系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
27(6) (2007, 12), 811–819

三阶微分方程组边值问题常号解的存在性*

孙 忠 民

(山东省潍坊教育学院, 青州 262500)

赵 增 勤

(曲阜师范大学数学科学学院, 曲阜 273165)

摘要 利用 Krasnoselskii 不动点定理, 结合 Leray-Schauder 度, 研究下列三阶微分方程组边值问题

$$\begin{cases} u_i'''(t) = f_i(t, u_1(t), u_2(t), u_3(t)), & t \in [0,1], \\ u_i'(0) = u_i''(0) = u_i(1) = 0, & i = 1,2,3. \end{cases}$$

在某些条件下, 常号解的存在性和多解性.

关键词 三阶微分方程组, 边值问题, 常号解.

MR(2000) 主题分类号 34B15

1 引 言

本文研究如下三阶微分方程组边值问题

$$\begin{cases} u_i'''(t) = f_i(t, u_1(t), u_2(t), u_3(t)), & t \in [0,1], \\ u_i'(0) = u_i''(0) = u_i(1) = 0, & i = 1,2,3. \end{cases} \tag{1}$$

常号解的存在性和多解性. $u = (u_1, u_2, u_3)$ 是问题 (1) 的常号解, 即 $u \in (C[0,1])^3 = C[0,1] \times C[0,1] \times C[0,1]$, 对任意的 $i \in \{1,2,3\}$, $t \in [0,1]$ 存在固定的 $\theta_i \in \{-1,1\}$, 使得 $\theta_i u_i \geq 0$ 成立. 可以看出常号解包含正解.

关于三阶微分方程边值问题的研究, 已有丰富的结果, 如文 [1–6]. 文 [1] 利用锥上的不动点定理研究了三阶微分方程

$$\begin{cases} u''' + a(t)f(u) = 0, & t \in [0,1], \\ y'(0) = y''(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

边值问题正解的存在性. 文 [2] 把 $a(t)f(u)$ 推广到 $f(t,u)$ 利用 Leggett-Williams 不动点定理研究了三阶微分方程边值问题多个正解的存在性, 文 [3] 利用 Krasnoselskii 不动点定理研究了三阶微分方程

$$\begin{cases} u''' + \lambda f(t,u) = 0, & t \in [0,1], \\ y'(0) = y''(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

* 国家自然科学基金 (10471075) 和山东省自然科学基金 (Y2003A01) 资助.
收稿日期: 2005-12-21, 收到修改稿日期: 2006-04-10.

边值问题正解的存在性得出了一些好的结果.

相比之下, 对于三阶微分方程组边值问题, 研究的人较少, 相应文献也要少的多. 相对于单个方程, 方程组边值问题的研究要更加困难, 内容也要更加丰富. 本文利用 Krasnoselskii 不动点定理和 Leray-Schauder 度, 在比较广泛的条件下证明了三阶方程组边值问题 (1) 常号解的存在性, 并给出多个常号解的存在性. 本文利用的方法和条件以及所获的结论与文 [3] 都不同, 这些结论还未见诸文献.

本文由下面几部分组成. 在第 2 部分我们给出预备知识和引理. 第 3 部分我们讨论解的存在性. 最后给出例子作为我们所得结果的应用.

2 预备知识和引理

引理 2.1[7] 设 B 是 Banach 空间. E 是 B 中凸闭集, U 是 E 中相对开集, $0\in U$. 如果存在连续紧映射 $S:\overline{U}\to E$. 那么

a) S 在 $\overline{U}$ 中有不动点; 或

b) 存在 $u\in\partial U,\ \lambda\in(0,1)$ 使得 $u=\lambda Su$.

引理 2.2[8] 设 $B=(B,\|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间. 设 C 是 B 中锥. 设 Ω_1 和 Ω_2 为 B 中满足 $0\in\Omega_1,\ \overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$ 有界开子集, 设 $S:C\cap(\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1)\to C$ 是一个全连续算子, 并且

a) $\|Su\|\le\|u\|,\ u\in C\cap\partial\Omega_1$; $\|Su\|\ge\|u\|,\ u\in C\cap\partial\Omega_2$ 或

b) $\|Su\|\ge\|u\|,\ u\in C\cap\partial\Omega_1$; $\|Su\|\le\|u\|,\ u\in C\cap\partial\Omega_2$.

那么 S 在 $C\cap(\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$ 中有不动点.

令 $G(t,s)$ 是边值问题

$$\begin{cases} y'''(t)=0, & t\in[0,1],\\ y'(0)=y''(0)=y(1)=0. \end{cases}$$

的格林函数. 我们由文 [1] 可以知道

$$G(t,s)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}(1-s)^2-\dfrac{1}{2}(t-s)^2, & 0\le s\le t\le 1,\\ \dfrac{1}{2}(1-s)^2, & 0\le t\le s\le 1. \end{cases} \tag{2}$$

直接计算有如下结论

$$G(t,s)\ge 0,\quad t,s\in[0,1];\quad G(t,s)>0,\quad t,s\in[0,1), \tag{3}$$

$$G(j(s),s)=\max_{0\le t\le 1}G(t,s)=\frac{1}{2}(1-s)^2\le\frac{1}{2},\quad t,s\in[0,1], \tag{4}$$

$$G(t,s)\ge\frac{1}{4}G(j(s),s),\quad t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right],\ s\in[0,1]. \tag{5}$$

令 $B=(C[0,1])^3$, $u=(u_1,u_2,u_3)\in B$ 赋予范数

$$\|u\|=\max_{1\le i\le 3}\sup_{t\in[0,1]}|u_i(t)|=\max_{1\le i\le 3}|u_i|_0,\quad \text{其中}\quad |u_i|_0=\sup_{t\in[0,1]}|u_i(t)|,\quad 1\le i\le 3.$$

则 $(B,\ \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

令算子 $S:(C[0,1])^3\to(C[0,1])^3$

$$Su(t)=(Su_1(t),Su_2(t),Su_3(t)),\quad t\in[0,1], \tag{6}$$

其中

$$Su_i(t)=\int_0^1 G(t,s)f_i(s,u(s))\mathrm{d}s,\quad t\in[0,1],\ 1\le i\le 3. \tag{7}$$

显然 S 的不动点是方程组 (1) 的解.

为了方便列出下面将要用到的一些条件. 其中 $\theta_i\in\{1,-1\}$,

$$\widetilde{K}=\{u\in B|\ \theta_i u_i(t)\ge 0,\quad t\in[0,1],\ 1\le i\le 3\},$$

$$K=\{u\in\widetilde{K}|\ 存在\, t\in[0,1], 存在\, j\in\{1,2,3\}, 使得\, \theta_j u_j(t)>0\}=\widetilde{K}\setminus\{0\}.$$

(C_1)　f_i 在 $[0,1]\times\widetilde{K}$ 上连续， $1\le i\le 3$ 并且

$$\theta_i f_i(t,u)\ge 0,\quad (t,u)\in[0,1]\times\widetilde{K};\quad \theta_i f_i(t,u)>0,\quad (t,u)\in[0,1]\times K.$$

(C_2)　任给 $i\in\{1,2,3\}$ 存在连续函数 $q_i:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 和连续增函数 $w_{ij}:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 使得

$$\theta_i f_i(t,u)\le q_i(t)w_{i1}(|u_1|)w_{i2}(|u_2|)w_{i3}(|u_3|),\quad (t,u)\in[0,1]\times\widetilde{K}.$$

(C_3)　存在 $\alpha>0$, 使得对任意 $i\in\{1,2,3\}$ 有

$$\alpha>d_i w_{i1}(\alpha)w_{i2}(\alpha)w_{i3}(\alpha),$$

其中

$$d_i=\sup_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)q_i(s)\mathrm{d}s,\quad 1\le i\le 3.$$

(C_4)　任给 $j\in\{1,2,3\}$ 存在某一个 $i\in\{1,2,3\}$ (i 依赖 j), 有

$$\theta_i f_i(t,u)\ge\tau_{ij}(t)w_{ij}(|u_j|),\quad (t,u)\in\left[\frac14,\ \frac34\right]\times K,$$

其中 $\tau_{ij}:\left[\frac14,\ \frac34\right]\to(0,\infty)$ 是连续的.

(C_5)　存在 $\beta>0$, 使得对任意的 $j\in\{1,2,3\}$ 存在某一个 $i\in\{1,2,3\}$ (i 依赖 j 同 (C_4)) 满足

$$\beta\le w_{ij}\left(\frac14\beta\right)\int_{\frac14}^{\frac34}G(\sigma_{ij},s)\tau_{ij}(s)\mathrm{d}s,$$

其中

$$\int_{\frac14}^{\frac34}G(\sigma_{ij},s)\tau_{ij}(s)\mathrm{d}s=\sup_{t\in[0,1]}\int_{\frac14}^{\frac34}G(t,s)\tau_{ij}(s)\mathrm{d}s,\quad \sigma_{ij}\in[0,1].$$

3　主要结果

定理 3.1　设 $f_i:[0,1]\times R^3\to R$, $1\le i\le 3$ 是连续的, 如果存在不依赖 λ 的常数 $\rho>0$, 使得方程组

$$u_i(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)f_i(s,u(s))\mathrm{d}s,\quad t\in[0,1],\ 1\le i\le 3,\ \lambda\in(0,1) \tag{8}$$

的任一解 $u\in(C[0,1])^3$, 有 $\|u\|\neq\rho$. 那么方程组 (1) 至少有一解 $u^*\in(C[0,1])^3$, 并且 $\|u^*\|\leq\rho$.

证 设 u 是方程组 (8) 的一个解，由 (6) 和 (7) 式可知 u 是 $u=\lambda Su$ 的一个不动点，并且由 Arzela-Ascoli 定理可知 S 是全连续的. 令 $U=\{u\in B|\,\|u\|<\rho\}$, 由于 $\|u\|\neq\rho$, 可知引理 2.1 结论 a) 一定成立. 即 S 在 $\overline{U}$ 中有一不动点 u^* 使得 $u^*=Su^*$. 因此 u^* 是方程组 (1) 的解并且 $\|u^*\|\leq\rho$.

定理 3.2 如果 $(\mathrm{C}_1)-(\mathrm{C}_3)$ 成立，那么方程组 (1) 有一常号解 $u^*\in(C[0,1])^3$, 使得 $\|u^*\|<\alpha$ 及 $0\leq\theta_iu_i^*(t)<\alpha,\ t\in[0,1],\ 1\leq i\leq 3$.

证 考虑下列方程组

$$u_i(t)=\int_0^1G(t,s)\widehat{f}_i(s,u(s))\mathrm{d}s,\quad t\in[0,1],\ 1\leq i\leq 3,\tag{9}$$

其中 $\widehat{f}_i:[0,1]\times R^3\to R$

$$\widehat{f}_i(t,u_1,u_2,u_3)=f_i(t,\theta_1|u_1|,\theta_2|u_2|,\theta_3|u_3|),\quad 1\leq i\leq 3.\tag{10}$$

注意到 $(\theta_1|u_1|,\theta_2|u_2|,\theta_3|u_3|)\in\widetilde{K}$, 由 (C_1) 可知 $\widehat{f}_i$ 有定义并且是连续的.

先证明方程组 (9) 有解. 为此我们考虑方程组

$$u_i(t)=\lambda\int_0^1G(t,s)\widehat{f}_i(s,u(s))\mathrm{d}s,\quad t\in[0,1],\ 1\leq i\leq 3,\ 0<\lambda<1.\tag{11}$$

令 $u\in(C[0,1])^3$ 是方程组 (11) 的任一解，我们先证明 $\|u\|\neq\alpha$. 由 (10), (3) 和 (C_1) 可以得到

$$\begin{aligned}\theta_iu_i(t)&=\lambda\int_0^1G(t,s)\theta_i\widehat{f}_i(s,u(s))\mathrm{d}s,\\&=\lambda\int_0^1G(t,s)\theta_if_i(s,\theta_1|u_1(s)|,\theta_2|u_2(s)|,\theta_3|u_3(s)|)\mathrm{d}s\geq 0,\end{aligned}$$

其中 $t\in[0,1],\ 1\leq i\leq 3$.

因此

$$|u_i(t)|=\theta_iu_i(t),\quad t\in[0,1],\ 1\leq i\leq 3.\tag{12}$$

由 (12), (C_2) 及 (C_3), 我们可知当 $t\in[0,1]$, $1\leq i\leq 3$, 时有

$$\begin{aligned}|u_i(t)|&=\theta_iu_i(t)\\&\leq\int_0^1G(t,s)\theta_if_i(s,\theta_1|u_1(s)|,\theta_2|u_2(s)|,\theta_3|u_3(s)|)\mathrm{d}s\\&\leq\int_0^1G(t,s)q_i(s)w_{i1}(|u_1(s)|)w_{i2}(|u_2(s)|)w_{i3}(|u_3(s)|)\mathrm{d}s\\&\leq\int_0^1G(t,s)q_i(s)w_{i1}(\|u\|)w_{i2}(\|u\|)w_{i3}(\|u\|)\mathrm{d}s\\&\leq d_iw_{i1}(\|u\|)w_{i2}(\|u\|)w_{i3}(\|u\|).\end{aligned}$$

因此可以得出

$$|u_i|_0\leq d_iw_{i1}(\|u\|)w_{i2}(\|u\|)w_{i3}(\|u\|),\quad 1\leq i\leq 3.\tag{13}$$

因为 $\|u\| = \max\limits_{1\le i\le 3}|u_i|_0$, 所以存在某个 $m\in\{1,2,3\}$ 有 $\|u\|=|u_m|_0$. 在 (13) 中令 $i=m$ 也成立，即

$$\|u\| \le d_m w_{m1}(\|u\|)w_{m2}(\|u\|)w_{m3}(\|u\|). \tag{14}$$

对比 (14) 和 (C_3) 可以得出 $\|u\|\ne\alpha$. 由定理 3.1 可知方程组 (9) 有一个解 $u^*=(u_1^*,u_2^*,u_3^*)\in (C[0,1])^3$ 并且 $\|u^*\|\le\alpha$.

用上面相似的方法容易得出

$$|u_i^*(t)| = \theta_i u^*(t),\quad t\in[0,1],\ 1\le i\le 3,\quad \text{并且}\quad \|u^*\|\ne\alpha. \tag{15}$$

因此 u^* 是常号解，并且满足 $\|u^*\|<\alpha$.

下面证明 u^* 是方程组 (1) 的解. 由 (10) 和 (15) 可知当 $t\in[0,1], 1\le i\le 3$ 时

$$\begin{aligned} u_i^*(t) &= \int_0^1 G(t,s)\widehat{f}_i(s,u^*(s))\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 G(t,s)f_i(s,\theta_1|u_1^*(s)|,\theta_2|u_2^*(s)|,\theta_3|u_3^*(s)|)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 G(t,s)f_i(s,\theta_1^2u_1^*(s),\theta_2^2u_2^*(s),\theta_3^2u_3^*(s))\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 G(t,s)f_i(s,u^*(s))\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

所以 u^* 是方程组 (1) 的解.

注 3.1 定理 3.2 得到的常号解有可能是平凡的，下面给出非平凡常号解的存在性.

定理 3.3 如果 (C_1) − (C_5) 成立，那么 (1) 有一个常号解 $u^*\in(C[0,1])^3$ 满足

a) 若 $\alpha<\beta$, 则 $\alpha<\|u^*\|\le\beta$ 并且存在 $j\in\{1,2,3\}$ 使得 $\min\limits_{t\in[\frac14,\frac34]}\theta_j u_j^*(t)>\frac14\alpha$;

b) 若 $\alpha>\beta$, 则 $\beta\le\|u^*\|<\alpha$ 并且存在 $j\in\{1,2,3\}$ 使得 $\min\limits_{t\in[\frac14,\frac34]}\theta_j u_j^*(t)\ge\frac14\beta$.

证 令

$$C=\left\{u\in B|\ \theta_iu_i(t)\ge 0,\quad t\in[0,1],\quad \min_{t\in[\frac14,\frac34]}\theta_iu_i(t)\ge\frac14|u_i|_0,\quad \text{其中}\quad 1\le i\le 3\right\}$$

则 C 是 B 中锥，并且 $C\subseteq\widetilde{K}$. 下面证明 $S(C)\subseteq C$.

令 $u\in C$, 由 (3) 和 (C_1) 可知

$$\theta_i(Su_i)(t) = \int_0^1 G(t,s)\theta_i f_i(s,u(s))\mathrm{d}s\ge 0,\quad t\in[0,1],\ 1\le i\le 3. \tag{16}$$

由 (16) 和 (4), 可知对任意 $t\in[0,1],\quad 1\le i\le 3$ 有

$$|Su_i(t)| = \theta_i(Su_i)(t)\le\int_0^1 G(j(s),s)\theta_i f_i(s,u(s))\mathrm{d}s.$$

因此

$$|Su_i|_0\le\int_0^1 G(j(s),s)\theta_i f_i(s,u(s))\mathrm{d}s,\quad 1\le i\le 3. \tag{17}$$

应用 (16), (C_1), (5) 和 (17), 可知当 $t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$, $1\le i\le 3$ 时，我们可以得到

$$\theta_i(Su_i)(t)\ge\int_0^1\frac{1}{4}G(j(s),s)\theta_i f_i(s,u(s))\mathrm{d}s\ge\frac{1}{4}|Su_i|_0.$$

因此

$$\min_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}\theta_i(Su_i)(t)\ge\frac{1}{4}|Su_i|_0,\quad 1\le i\le 3. \tag{18}$$

由 (16) 和 (18) 可知 $S(C)\subseteq C$.

令 $\Omega_\alpha=\{u\in B|\ \|u\|<\alpha\}$, $\quad\Omega_\beta=\{u\in B|\ \|u\|<\beta\}$, 可以证明 i), ii) 成立.

i) 当 $u\in C\cap\partial\Omega_\alpha$ 时， $\|Su\|\le\|u\|$;

ii) 当 $u\in C\cap\partial\Omega_\beta$ 时， $\|Su\|\ge\|u\|$.

先证明 i). 假设 $u\in C\cap\partial\Omega_\alpha$, 则 $\|u\|=\alpha$. 由 (16), (C_2) 和 (C_3) 可知当 $t\in[0,1]$, $1\le i\le 3$ 时有

$$\begin{aligned}|Su_i(t)|&=\theta_i(Su_i)(t)\\&\le\int_0^1 G(t,s)q_i(s)w_{i1}(|u_1(s)|)w_{i2}(|u_2(s)|)w_{i3}(|u_3(s)|)\mathrm{d}s\\&\le\int_0^1 G(t,s)q_i(s)w_{i1}(\alpha)w_{i2}(\alpha)w_{i3}(\alpha)\mathrm{d}s\\&\le d_iw_{i1}(\alpha)w_{i2}(\alpha)w_{i3}(\alpha)<\alpha=\|u\|.\end{aligned}$$

即当 $1\le i\le 3$ 时，有 $|Su_i|_0\le\|u\|$. 因此 $\|Su\|=\max\limits_{1\le i\le 3}|Su_i|_0\le\|u\|$.

再证明 ii). 假设 $u\in C\cap\partial\Omega_\beta$, 则 $\|u\|=\beta$. 令 $\|u\|=|u_m|_0$, $m\in\{1,2,3\}$, 由 C 的定义可知

$$\frac{1}{4}\beta=\frac{1}{4}|u_m|_0\le|u_m(s)|\le|u_m|_0=\beta,\quad s\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]. \tag{19}$$

由 (C_4), (19) 和 (C_5) 可知，存在某个 $i\in\{1,2,3\}$(i 依赖 m) 使得

$$\begin{aligned}|Su_i(\sigma_{im})|&=\theta_i(Su_i)(\sigma_{im})=\int_0^1 G(\sigma_{im},s)\theta_i f_i(s,u(s))\mathrm{d}s\\&\ge\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(\sigma_{im},s)\theta_i f_i(s,u(s))\mathrm{d}s\ge\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(\sigma_{im},s)\tau_{im}(s)w_{im}(|u_m(s)|)\mathrm{d}s\\&\ge\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(\sigma_{im},s)\tau_{im}(s)w_{im}\Big(\frac{1}{4}\beta\Big)\mathrm{d}s\ge\beta=\|u\|.\end{aligned}$$

可知 $|Su_i|_0\ge\|u\|$, 因此 $\|Su\|\ge\|u\|$.

因为 $S:(C[0,1])^3\to(C[0,1])^3$ 是全连续算子，那么由 i) 和 ii) 根据引理 2.2 可知， S 有不动点 $u^*\in C\cap(\overline{\Omega}_{\max\{\alpha,\beta\}}\setminus\Omega_{\min\{\alpha,\beta\}})$, 并且 $\min\{\alpha,\beta\}\le\|u^*\|\le\max\{\alpha,\beta\}$.

由定理 3.2 的证明可知 $\|u^*\|\ne\alpha$. 因此可以得出

$$\text{当}\alpha<\beta\text{时}\quad\alpha<\|u^*\|\le\beta;\quad\text{当}\alpha>\beta\text{时}\quad\beta\le\|u^*\|<\alpha. \tag{20}$$

存在 $j\in\{1,2,3\}$ 使得 $\|u^*\|=|u_j^*|_0$. 由于 $u^*\in C$, 可以得出

$$\min_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}\theta_j u_j^*(t)\geq\frac{1}{4}|u_j^*|=\frac{1}{4}\|u^*\|.$$

于是由 (20) 可知

$$当\alpha>\beta时\quad\min_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}\theta_j u_j^*(t)\geq\frac{1}{4}\beta;\quad 当\alpha<\beta时\quad\min_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}\theta_j u_j^*(t)>\frac{1}{4}\alpha.$$

下面给出两个常号解的存在性.

定理 3.4 如果 $(C_1)-(C_5)$ 成立，并且 $\alpha<\beta$, 那么 (1) 至少有两个常号解 $u^1,u^2\in(C[0,1])^3$ 满足

$$0\leq\|u^1\|<\alpha<\|u^2\|\leq\beta\quad 并且$$

$$存在\ j\in\{1,2,3\},\quad 使得\quad\min_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}\theta_j u_j^2(t)>\frac{1}{4}\alpha.$$

证　由定理 3.2 和定理 3.3 a) 可知, 分别存在 u^1, u^2 使得定理 3.4 成立. 在定理 3.4 中, 有可能 $\|u^1\|=0$. 下面证明存在两个非平凡的常号解.

定理 3.5 如果 $(C_1)-(C_5)$ 和 $(C_5)|_{\beta=\widetilde{\beta}}$ 成立，并且 $0<\widetilde{\beta}<\alpha<\beta$. 那么 (1) 至少有两个常号解 $u^1,u^2\in(C[0,1])^3$ 满足

$$0<\widetilde{\beta}\leq\|u^1\|<\alpha<\|u^2\|\leq\beta,\quad 并且$$

$$存在\quad j,k\in\{1,2,3\}\ 使得\ \min_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}\theta_k u_k^1(t)\geq\frac{1}{4}\widetilde{\beta},\quad\min_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}\theta_j u_j^2(t)>\frac{1}{4}\alpha.$$

证　由定理 3.3 b) 和 a) 分别存在 u^1, u^2 使得定理 3.4 成立.

定理 3.6 假设 $(C_1),(C_2)$ 和 (C_4) 成立，并且当 $\alpha=\alpha_l$, $l=1,2,3,\cdots,k$ 时 (C_3) 成立，当 $\beta=\beta_l$, $l=1,2,3,\cdots,m$ 时 (C_5) 成立.

a) 如果 $m=k+1$ 并且 $0<\beta_1<\alpha_1<\cdots<\beta_k<\alpha_k<\beta_{k+1}$, 那么 (1) 至少有 $2k$ 个常号解 $u^1,u^2,\cdots,u^{2k}\in(C[0,1])^3$ 使得

$$0<\beta_1\leq\|u^1\|<\alpha_1<\|u^2\|\leq\beta_2\leq\cdots<\alpha_k<\|u^{2k}\|\leq\beta_{k+1}.$$

b) 如果 $m=k$ 并且 $0<\beta_1<\alpha_1<\cdots<\beta_k<\alpha_k$, 那么 (1) 至少有 $2k-1$ 个常号解 $u^1,u^2,\cdots,u^{2k-1}\in(C[0,1])^3$ 使得

$$0<\beta_1\leq\|u^1\|<\alpha_1<\|u^2\|\leq\beta_2\leq\cdots\leq\beta_k\leq\|u^{2k-1}\|<\alpha_k.$$

c) 如果 $k=m+1$ 并且 $0<\alpha_1<\beta_1<\cdots<\alpha_m<\beta_m<\alpha_{m+1}$, 那么 (1) 至少有 $2m+1$ 个常号解 $u^0,u^1,\cdots,u^{2m}\in(C[0,1])^3$ 使得

$$0\leq\|u^0\|<\alpha_1<\|u^1\|\leq\beta_1\leq\|u^2\|<\alpha_2<\cdots\leq\beta_m<\|u^{2m}\|<\alpha_{m+1}.$$

d) 如果 $k=m$ 并且 $0<\alpha_1<\beta_1<\cdots<\alpha_k<\beta_k$, 那么 (1) 至少有 $2k$ 个常号解 $u^0,u^1,\cdots,u^{2k-1}\in(C[0,1])^3$ 使得

$$0\leq\|u^0\|<\alpha_1<\|u^1\|\leq\beta_1\leq\|u^2\|<\alpha_2<\cdots<\alpha_k<\|u^{2k-1}\|\leq\beta_k.$$

证　由定理 3.3 可得 a) 和 b); 由定理 3.2 可知存在 $u^0 \in (C[0,1])^3$ 并且 $0 \le \|u^0\| < \alpha_1$, 然后应用定理 3.3 a) 即可得到 c), d).

注 3.2　对于方程组 (1), 当赋予如下边值条件

1)　$u(0)=u'(0)=u(1)=0$;

2)　$u(0)=u'(0)=u'(1)=0$;

3)　$u(0)=u'(0)=u''(1)=0$;

4)　$u(0)=u''(0)=u(1)=0$;

5)　$u(0)=u''(0)=u'(1)=0$.

时, 我们借助文 [3] 中的引理 (2.1) 和引理 (2.2), 采用本文中定理的证明方法, 适当改变 (C_4), (C_5) 可以给出相应边值问题常号解的存在性和多解性.

4　例　子

考虑方程组

$$\begin{cases} u_1'''(t)=\exp(|u_1|+|u_2|^{\frac{1}{7}}+|u_3|^{\frac{1}{8}}), & t\in[0,1],\\ u_2'''(t)=\exp(|u_1|^{\frac{1}{5}}+|u_2|+|u_3|^{\frac{1}{6}}), & t\in[0,1],\\ u_3'''(t)=\exp(|u_1|^{\frac{1}{3}}+|u_2|^{\frac{1}{4}}+|u_3|), & t\in[0,1],\\ u_i'(0)=u_i''(0)=u_i(1)=0, & i=1,2,3. \end{cases} \tag{21}$$

在这里 $f_1(t,u)=\exp(|u_1|+|u_2|^{\frac{1}{7}}+|u_3|^{\frac{1}{8}})$, $f_2(t,u)=\exp(|u_1|^{\frac{1}{5}}+|u_2|+|u_3|^{\frac{1}{6}})$, $f_3(t,u)=\exp(|u_1|^{\frac{1}{3}}+|u_2|^{\frac{1}{4}}+|u_3|)$; $\theta_1=\theta_2=\theta_2=1$. 显然 ($C_1$) 成立. 在 ($C_2$) 中, 令 $q_1=q_2=q_3=1$ 并且

$$\begin{aligned} &w_{11}(u_1)=\exp(|u_1|), && w_{12}(u_2)=\exp(|u_2|^{\frac{1}{7}}), && w_{13}(u_3)=\exp(|u_3|^{\frac{1}{8}}),\\ &w_{21}(u_1)=\exp(|u_1|^{\frac{1}{5}}), && w_{22}(u_2)=\exp(|u_2|), && w_{23}(u_3)=\exp(|u_3|^{\frac{1}{6}}),\\ &w_{31}(u_1)=\exp(|u_1|^{\frac{1}{3}}), && w_{32}(u_2)=\exp(|u_2|^{\frac{1}{4}}), && w_{33}(u_3)=\exp(|u_3|), \end{aligned}$$

则 (C_2) 成立. 在 (C_3) 中, 由 (2) 中 $G(t,s)$ 可以计算得出 $d_1=d_2=d_3=\frac{1}{6}$. (C_3) 中 α 满足的不等式变为

$$\begin{cases} \alpha>\dfrac{1}{6}\exp(\alpha+\alpha^{\frac{1}{7}}+\alpha^{\frac{1}{8}}),\\ \alpha>\dfrac{1}{6}\exp(\alpha^{\frac{1}{5}}+\alpha+\alpha^{\frac{1}{6}}),\\ \alpha>\dfrac{1}{6}\exp(\alpha^{\frac{1}{3}}+\alpha^{\frac{1}{4}}+\alpha). \end{cases}$$

直接计算可以得到当 $\alpha\in[0.402175,\quad 5.25982]$ 时, 上面不等式组成立, 因此 (C_3) 成立. 在 (C_4) 中, 取 $\tau_{ij}=1,\ i,j\in\{1,2,3\}$ 即可. 最后由于 $\lim\limits_{z\to\infty}\left(\frac{z}{w_{ij}(z)}\right)=0,\ i,j,\in\{1,2,3\}$ 容易选取 $\alpha>\beta$, 使得 (C_5) 成立.

由定理 3.4, 方程组 (21) 有两个非平凡的常号解 $u^1,u^2\in(C[0,1])^3$ 使得 (由 (21) 可知 $\|u^1\|\ne 0$)

$$\begin{cases} 0<\|u^1\|<\alpha<\|u^2\|\le\beta,\\ \text{存在 } j\in\{1,2,3\} \text{ 使得 } \min\limits_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}\theta_j u_j^2(t)>\dfrac{1}{4}\alpha. \end{cases}$$

由于 $\alpha \in [0.402175,\ 5.25982]$, 我们可以进一步得出

$$\begin{cases} 0 < \|u^1\| < 0.402175; \quad \|u^2\| > 5.25982, \\ \text{存在 } j \in \{1,2,3\} \text{ 使得 } \min\limits_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]} \theta_j u_j^2(t) > \dfrac{1}{4}\alpha. \end{cases}$$

参 考 文 献

[1] 蒋达清．三阶非线形微分方程正解的存在性．东北师范大学学报， 1996, **4**: 6–10.

[2] 徐斌．非线形三阶边值问题的多解性．北京师范大学学报， 2004, **40**: 448–451.

[3] 姚庆六．三阶常微分方程的某些非线性特征值问题的正解．数学物理学报， 2003, **23A**: 513–519.

[4] Yao Q. The existence and multiplicity of positive solutions for a third-order three-point boundary value problem. *Acta Math. Appl.*, 2003, **19**: 117–122.

[5] Anderson D and Avery R I. Multiple positive solutions to a third-order discrete focal boundary value problem. *Comput. Math. Appl.*, 2001, **42**: 333–340.

[6] Yao Q and Feng Y. The existence of solution for a third-order two-point boundary value problem. *Applied Math. Letter*, 2002, **15**: 227–232.

[7] Agarwal R P, O'Regan D and Wong P J Y. Positive Solutions of Differential. Difference and Integral Equations, Kluwer, Dordrecht, 1999.

[8] Krasnoselskii M A. Positive Solutions of Operator Equations. Noordhoff, Groningen, 1964.

[9] Guo D and Lakshmikantham V. Nonlinear Problems in Abstract Cones. Academic Press, New York, 1988.

[10] Guo D, Lakshmikantham V and Liu X. Nonlinear Integral Equations in Abstract Spaces. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.

THE EXISTENCE OF CONSTANT-SIGN SOLUTIONS OF BVPS FOR THIRD ORDER DIFFERENTIAL SYSTEMS

Sun Zhongmin

(*Weifang Educational College, Shandong,* 262500)

Zhao Zengqin

(*Department of Mathematics, Qufu Normal University, Shandong,* 273165)

Abstract Consider the following third-order system of two-point boundary value problems:

$$\begin{cases} u_i'''(t) = f_i(t, u_1(t), u_2(t), u_3(t)), & t \in [0,1], \\ u_i'(0) = u_i''(0) = u_i(1) = 0, & i = 1,2,3. \end{cases}$$

Using a nonlinear alternative of Leray-Schauder type and Krasnoselskii's fixed point theorem, we establish the existence of one or more constant-sign solutions for the system.

Key words Third-order differential systems, constant-sign solutions, boundary value problems.