

$$S^T P_q^i S = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ \mathbf{0} & M_{22} \end{bmatrix}$$

其中 M_{11} 和 M_{22} 为方阵。而根据电力系统潮流雅可比矩阵具有位置对称的性质(非数值对称),则由上式等号右端中左下角矩阵为零的特点,可推断右上角矩阵 M_{22} 为零矩阵。由此可知,与 M_{11} 和 M_{22} 相关联的节点是不会互联的,即该子块中的节点至少

可分成孤立的两部分，而这和上述的划分是矛盾的。因而，任一对角阵 \mathbf{P}_θ^i 都是不可约化且至少是弱对角占优的，由 2.1 中的引理可知 \mathbf{P}_θ^i 是可逆的，又由(14)可推断 \mathbf{P}_q 也是可逆的。

根据上述结果和式(11)(12)，我们可再次利用反证法来证明下述定理。

定理 2: 若某互联的电力系统的 \mathbf{P}_q 为奇异，则 \mathbf{P}_θ^i 中必有一个对应于直接相联的节点的非对角线元素变为正值或零。

证明: 假设上述结论不成立，则所有对应于直接相联的节点的非对角线元素都为负值，而由定理 1 可知，该系统的 \mathbf{P}_q 矩阵必为可逆的，这和已知条件矛盾。

讨论: 从定理 1 和定理 2 可知，矩阵 \mathbf{P}_q 的性质主要和输电网的运行状态有关，在一般性条件下，该矩阵为可逆的。其奇异的必要性条件只是说明，该条件有可能导致该矩阵奇异。

3 数值算例

本节利用 IEEE 14 节点算例来验证上述理论的正确性。利用连续潮流法^[16]来追踪该系统随负载变化时的潮流解曲线(假定所有的负载和发电机按同一比例因子增加)，即所谓的 PV 曲线。设计 2 种不同的运行方式，第一种是基准条件下，系统的参数和初始运行条件如文献[11]所示。第二种运行方式是将所有的负载的功率因素由滞后改为超前，即负载由原来的吸收无功变为发送无功，特别节点 9 的无功初始值由 0.166 变为-0.8。在追踪 PV 曲线的过程中将计算矩阵 \mathbf{P}_q 的模最小特征值及其条件数，这些量都能很好反映矩阵是否变为奇异。另外也将追踪该矩阵中最早由负值变为正值的非对角线元素，结果如图 2 所示。

其中实线对应于 PV 曲线的上半部分，而虚线对应于 PV 曲线下半部分，即模最小特征值，条件数和非对角线元素的实线对应于 PV 曲线上半部分值，而其虚线对应于 PV 曲线下半部分值。图中左半图对应于第一种运行方式，即基准运行情况，而右半图表示第二种运行方式。图中所有的横坐标为反映负载增加的比例因子，纵坐标分别为节点 9 的电压值，矩阵 \mathbf{P}_q 模最小特征值，非对角线元素和条件数。

从图中可以看到，在 PV 曲线上半部分， \mathbf{P}_q 矩阵的模最小特征值和非对角线元素都保持正值，其条件数也非常平稳。而在 PV 曲线下半部分， \mathbf{P}_q 矩阵的模最小特征值可能发生变号，且在这些变号

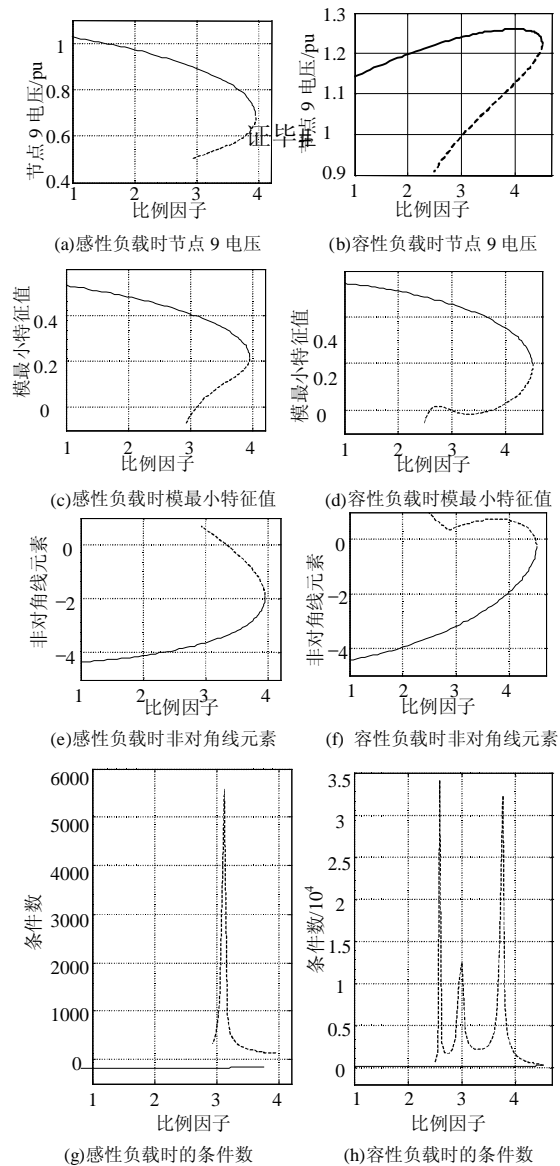


图 2 IEEE 14 节点数值结果
Fig. 2 Numerical results for the IEEE 14-bus system

处，对应的条件数变得非常大。具体来讲，在第一种运行情况下，在 PV 曲线下半部分有一次该矩阵的模最小特征值发生变号，而在第二种运行情况下，该特征值有 3 次发生变号。在 2 种运行情况下，所有这些变号处 \mathbf{P}_q 矩阵都将奇异，同时也可看到，在该矩阵奇异前，至少有一个非对角线元素由负值变为正值，由计算结果可知，上述 2 种运行方式下首先发生变号的非对角线元素分别对应于该系统的 \mathbf{P}_θ^i 中的 H_{65} 和 H_{51} 元素。

4 结论

本文主要研究了潮流雅可比矩阵中有功/相角

子矩阵的性质。通过推导得到的式(11)(12),首次揭示了该子矩阵的特点。证明了电力系统在一般性条件下,该矩阵为一弱对角占优且不可约化的,从而严格证明了在满足上述条件下该矩阵可逆。反之,任一直接相联的 2 个节点间相角差不满足上述条件,则可能导致该矩阵变为奇异。

上述理论结果有利于澄清对该矩阵性质的模糊理解,也为基于降阶潮流雅可比矩阵的电力系统分析奠定了坚实的数学基础。从数值结果还可看到,在 PV 曲线上半部分,该矩阵都为可逆的。

参考文献

- [1] Taylor C W. Power system voltage stability[M]. McGraw-Hill, 1994.
- [2] Kundur P. Power system stability and control[M]. McGraw-Hill, 1994.
- [3] 周双喜,朱凌志,郭锡玖,等. 电力系统电压稳定性及其控制[M]. 北京: 中国电力出版社, 2004.
- [4] IEEE/CIGRE joint task force on stability terms and definitions. Definition and classification of power system stability [J]. IEEE Trans on Power Systems, 2004, 19(2): 1387-1401.
- [5] Gao B, Morison G K, Kundur P. Voltage stability evaluation using modal analysis[J]. IEEE Trans on Power Systems, 1992, 7(4): 1529-1542.
- [6] Morison G K, Gao B, Kundur P. Voltage stability analysis using static and dynamic approaches[J]. IEEE Trans on Power Systems, 1993, 8(2): 1159-1171.
- [7] Gao B K, Morison G, Kundur P. Towards the development of a systematic approach for voltage stability assessment of large-scale power systems[J]. IEEE Trans on Power Systems, 1996, 11(3): 1314-1324.
- [8] Löf P, Smed A, Anderson T, et al. Fast calculation of a voltage stability index[J]. IEEE Trans on Power Systems, 1992, 7(1): 54-64.
- [9] Löf P, Smed A, Anderson T, et al. Voltage stability indices for stressed power systems[J]. IEEE Trans on Power Systems, 1993, 8(1): 326-335.
- [10] Cañizares C, Souza A, Quintana A. Comparison of performance indices for detection of proximity to voltage collapse [J]. IEEE Trans on Power Systems, 1996, 11(3): 1441-1450.
- [11] Milano F. Power system analysis toolbox [Online]. Available: <http://www.power.uwaterloo.ca/~fmilano/>(2003).
- [12] 张靖,文劲宇,程时杰,等. 电力系统电压稳定性的平衡点分析方法[J]. 电网技术, 2006, 30(10): 13-17.
Zhang Jing, Wen Jinyu, Cheng Shijie, et al. Analysis of power system voltage stability with equilibrium points[J]. Power System Technology, 2006, 30(10): 13-17(in Chinese).
- [13] 孙华东,周孝信,李若梅. 计及感应电动机负荷的静态电压稳定性分析[J]. 中国电机工程学报, 2003, 23(12): 19-22.
Sun Huadong, Zhou Xiaoxin, Li Ruomei. Static voltage stability analysis considering induction motor loads[J]. Proceedings of the CSEE, 2003, 23(12): 19-22(in Chinese).
- [14] 孙华东,周孝信,李若梅. 感应电动机负荷参数对电力系统暂态电压稳定性的影响[J]. 电网技术, 2005, 29(23): 1-6.
Sun Huadong, Zhou Xiaoxin, Li Ruomei. Influence of induction motor load parameters on power system transient voltage stability [J]. Power System Technology, 2005, 29(23): 1-6(in Chinese).
- [15] 陈大新. 矩阵理论[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1991.
- [16] 曹国云,刘丽霞,赵亮,等. 基于延拓法的电力系统稳定模型中二维参数局部分岔边界的计算[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(8): 13-16.
Cao Guoyun, Liu Lixia, Zhao Liang, et al. Continuation method to compute two-parameter local bifurcations boundary in power systems stability differential-algebraic equation model[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(8): 13-16(in Chinese).

收稿日期: 2007-01-23。

作者简介:

曹国云(1972—),男,副教授,研究方向为电力系统稳定性分析与控制, E-mail: eecao@situ.edu.cn。

(实习编辑 王晔)

2007 年 IEC/CIGRE 特高压国际标准研讨会开幕

2007 年 IEC/CIGRE 特高压国际标准研讨会于 7 月 18 日在京开幕,开幕式由中国科学院院士周孝信主持。IEC 当选主席 Jacques Regis 先生, CIGRE 主席 Yves Filion 先生,国家标准化委员会副主任石保权、中国电机工程学会理事长陆延昌、国家电网公司副总经理舒印彪、中国电力企业联合会副理事长孙玉才等出席了开幕式。舒印彪副总经理在开幕式作了题为《中国特高压输电技术的发展状况》的特邀报告,引起参会各国专家学者的广泛关注。近年来,国家电网公司广泛开展特高压输电技术研究和特高压工程建设,在国际上产生了深远的影响,与此同时,使用方、生产厂家迫切期望开展特高压输电技术国际化工作,该会议的召开是对国家电网公司倡导的发展特高压输电技术、建设特高压电网战略的重要支持。

7 月 19 日下午, Jacques Regis 先生和 Yves Filion 先生、秘书长 Jean Kowal,国家标准化委员会副主任石保权、中国电机工程学会理事长陆延昌以及会议代表一行 200 余人参观了国家电网公司特高压直流试验基地。

2007 年全球财富 500 强排名公布 国家电网公司排名第 29 位

2007 年全球财富 500 强排名公布,美国沃尔玛零售公司名列第 1,中国大陆共有 24 家企业进入 500 强,国家电网公司列第 3 位。国家电网公司在总排名中列第 29 位,在公用事业单位中列第 1 位,在亚洲企业中排名第 4 位。