系统科学与数学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
15(4) (1995, 10), 299–304

一类 2 阶边值问题的分歧点*

胡适耕

(华中理工大学数学系, 武汉 430074)

摘要 本文考虑以下 2 阶边值问题:

$$x''-Ax=\lambda Bx+f(t,x,x',\lambda)\ (0\le t\le 1),\ P(x(0),x'(0))^{\mathrm{T}}=Q(x(1),x'(1))^{\mathrm{T}},$$

其中 $A,B\in L(R^n),P=(p_{ij}),Q=(q_{ij}),\ i,j=1,2$. 在关于 A,B,P,Q,f 的一定条件下, 证明了以上问题存在分歧点. 所用的主要工具是 Krasnoselskii 的局部分歧定理与 Krein-Rutman 定理.

关键词 2 阶边值问题, 分歧点, 强正线性算子.

给定 $A,B\in L(R^n),P=(p_{ij}),Q=(q_{ij})\ (i,j=1,2),f:J\times R^n\times R^n\times R\to R^n,J=[0,1]$, 考虑含参数 λ 的边值问题

$$\begin{cases} Lx\triangleq x''-Ax=\lambda Bx+f(t,x,x',\lambda)\ (t\in J); \\ \Gamma x\triangleq P(x(0),x'(0))^{\mathrm{T}}-Q(x(1),x'(1))^{\mathrm{T}}=0. \end{cases} \tag{1}$$

令 $I=$identity, 约定

$$\exp t\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}=(A_{ij}(t)),\overline{A}_{ij}=A_{ij}(1),\quad i,j=1,2. \tag{2}$$

若以下条件满足

$$(\mathrm{H}_0)\qquad P-Q\begin{pmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{pmatrix}^{\sim}\in GL(R^{2n}),$$

(认定自然嵌入 $R\subset L(R^n)$), 则用一个标准的程序可将边值问题 (1) 转化为积分方程

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)[\lambda Bx(s)+f(s,x(s),x'(s),\lambda)]\,\mathrm{d}s, \tag{3}$$

其中 Green 函数 $G:J\times J\to L(R^n)$ 决定于 A,P,Q, 且

$$|G|_0=\sup_{J\times J}|G(t,s)|<\infty,\quad |G_1|_0=\sup_{t\neq s}|G_1(t,s)|<\infty,\quad G_1=\partial_t G; \tag{4}$$

---

* 国家自然科学基金资助课题.
1991 年 5 月 10 日收到, 1993 年 7 月 17 日收到修改稿.

$G(t,\cdot)$ 在每点 $s\in J$ 左或右连续. 将方程 (3) 表示为

$$x=\lambda Tx+F(\lambda,x), \tag{5}$$

其中

$$(Tx)(t)=\int_0^1 G(t,s)Bx(s)\,\mathrm{d}s; \tag{6}$$

$$F(\lambda,x)(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s),x'(s),\lambda)\,\mathrm{d}s. \tag{7}$$

令 $X=\{x\in C^1(J,R^n):\Gamma x=0\}$, 在 X 中采用范数 $|x|_X=|x|_0+|x'|_0$, 其中 $|x|_0=\sup\limits_J|x(t)|$, 记 $|\cdot|$ 为 R^n 中的 Euclid 范数. 由锥 $X_+=X\bigcap C(J,R^n_+)$ 在 X 中导入序 $\leq$. 若 $(\lambda_0,0)\in R\times X$ 是方程 (5) 的分歧点, 则说 $(\lambda_0,0)$ 是边值问题 (1) 的分歧点. 本文主要结果基于

引理 1 设 $\Lambda\times\Omega$ 是 $(\lambda_0,0)$ 在 $R\times X$ 中的一邻域. 若以下条件满足:

(i) $F:\Lambda\times\Omega\to X$ 为全连续映射;

(ii) $T:X\to X$ 是强正的紧线性算子且 $\lambda_0^{-1}=r_\sigma(T)$ (T 的谱半径);

(iii) 当 $x\in X,|x|_X\to 0$ 时关于 $\lambda\in\Lambda$ 一致地有 $F(\lambda,x)=o(|x|_X)$, 则 $(\lambda_0,0)$ 是方程 (5) 的分歧点.

以上结论可由文 [2] 中定理 19.3 与 28.2 综合后得出.

在 R^n 中采用由锥 R^n_+ 导入的序 $\leq$; $\forall x,y\in R^n$, 约定

$$x<y\Longleftrightarrow x\leq y\neq x,\quad x\ll y\Longleftrightarrow y-x\in \mathrm{Int}R^n_+.$$

任给 $B=(b_{ij})\in L(R^n)$, 约定

$$B\geq 0\Longleftrightarrow b_{ij}\geq 0,\quad B\gg 0\Longleftrightarrow b_{ij}>0\,(i,j=1,2,\cdots,n).$$

以下设 $\lambda_0>0,\Lambda$ 是 λ_0 的某个邻域. 假定条件 (H_0) 满足, 此外列出以下条件:

(H_1) $f(t,\xi)\,(\xi=(x,y,\lambda))$ 满足 Caratheodory 条件.

(H_2) 存在 $0<g\in L^1(J)$, 使当 $|x|+|y|\to 0\,(x,y\in R^n)$ 时关于 $(t,\lambda)\in J\times\Lambda$ 一致地有 $f(t,x,y,\lambda)/g(t)=o(|x|+|y|)$.

(H_3) $\forall t\in J:cl\{s\in J:G(t,s)\in GL(R^n)\}=J;B\gg 0$ 且 $G(t,s)\geq 0$ (或 $B\ll 0$ 且 $G(t,s)\leq 0$), $t,s,\in J$.

(H_4) 存在 $r>0,\ 0\neq x_0\in R^n_+$, 使得 $(A+\lambda_0B)x_0=r^2x_0$,

$$\begin{aligned}&[r(p_{12}q_{22}-p_{22}q_{12})+r^{-1}(p_{21}q_{11}-p_{11}q_{21})]\mathrm{sh}r+|P|+|Q|\\&=(p_{11}q_{22}+p_{22}q_{11}-p_{12}q_{21}-p_{21}q_{12})\mathrm{ch}r;\end{aligned} \tag{8}$$

$$0\not\equiv p_{11}\mathrm{sh}rt-p_{12}r\mathrm{ch}rt+q_{11}\mathrm{sh}r(1-t)+q_{12}r\mathrm{ch}r(1-t)\geq 0\ (\Lambda;r\ \leq 0). \tag{9}$$

(H_5) 存在 $r>0,0\neq x_0\in R^n_+$ 使得 $(A+\lambda_0B)x_0=-r^2x_0$,

$$\begin{aligned}&[r(p_{22}q_{12}-p_{12}q_{22})+r^{-1}(p_{21}q_{11}-p_{11}q_{21})]\sin r+|P|+|Q|\\&=(p_{11}q_{22}+p_{22}q_{11}-p_{12}q_{21}-p_{21}q_{12})\cos r;\end{aligned} \tag{10}$$

$$0\not\equiv p_{11}\sin rt-p_{12}r\cos rt+q_{11}\sin r(1-t)+q_{12}r\cos r(1-t)\geq 0\ (\text{或}\ \leq 0). \tag{11}$$

(8), (10) 式中 $|P| = \det P$. 本文的主要结果如下：

定理 1 若条件 (H_0), (H_1)–(H_3) 及条件 (H_4), (H_5) 之一满足，则 $(\lambda_0, 0)$ 是问题 (1) 的分歧点.

证 由条件 (H_2), 存在 $\rho > 0$, 使当 $x, y \in R^n$, $|x| + |y| < \rho$ 时对一切 $(t, \lambda) \in J \times \Lambda$ 有

$$|f(t, x, y, \lambda)| \leq g(t)(|x| + |y|) \leq \rho g(t). \tag{12}$$

令 $\Omega = \{x \in X : |x|_X < \rho\}$; 任给 $(\lambda, x) \in \Lambda \times \Omega$, 定义 $Tx, F(\lambda, x)$ 如 (6), (7), 今验证引理 1 之条件满足.

1) 任给 $(\lambda, x) \in \Lambda \times \Omega$, 条件 (H_1) 推出 $f(t, x(t), x'(t), \lambda)$ 对 $t \in J$ 可测；由 (12) 有

$$|f(t, x(t), x'(t), \lambda)| \leq \rho g(t) \in L^1(J), \tag{13}$$

由此及 (4) 推知 $y = F(\lambda, x)$ 依 (7) 有定义. 进而用 (7) 式的构造易验知 $y \in C^1(J, R^n)$,

$$y'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\lambda, x)(t) = \int_0^1 G_1(t, s) f(s, x(s), x'(s), \lambda)\, \mathrm{d}s; \tag{14}$$

$$(Ly)(t) = f(t, x(t), x'(t), \lambda) \text{ a.e. } (t \in J), \tag{15}$$

且 $\Gamma y = 0$, 因此 $y \in X$.

若在 $\Lambda \times \Omega$ 中 $(\lambda_k, x_k) \to (\lambda, x)$ $(k \to \infty)$, 则 $\lambda_k \to \lambda$, $x_k(t) \rightrightarrows x(t)$, $x_k'(t) \rightrightarrows x'(t)$ $(t \in J, k \to \infty)$, 于是由 (H_1) 有

$$f(t, x_k(t), x_k'(t), \lambda_k) \to f(t, x(t), x'(t), \lambda) \text{ a.e. } (t \in J, k \to \infty).$$

注意到 (4), (13), 可用控制收敛定理推出

$$|F(\lambda_k, x_k) - F(\lambda, x)|_0 \leq |G|_0 \int_0^1 |f(t, x_k(t), x_k'(t), \lambda_k) - f(t, x(t), x'(t), \lambda)|\, \mathrm{d}t \to 0 \quad (k \to \infty).$$

同理

$$|(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(F(\lambda_k, x_k) - F(\lambda, x))|_0 \to 0\ (k \to \infty),$$

因此

$$|F(\lambda_k, x_k) - F(\lambda, x)|_X \to 0.$$

这表明

$$F \in C(\Lambda \times \Omega, X).$$

2) 任给 $(\lambda, x) \in \Lambda \times \Omega$, 令 $y = F(\lambda, x)$. 由 (7) 与 (13) 有

$$|y|_0 \leq |G|_0 \int_0^1 |f(t, x(t), x'(t), \lambda)|\, \mathrm{d}t \leq \rho |G|_0 \|g\|_1. \tag{16}$$

记 $\|\cdot\|_1$ 为通常的 L^1 范数. 同理用 (13), (14) 得

$$|y'|_0 \leq \rho |G_1|_0 \|g\|_1. \tag{17}$$

设 $0 \leq t < \tau \leq 1$, 由 (13)–(15) 有

$$\begin{aligned} |y(t) - y(\tau)| &= \left| \int_t^\tau y'(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \right| = \left| \int_t^\tau \mathrm{d}\sigma \int_0^1 G_1(\sigma, s) f(s, x(s), x'(s), \lambda)\, \mathrm{d}s \right| \\ &\leq \int_t^\tau \mathrm{d}\sigma \int_0^1 |G_1|_0 \rho g(s)\, \mathrm{d}s = \rho(\tau - t) |G_1|_0 \|g\|_1; \end{aligned} \tag{18}$$

$$|y'(t)-y'(\tau)| = \left|\int_t^\tau y''(s)\,\mathrm{d}s\right| \le \int_t^\tau |y''(s)|\,\mathrm{d}s$$
$$= \int_t^\tau |Ax(s)+f(s,x(s),x'(s),\lambda)|\,\mathrm{d}s \le \rho\int_t^\tau (|A|+g(s))\,\mathrm{d}s. \tag{19}$$

(16)–(19) 表明， $\Phi = F(\Lambda\times\Omega)$ 与 $\{y' : y\in\Phi\}$ 一致有界且在 J 上等度连续．由熟知的 Arzelà-Ascoli 定理， Φ 在 X 中相对紧．因此 $F:\Lambda\times\Omega\to X$ 为全连续映射．

3) 由 (6) 不难直接看出， $T: X\to X$ 有定义且为紧线性算子．今从条件 (H_3) 推出 T 是强正的．只需考虑 $B\gg 0, G(t,s)\ge 0$ 的情况．因

$$X\cap C(J,\mathrm{Int}R_+^n)\subset \mathrm{Int}X_+,$$

故只需对 $x\in X_+\setminus\{0\}$ 证 $(Tx)(t)\gg 0\ (\forall t\in J)$. 取定 $t\in J$. 取 $s_0\in J$, 使 $x(s_0)>0$, 于是 $Bx(s_0)\gg 0$, 而 $G(t,s)Bx(s)\ge 0\,(\forall s\in J)$. 取充分接近 s_0 的 $s_1\in(0,1)$, 使 $Bx(s_1)\gg 0$ 且 $G(t,s_1)\in GL(R^n)$, 于是

$$z \triangleq G(t,s_1)Bx(s_1)\gg 0.$$

因 $G(t,\cdot)$ 在 s_1 单边连续，不妨设有 $\delta>0$, 使 $\forall s\in I_\delta \triangleq [s_1,s_1+\delta): G(t,s)Bx(s)\ge z/2$. 于是

$$(Tx)(t)\ge\int_{I_\delta} G(t,s)Bx(s)\,\mathrm{d}s\ge\frac{1}{2}\delta z\gg 0.$$

4) 证明由条件 (H_4) 可推出 $\lambda_0^{-1}=r_\sigma(T)$. 设 r, x_0 如条件 (H_4), 可设 (9) 中 $\ge$ 成立．令

$$x(t)=(p_{11}r^{-1}\mathrm{sh}rt-p_{12}\mathrm{ch}rt+q_{11}r^{-1}\mathrm{sh}r(1-t)+q_{12}\mathrm{ch}r(1-t))x_0\ (t\in J), \tag{20}$$

则由 (9) 有 $0\ne x(t)\ge 0$; 直接算出

$$x'(t)=(p_{11}\mathrm{ch}rt-p_{12}r\mathrm{sh}rt-q_{11}\mathrm{ch}r(1-t)-q_{12}r\mathrm{sh}r(1-t))x_0. \tag{21}$$

由 (21) 与 $(A+\lambda_0B)x_0=r^2x_0$ 得出 $x''=(A+\lambda_0B)x$, 即

$$Lx=x''-Ax=\lambda_0Bx. \tag{22}$$

由 (20), (21) 有

$$\begin{cases} x(0)=(-p_{12}+q_{11}r^{-1}\mathrm{sh}r+q_{12}\mathrm{ch}r)x_0;\\ x'(0)=(p_{11}-q_{11}\mathrm{ch}r-q_{12}r\mathrm{sh}r)x_0;\\ x(1)=(p_{11}r^{-1}\mathrm{sh}r-p_{12}\mathrm{ch}r+q_{12})x_0;\\ x'(1)=(p_{11}\mathrm{ch}r-p_{12}r\mathrm{sh}r-q_{11})x_0. \end{cases} \tag{23}$$

结合 (8) 与 (23) 可验知 $\Gamma x=0$, 这与 (6), (22) 一起得出 $x=\lambda_0Tx$, 可见 $\lambda_0^{-1}\in\sigma(T)$ 且 x 是 T 关于 λ_0^{-1} 的正特征向量．由 [2; 定理 19.3], 有 $\lambda_0^{-1}=r_\sigma(T)$.

类似地可证由条件 (H_5) 亦可推出 $\lambda_0^{-1}=r_\sigma(T)$.

5) 任给 $\varepsilon>0$, 由条件 (H_2) 有 $\delta>0$, 使当 $x,y\in R^n, |x|+|y|\le\delta$ 时, 对一切 $(t,\lambda)\in J\times\Lambda$ 有

$$|f(t,x,y,\lambda)|\le\varepsilon g(t)(|x|+|y|).$$

于是当 $x \in X, |x|_X \le \delta$ 时，对一切 $\lambda \in \Lambda$ 有

$$\begin{aligned}|F(\lambda,x)|_0 &\le |G|_0 \int_0^1 |f(t,x(t),x'(t),\lambda)|\,\mathrm{d}t \\ &\le \varepsilon|G|_0 \int_0^1 g(t)[|x(t)|+|x'(t)|]\,\mathrm{d}t \le \varepsilon|G|_0\|g\|_1|x|_X.\end{aligned}$$

同理有

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\lambda,x)\right|_0 \le \varepsilon|G_1|_0\|g\|_1|x|_X.$$

这表明当 $x \in X, |x|_X \to 0$ 时，关于 $\lambda \in \Lambda$ 一致地有 $F(\lambda,x)=o(|x|_X)$.

综上所证，由引理 1 得出 $(\lambda_0,0)$ 是问题 (1) 的分歧点. 证毕.

注 1 若 $\Gamma x=0$ 蕴涵 $x(i)=0\,(i=0$ 或 $1)$, 则条件 (H_3) 不能满足. 为使定理 1 能用于 "Dirichlet 边值条件" 这类情况，须以某个适当的有序 Banach 空间 Y 取代 X[2,3], 以使 T 为强正紧线性算子. 关于定理 1 的这一修正的详细讨论从略.

注 2 若 $A+\lambda_0 B \gg 0$, 则条件 (H_4) 蕴涵 $r^2=r_\sigma(A+\lambda_0 B)$. 关于条件 (H_5) 有类似结论.

例 1 设 $a,\mu>0$, $0 \ll B \in L(R^n)$, 考虑边值问题

$$x''-\mu^2 x=\lambda Bx+f(t,x,x',\lambda)\ (t\in J),\quad ax(0)+x'(0)=x'(1)=0. \tag{24}$$

当 $\triangle = a\mathrm{ch}\mu-\mu\mathrm{sh}\mu \ne 0$ 时，条件 (H_0) 满足，且可求出

$$\mu\triangle G(t,s)=\begin{cases}\mathrm{ch}\mu(1-t)(\mu\mathrm{ch}\mu s-a\mathrm{sh}\mu s), & s\le t;\\ \mathrm{ch}\mu(1-s)(\mu\mathrm{ch}\mu t-a\mathrm{sh}\mu t), & s>t.\end{cases}$$

由此看出，当 $\mathrm{th}\mu<a/\mu<c\mathrm{th}\mu$ 时，条件 (H_3) 满足. (8) 相当于 $r\mathrm{th}r=a$; 对满足 $r\mathrm{th}r=a$ 的 r, (9) 必成立 (取 $\le$). 于是由定理 1 得到 (参考注 2):

定理 2 若

$$\mathrm{th}\mu<\frac{a}{\mu}<c\mathrm{th}\mu,\quad \sqrt{r_\sigma(\mu^2 I+\lambda_0 B)}\,\mathrm{th}\sqrt{r_\sigma(\mu^2 I+\lambda_0 B)}=a,$$

f 满足条件 (H_1), (H_2), 则问题 (24) 有分歧点 $(\lambda_0,0)$.

例 2 设 $b>0, f: J\times R^3 \to R$, 考虑边值问题

$$x''+\lambda bx=f(t,x,x',\lambda)\quad (t\in J), x(0)=x(1)=0. \tag{25}$$

直接算出

$$G(t,s)=\begin{cases}s(t-1), & s\le t;\\ t(s-1), & s>t.\end{cases}$$

若取 $\lambda_0=\pi^2/b, r=\pi$, 则可验证条件 (H_5). 尽管条件 (H_3) 不完全满足，用一个如注 1 所提到的方法仍可指明 $\lambda_0^{-1}=r_\sigma(T)$. 于是当 f 满足条件 (H_1), (H_2) 时， $(\pi^2/b,0)$ 是问题 (25) 的分歧点.

例 3 设 $\mu,b>0$, 考虑边值问题

$$x''-\mu^2 x=-\lambda bx+f(t,x,x',\lambda)\quad (t\in J),\ x(0)=x'(1)=0. \tag{26}$$

类似于例 1, 可算出 Green 函数

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{-\mathrm{ch}\mu(1-t)\mathrm{sh}\mu s}{\mu\mathrm{ch}\mu}, & s\le t;\\ \dfrac{-\mathrm{ch}\mu(1-s)\mathrm{sh}\mu t}{\mu\mathrm{ch}\mu}, & s>t,\end{cases}$$

可见 $G(t,s)\le 0\,(t,s\in J)$. 若取 $\lambda_0=(4\mu^2+\pi^2)/4b, r=\pi/2$, 则可验证条件 ($H_5$). 于是当 f 满足条件 (H_1), (H_2) 时, 基于如例 2 中所述的同样的理由, $((4\mu^2+\pi^2)/(4b),0)$ 是问题 (26) 的分歧点.

对例 1 - 3 的结论都不难给出数值例子加以证实.

参 考 文 献

[1] Hartman, P., Ordinary Differential Equations. 2ed., Birkhäuser, Boston, 1982.
[2] Deimling, K., Nonlinear Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
[3] Amann, H., Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces. *SIAM, Rew.*, 1976, **18**: 620–709.

BIFURCATION POINTS FOR A CLASS OF SECOND ORDER BOUNDARY VALUE PROBLEMS

HU SHI-GENG

(*Department of Mathematics, Huazhong University of Science and Technology,* Wuhan 430074)

Abstract This paper considers the following second order boundary value problem:

$$x''-Ax=\lambda Bx+f(t,x,x',\lambda)\,(0\le t\le 1),$$
$$P(x(0),x'(0))^{\mathrm{T}}=Q(x(1),x'(1))^{\mathrm{T}},$$

where $A,B\in L(R^n), P=(p_{ij}), Q=(q_{ij}), (i,j=1,2)$. Under certain conditions on A,B,P,Q and f, it is proved that the above problem has a bifurcation point. The main tools used in this paper are the local bifurcation theorem of Krasnoselskii and the Krein-Rutman theorem.

Key words Second order boundary value problem, bifurcation point, strongly positive linear operator.