

# 非凸单个守恒律初边值问题的 整体弱熵解的构造\*

刘红霞 潘涛

(暨南大学数学系, 广州 510632)

**摘要** 本文研究具有两段常数的初始值和常数边界值的非凸单个守恒律的初边值问题. 在流函数具有一个拐点的条件下, 由相应的初始值问题弱熵解的结构和 Bardos-Leroux-Nedelec 提出的边界熵条件, 给出初边值问题整体弱熵解的一个构造方法, 澄清弱熵解在边界附近的结构. 与严格凸的单个守恒律初边值问题相比, 非凸单个守恒律初边值问题的弱熵解中包括下列新的相互作用类型: 一个接触或非接触激波碰到边界, 边界弹回一个非接触激波.

**关键词** 非凸单个守恒律, 初边值问题, 边界熵条件, 整体弱熵解.

MR(2000) 主题分类号 35L65

## 1 引言

考虑下列非凸单个守恒律的初边值问题

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & x > 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) := \begin{cases} u_m, & 0 < x < a, \\ u_+, & x > a, \end{cases} \\ u(0, t) = u_b(t) := u_-, \quad t > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中  $a$  是常数,  $u_{\pm}, u_m$  是三个不恒等的常数,  $f \in C^2$  只有一个拐点  $u_c$ , 满足

$$(u - u_c)f''(u) < 0, \quad u \neq u_c \quad (1.2)$$

或

$$(u - u_c)f''(u) > 0, \quad u \neq u_c. \quad (1.3)$$

具有边界条件的非线性双曲守恒律问题在流体力学, 交通流理论等中有着直接的研究背景和重要意义<sup>[1,2]</sup>. 近年, Bustos 等人<sup>[3-6]</sup>以单个守恒律的初边值问题为模型研究一维沉积学的实际问题. 单个守恒律的初边值问题首先由 Bardos-Leroux-Nedelec<sup>[7]</sup>开展研究, 他们利

\* 广东省自然科学基金 (04010473), 暨南大学引进优秀人才科研启动基金 (51204033) 资助课题.  
收稿日期: 2003-12-12.

用粘性消失法和 Kruzkov 方法在有界变差函数类中分别证明了单个守恒律初边值问题的整体弱熵解的存在性和唯一性. 文 [8] 还研究了在有界可测函数类中单个守恒律初边值问题的整体弱熵解的唯一性. 其研究核心是边界熵条件, 它仅仅要求边界条件与解的边界值满足一个不等式. 这使得对双曲型守恒律初边值问题的研究十分有趣, 同时也有相当的难度. Joseph [9] 利用粘性消失法和 Hopf-Cole 变换方法研究了最简单的单个守恒律 Hopf 方程的初边值问题. 文 [10,11] 推导了具凸条件的单个守恒律初边值问题的整体弱熵解的 Lax 型表达式. 文 [12] 利用折线逼近法研究没有凸条件的单个守恒律一般初边值问题的整体弱熵解的存在性. 对于守恒律组的初边值问题, 文 [13] 研究了守恒律组的边界熵条件, 文 [14-16] 讨论了双曲守恒律组的边界层等问题, 文 [17] 利用补偿列紧粘性消失法证明了等熵流方程组初边值问题的整体弱熵解的存在性. 由于有边界条件的影响, 使得守恒律 (组) 初边值问题的整体弱熵解的结构以及解的大时间性态等方面的研究比相应的初始值问题更为困难. 至今为止, 关于这些方面的研究结果还很少. 文 [3,5,6] 对用来模拟一维沉积学的实际问题中的两端有界的单个守恒律初边值问题就具有三段常数的某些特殊初边值的情形构造了整体弱熵解, 其解的结构与相应的初始值问题类似, 而且他们没有得到关于具有三段常数的各种初边值的一般结果. 对于一端有界的单个凸守恒律具有初始值为有有限个间断点的分段光滑函数和边界值为常数函数的初边值问题, 文 [18] 讨论了初等波与边界的相互作用, 给出了初边值问题弱熵解的一个构造方法, 澄清了弱熵解的结构和边界性态, 并发现了在单个凸守恒律初边值问题的解结构中不同于相应的初始值问题的新现象, 即稀疏波与边界相互作用可以反射激波. 对于两端有界的单个凸守恒律具有初始值和两端边界值均为常数的初边值问题, 文 [19] 研究了初等波与两边边界的相互作用及解的大时间性态, 并发现了在解的大时间性态中有与初始值问题不同的现象.

对于非凸单个守恒律的初始值问题, 由于接触间断的出现, 使得关于弱熵解的几何结构和渐进性态的研究变得十分复杂和困难. 关于流函数具有有限个拐点的单个守恒律, 文 [20] 使用特征方法在一类分片光滑解中构造了初始值问题的整体弱熵解, 证明了分片光滑的弱熵解的唯一性, 此外, 通过极限过程得到当初始值为一般有界可测函数时初始值问题的整体弱熵解的存在性. 当初始值为有界的局部有界变差函数时, 文 [21] 利用折线逼近法对具有一般非凸流函数的单个守恒律初始值问题构造了一类分片常数的近似解, 并由此得到整体弱熵解的存在性. 在解的正则性和渐近性质方面, 到目前为止, 只解决了流函数具有一个拐点的情形, 参见文 [22-25].

本文将对流函数具有一个拐点的非凸单个守恒律初边值问题 (1.1) 构造其整体弱熵解. 在第 2 节, 给出问题 (1.1) 的弱熵解的定义和边界熵条件, 以及问题 (1.1) 具有分片光滑的弱熵解的一个充分必要条件. 在第 3 节, 推广文 [18] 中的分析方法到我们的问题, 并使用第 2 节中给出的充分必要条件, 给出初边值问题 (1.1) 弱熵解的一个构造方法, 澄清弱熵解在边界附近的结构, 并发现单个非凸守恒律初边值问题的解结构中有不同于相应单个凸守恒律初边值问题的现象, 亦即, 一个接触或非接触激波碰到边界, 边界弹回一个非接触激波.

## 2 弱熵解的定义

跟随文 [7,13,12,6], 我们给出初边值问题 (1.1) 的弱熵解的定义.

**定义 2.1** 在  $[0, \infty) \times [0, \infty)$  上一个有界的局部有界变差函数  $u(x, t)$  称为初边值问题 (1.1) 的一个弱熵解, 如果对每个非负检验函数  $\phi \in C_0^\infty([0, \infty) \times [0, \infty))$  和每一个  $k \in (-\infty, \infty)$ ,  $u(x, t)$  满足下列不等式

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty \{|u - k|\phi_t + \operatorname{sgn}(u - k)(f(u) - f(k))\phi_x\} dx dt \\ & + \int_0^\infty \operatorname{sgn}(u_b(t) - k)(f(u(0, t)) - f(k))\phi(0, t) dt \\ & + \int_0^\infty |u_0(x) - k|\phi(x, 0) dx \\ & \geq 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

对具有一般有界可测的初边值, 问题 (1.1) 在 (2.1) 式意义下的弱熵解的存在唯一性已得到, 且弱熵解满足下列边界熵条件 (2.2) (参见文 [7,13,12]).

**引理 2.2** 若  $u(x, t)$  是问题 (1.1) 的弱熵解, 则下列边界熵条件成立

$$\begin{aligned} & u(0, t) = u_b(t) \text{ 或} \\ & \frac{f(u(0, t)) - f(k)}{u(0, t) - k} \leq 0, \quad k \in I(u(0, t), u_b(t)), \quad k \neq u(0, t), \quad \text{a.e. } t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中  $I(u(0, t), u_b(t)) = [\min\{u(0, t), u_b(t)\}, \max\{u(0, t), u_b(t)\}]$ .

由定义 2.1 及引理 2.2, 对分片光滑解, 下列引理容易得到证明 [26,12].

**引理 2.3** 假设 (1.2) 式或 (1.3) 式成立. 一个具有分段光滑间断线的分片光滑函数  $u(x, t)$  是初边值问题 (1.1) 在 (2.1) 式意义下的弱熵解当且仅当下列条件满足

- (1) 在其光滑区域内,  $u(x, t)$  满足 (1.1)<sub>1</sub> 式;
- (2) 若  $x=x(t)$  是  $u(x, t)$  的一条弱间断, 则  $\frac{dx(t)}{dt} = f'(u(x(t), t))$ . 若  $x=x(t)$  是  $u(x, t)$  的强间断, 则  $\frac{dx(t)}{dt} = \frac{f(u^-) - f(u^+)}{u^- - u^+}$  (Rankine-Hugoniot 条件) 和  $\frac{f(u^-) - f(u^+)}{u^- - u^+} \leq \frac{f(u^-) - f(u)}{u^- - u}$  (Oleinik 熵条件), 这里  $u^- = u(x(t)-0, t)$ ,  $u^+ = u(x(t)+0, t)$ ,  $u$  为位于  $u^-$  和  $u^+$  之间的任意数;
- (3) 边界熵条件 (2.2) 式成立;
- (4)  $u(x, 0) = u_0(x)$  a.e.  $x \geq 0$ .

在构造问题 (1.1) 的弱熵解时, 需要用到引理 2.3.

### 3 弱熵解的构造

在这一节, 我们借助于文 [18] 中的分析方法, 使用引理 2.3 来构造初边值问题 (1.1) 的整体弱熵解, 研究初等波与边界的相互作用, 并得到解在边界附近的结构.

考虑下列具有三段常数的初始值问题

$$\begin{cases} v_t + f(v)_x = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ v(x, 0) = v_0(x) := \begin{cases} u_-, & x < 0, \\ u_m, & 0 < x < a, \\ u_+, & x > a. \end{cases} \end{cases} \quad (3.1)$$

当  $u_m, u_{\pm} \leq u_c$  或  $u_m, u_{\pm} \geq u_c$  时, 问题 (1.1) 退化为凸的情形, 其讨论见文 [18]. 贯穿全文, 不妨假设条件  $u_m, u_{\pm} \leq u_c$  和  $u_m, u_{\pm} \geq u_c$  均不成立. 这里也不妨假设  $u_m \neq u_{\pm}$ , 若否, 则像凸的情形一样, 取  $u(x, t) = v(x, t)|_{R^+ \times R^+}$ , 其中  $v(x, t)$  为问题 (3.1) 的弱熵解, 则根据引理 2.3 易证  $u(x, t)$  是问题 (1.1) 的弱熵解.

以下分别就  $f$  满足 (1.2) 式和 (1.3) 式的条件下来构造问题 (1.1) 的弱熵解.

为后面方便起见, 在构造解之前, 先引进一些符号.  $R(u_-, u_+)$  表示一个从左至右连接  $u_-$  和  $u_+$  的中心稀疏波.  $S(u_-, u_+)$  表示一个从左至右连接  $u_-$  和  $u_+$  的非接触激波  $x = X(t)$ , 这里  $x = X(t)$  满足 Rankine-Hugoniot 条件和 Lax 激波条件

$$X'(t) = \frac{f(u_-) - f(u_+)}{u_- - u_+}, \quad (3.2)$$

$$f'(u_+) < X'(t) < f'(u_-).$$

用  $S^l(u_-, u_+)$  或  $S^r(u_-, u_+)$  或  $S^{lr}(u_-, u_+)$  分别表示一个连接  $u_-$  和  $u_+$  的左接触激波或右接触激波或双边接触激波  $x = X(t)$ , 这里  $x = X(t)$  满足条件 (3.2) 式和相应的接触条件  $X'(t) = f'(u_-) > f'(u_+)$  或  $f'(u_-) > X'(t) = f'(u_+)$  或  $f'(u_-) = X'(t) = f'(u_+)$ . 把左和右接触激波及双边接触激波都称为接触激波. 把接触激波和非接触激波统称为激波. 众所周知, 在  $x-t$  平面上的点  $(a, b)$  处发出的激波解  $S(u_-, u_+)$  (或  $S^l(u_-, u_+)$  或  $S^r(u_-, u_+)$  或  $S^{lr}(u_-, u_+)$ ) 和中心稀疏波解  $R(u_-, u_+)$  分别表示为

$$u(x, t) = \begin{cases} u_-, & x < a + \frac{f(u_-) - f(u_+)}{u_- - u_+}(t - b), \\ u_+, & x > a + \frac{f(u_-) - f(u_+)}{u_- - u_+}(t - b), \end{cases}$$

和

$$u(x, t) = \begin{cases} u_-, & x < a + f'(u_-)(t - b), \\ (f')^{-1}\left(\frac{x - a}{t - b}\right), & a + f'(u_-)(t - b) < x < a + f'(u_+)(t - b), \\ u_+, & x > a + f'(u_+)(t - b), \end{cases}$$

其中  $t > b$ . 若  $v(x, t)$  从左至右连接  $u_-$  和  $u_+$  且关于  $x$  递增 (或递减), 则称  $v(x, t)$  是一个连接  $u_-$  和  $u_+$  的扩张波 (或压缩波), 用  $E(u_-, u_+)$  (或  $C(u_-, u_+)$ ) 表示. 特别地, 若  $E(u_-, u_+)$  或  $C(u_-, u_+)$  中不含接触和非接触激波间断且  $u_- \neq u_+$ , 则称  $E(u_-, u_+)$  或  $C(u_-, u_+)$  为一个连接  $u_-$  和  $u_+$  的稀疏波. 显然, 激波和中心稀疏波均是扩张波或压缩波的特例, 中心稀疏波是稀疏波的特例. 若  $E(u_-, u_+)$  (或  $C(u_-, u_+)$ ) 还是中心在点  $A$  的扇形波, 则称  $E(u_-, u_+)$  (或  $C(u_-, u_+)$ ) 是中心在点  $A$  的中心扩张波 (或中心在点  $A$  的中心压缩波). 由于  $f$  只有一个拐点, 对我们的问题 (3.1)<sub>1</sub> 而言, 解中不含双边接触激波间断, 只含左或右接触激波间断, 因而, 一个中心扩张波  $E(u_-, u_+)$  或一个中心压缩波  $C(u_-, u_+)$  分别为下列情形之一:  $R(u_-, u_+)$ ,  $S(u_-, u_+)$ ,  $S^l(u_-, u_+)$ ,  $S^r(u_-, u_+)$ ,  $R(u_-, u_1) \cup S^l(u_1, u_+)$ ,  $S^r(u_-, u_1) \cup R(u_1, u_+)$ .

### 3.1 $f$ 满足 (1.2) 式的情形

在这一子节, 假设 (1.2) 式成立. 在下文中,  $v(x, t)$  均表示初始值问题 (3.1) 的弱熵解.

只讨论  $f''(u_-) \geq 0$  的情形. 对于  $f''(u_-) < 0$  的情形能类似地讨论. 根据  $u_{\pm}$  和  $u_m$  的大小, 将此情形分成下列三个子情形

$$\begin{aligned} u_-, u_+ &< u_m; \\ u_- &< u_m < u_+; \\ u_m &< u_- < u_+. \end{aligned}$$

### 3.1.1 子情形 $u_-, u_+ < u_m$

由前面的约定,  $u_m > u_c$ . 先描述问题 (3.1) 的弱熵解  $v(x, t)$  的结构. 在  $x-t$  平面上的点  $(0, 0)$  和  $(a, 0)$  处分别发出一个中心扩张波  $E(u_-, u_m)$  和一个中心压缩波  $C(u_m, u_+)$ . 根据文 [27],  $E(u_-, u_m)$  和  $C(u_m, u_+)$  将在某有限时刻  $t=t_*$  相互作用, 按其相互作用类型分为下列六种可能性

- (I)  $E(u_-, u_m) = S(u_-, u_m)$  或  $S^l(u_-, u_m)$ ,  $C(u_m, u_+) = R(u_m, u_+)$ ;
- (II)  $E(u_-, u_m) = S(u_-, u_m)$  或  $S^l(u_-, u_m)$ ,  $C(u_m, u_+) = S(u_m, u_+)$  或  $S^l(u_m, u_+)$ ;
- (III)  $E(u_-, u_m) = S(u_-, u_m)$  或  $S^l(u_-, u_m)$ ,  $C(u_m, u_+) = R(u_m, u_2) \cup S^l(u_2, u_+)$ ;
- (IV)  $E(u_-, u_m) = R(u_-, u_1) \cup S^l(u_1, u_m)$ ,  $C(u_m, u_+) = S(u_m, u_+)$  或  $S^l(u_m, u_+)$ ;
- (V)  $E(u_-, u_m) = R(u_-, u_1) \cup S^l(u_1, u_m)$ ,  $C(u_m, u_+) = R(u_m, u_+)$ ;
- (VI)  $E(u_-, u_m) = R(u_-, u_1) \cup S^l(u_1, u_m)$ ,  $C(u_m, u_+) = R(u_m, u_2) \cup S^l(u_2, u_+)$ .

$E(u_-, u_m)$  中的激波, 用  $x=x_1(t)$  表示, 将与其右边波  $C(u_m, u_+)$  在时刻  $t=t_*$  开始相互作用, 其相互作用的生成激波为非接触或接触激波, 仍记为  $x=x_1(t)$ . 这时生成激波的左边为常状态  $u_-$  或稀疏波 (不一定是中心的). 若  $u_+ < u_c$  且  $E(u_-, u_m)$  和  $C(u_m, u_+)$  不同时为激波, 则  $x=x_1(t)$  还会与其左边的稀疏波相互作用并穿过其左边的稀疏波 (见图 2, 图 4, 图 6), 根据文 [27], 若  $u_+ < u_-$ , 此激波在有限时刻能完全穿透左边的整个稀疏波; 若  $u_+ = u_-$ , 只有当  $t \rightarrow \infty$  时此激波才能完全穿透左边的整个稀疏波; 若  $u_+ > u_-$ , 此激波不能完全穿透其左边的整个稀疏波, 此相互作用的生成激波可看成  $x=x_1(t)$  的延伸, 还是用  $x=x_1(t)$  表示. 则激波  $x=x_1(t) (t > 0)$  是  $v(x, t)$  中最左边第一个激波 (亦即  $x=x_1(t) (t > 0)$  是一条分段光滑曲线, 其中每段光滑曲线均为  $v(x, t)$  的激波曲线, 且当  $x < x_1(t) (t > 0)$  时  $v(x, t)$  关于  $x$  和  $t$  二元连续), 它是两段或三段光滑的连续曲线, 其位置为以下两种情形: (a)  $x=x_1(t) (t > 0)$  位于  $x-t$  平面上包括  $t$ -轴的第一象限或位于第二象限且激波速度非正或从包括  $t$ -轴的第一象限穿过  $t$ -轴进入并留在第二象限 (如见图 3-图 5); (b) 在某一有限时刻前  $x=x_1(t)$  位于第二象限且波速由负变为正, 即存在  $t_{**} > t_*$  使  $s(t_{**})=0$ , 且当  $0 < t < t_{**}$  时,  $s(t) < 0$ ; 当  $t$  属于  $t_{**}$  的某去心右邻域时  $s(t) > 0$ , 其中  $s(t)$  为激波  $x=x_1(t)$  的速度 (如见图 1, 图 2, 图 6).

在情形 (a), 令  $u(x, t) = v(x, t)|_{R^+ \times R^+}$ , 则由引理 2.3 容易验证  $v(x, t)$  为问题 (1.1) 的弱熵解.

在情形 (b), 若像情形 (a) 那样构造解, 则当  $t > t_1$  时, 边界熵不等式 (2.2) 不成立, 其中  $t_1$  是从点  $(x_1(t_{**}), t_{**})$  往下作速度为  $f'(u(x_1(t_{**})+0, t_{**}))$  的特征与  $t$ -轴相交的时刻 (见图 1, 图 2, 图 6), 于是由引理 2.3 知像情形 (a) 那样构造的函数  $u(x, t)$  不是问题 (1.1) 的弱熵解. 因而需重新构造解. 现取

$$V(x, t) = \begin{cases} v(x, t), & 0 < t < t_1, \\ v_1(x, t), & t \geq t_1, \end{cases}$$

其中  $v_1(x, t)$  是下列初始值问题

$$\begin{cases} v_{1t} + f(v_1)_x = 0, & x > 0, \quad t > t_1, \\ v_1(x, t_1) = \begin{cases} u_-, & x < 0, \\ v(x, t_1 - 0), & x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (3.3)$$

的弱熵解. 对此  $V(x, t)$  而言, 在点  $(0, t_1)$  发出一个非接触激波, 它将与其右边的压缩波相互作用 (如见图 1, 图 2, 图 6). 令  $u(x, t) = V(x, t)|_{R^+ \times R^+}$ , 则应用引理 2.3 容易验证  $u(x, t)$  是问题 (1.1) 的弱熵解 (见图 1, 图 2, 图 6).

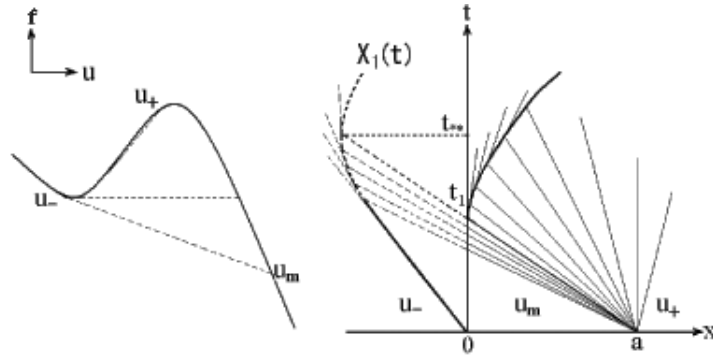


图 1

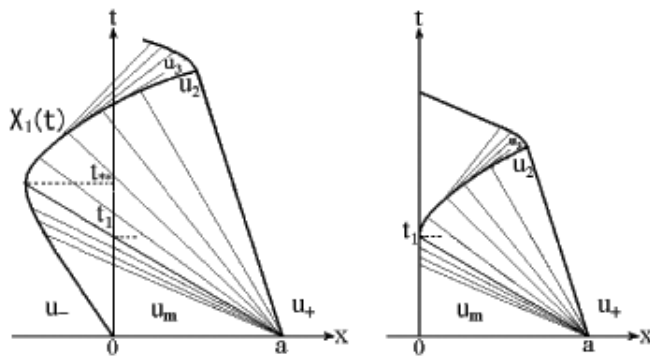


图 2

于是从上面解的构造可知, 问题 (1.1) 的解  $u(x, t)$  中初等波与边界的相互作用包括: 激波与边界相撞并被边界吸收 (如图 3, 图 4); 中心稀疏波碰到边界并被边界部分或全部吸收 (如图 5); 中心稀疏波与边界相撞, 边界反射一个非接触或接触激波 (在条件  $C(u_m, u_+) = R(u_m, u_+)$  或  $R(u_m, u_2) \cup S^l(u_2, u_+)$ ,  $u_- \leq u_c < u_m$ ,  $f(u_-) \geq f(u_m)$  下) (如图 1, 图 2, 图 6).

**3.1.2 子情形  $u_- < u_m < u_+$**

首先陈述初始值问题 (3.1) 的弱熵解  $v(x, t)$  中的相互作用. 在  $x-t$  平面上的点  $(0, 0)$  和

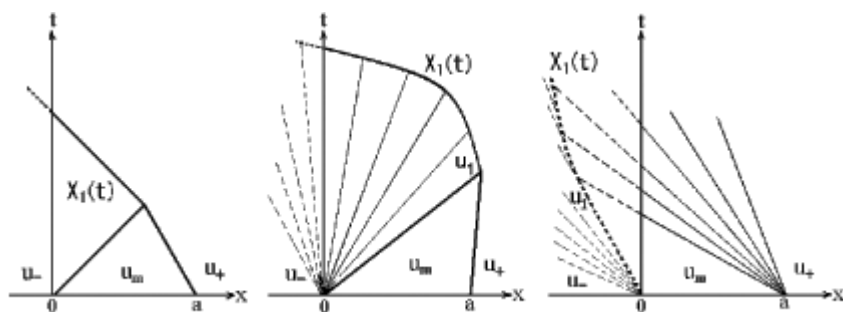


图 3

图 4

图 5

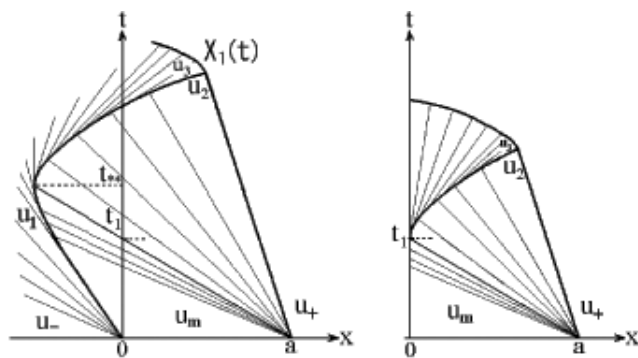


图 6

$(a, 0)$  处分别发出一个中心扩张波  $E_1(u_-, u_m)$  和一个中心扩张波  $E_2(u_m, u_+)$ , 其中

$$E_1(u_-, u_m) = R(u_-, u_m), \quad E_2(u_m, u_+) = S(u_m, u_+) \text{ 或 } S^l(u_m, u_+);$$

或

$$E_1(u_-, u_m) = R(u_-, u_m), \quad E_2(u_m, u_+) = R(u_m, u_2) \cup S^l(u_2, u_+);$$

或

$$E_1(u_-, u_m) = S(u_-, u_m) \text{ 或 } S^l(u_-, u_m), \quad E_2(u_m, u_+) = S(u_m, u_+);$$

或

$$E_1(u_-, u_m) = R(u_-, u_1) \cup S^l(u_1, u_m), \quad E_2(u_m, u_+) = S(u_m, u_+).$$

$E_1(u_-, u_m)$  和  $E_2(u_m, u_+)$  在有限时刻将相互作用, 其相互作用结果为一个扩张波. 考察初始波  $E_1(u_-, u_m)$  和  $E_2(u_m, u_+)$  中位于最左边的激波, 记为  $x=x_1(t)$ . 若此激波与其左或右边的初等波相互作用, 其生成激波仍记为  $x=x_1(t)$ , 另外当  $E_1(u_-, u_m)=R(u_-, u_1) \cup S^l(u_1, u_m)$ ,  $E_2(u_m, u_+)=S(u_m, u_+)$  时, 这个  $x=x_1(t)$  还将与其左边的中心稀疏波  $R(u_-, u_1)$  相互作用, 其生成激波还是表示为  $x=x_1(t)$ . 于是  $x=x_1(t)(t>0)$  是  $v(x, t)$  中最左边第一个激波, 其位置如下:  $x=x_1(t)(t>0)$  位于  $x-t$  平面上包括  $t$ -轴的第一象限或位于第二象限且激波速度非正或从包括  $t$ -轴的第一象限穿过  $t$ -轴进入并留在第二象限. 则由引理 2.3 知,  $u(x, t)=v(x, t)|_{R^+ \times R^+}$

是问题 (3.1) 的弱熵解.  $u(x, t)$  中初等波与边界的相互作用包括: 激波与边界相撞并被边界吸收; 中心稀疏波碰到边界并被边界部分或全部吸收.

### 3.1.3 子情形 $u_m < u_- < u_+$

先阐述问题 (3.1) 的弱熵解  $v(x, t)$  的结构. 在  $x-t$  平面上的点  $(0, 0)$  和  $(a, 0)$  处分别发出一个非接触激波  $S(u_-, u_m)$  和一个中心扩张波  $E(u_m, u_+)$ , 其中

$$E(u_m, u_+) = S(u_m, u_+) \text{ 或 } S^l(u_m, u_+) \text{ 或 } R(u_m, u_+) \cup S^l(u_2, u_+).$$

激波  $S(u_-, u_m)$ , 表示为  $x=x_1(t)$ , 在某个有限时刻  $t=t_*$  处与  $E(u_m, u_+)$  相互作用. 当  $E(u_m, u_+) = S(u_m, u_+)$  或  $S^l(u_m, u_+)$  时, 在时刻  $t=t_*$ ,  $S(u_-, u_m)$  与  $E(u_m, u_+)$  合并成一个非接触激波. 当  $E(u_m, u_+) = R(u_m, u_+) \cup S^l(u_2, u_+)$  时,  $S(u_-, u_m)$  在时刻  $t=t_*$  与  $R(u_m, u_+)$  相碰, 并穿过  $R(u_m, u_+)$ , 若  $u_1 < u_-$ , 此激波在有限时刻完全穿透整个  $R(u_m, u_+)$  并同时与  $S^l(u_2, u_+)$  合并成一非接触激波; 若  $u_1 = u_-$ , 只有当  $t \rightarrow \infty$  时此激波才能完全穿透整个  $R(u_m, u_+)$ ; 若  $u_1 > u_-$ , 此激波不能完全穿透整个  $R(u_m, u_+)$ . 将激波  $S(u_-, u_m)$  与整个  $E(u_m, u_+)$  相互作用时的生成激波仍用  $x = x_1(t)$  表示, 其左边为常状态  $u_-$ . 于是激波  $x = x_1(t) (t > 0)$  是两段或三段光滑的连续曲线, 它是  $v(x, t)$  中最左边第一个激波.

当  $x = x_1(t) (t > 0)$  位于包括  $t$ -轴的第一象限或位于第二象限且波速非正或从包括  $t$ -轴的第一象限穿过  $t$ -轴进入并留在第二象限时, 取  $u(x, t) = v(x, t)|_{R^+ \times R^+}$ ; 否则  $x = x_1(t) (t > 0)$  在某一时刻前位于第二象限且波速由负变为正, 亦即存在  $t_{**} > t_*$ , 使得当  $0 < t < t_{**}$  时激波速度为负, 当  $t = t_{**}$  时, 激波速度为零, 当  $t$  属于  $t_{**}$  的某个去心右邻域时激波速度为正, 像子情形 3.1.1 那样, 取  $u(x, t) = V(x, t)|_{R^+ \times R^+}$ , 其中  $V(x, t)$  由子情形 3.1.1 中所定义. 于是使用引理 2.3 知, 以上定义的  $u(x, t)$  为问题 (1.1) 的弱熵解. 弱熵解  $u(x, t)$  中初等波与边界的相互作用包括: 激波与边界相撞并被边界吸收; 中心稀疏波碰到边界并被边界部分或全部吸收; 中心稀疏波与边界相撞, 边界反射一个非接触或接触激波 (在条件  $E(u_m, u_+) = R(u_m, u_+) \cup S^l(u_2, u_+)$  且  $f(u_m) \geq f(u_-)$  下).

## 3.2 $f$ 满足 (1.3) 式的情形

只对  $f''(u_-) \leq 0$  的情形加以讨论. 当  $f''(u_-) > 0$  时, 能类似地讨论. 像上一节一样, 根据  $u_{\pm}$  和  $u_m$  的大小, 将此情形分成下列三种子情形

$$u_- < u_m < u_+;$$

$$u_m < u_-, u_+;$$

$$u_-, u_+ < u_m.$$

### 3.2.1 子情形 $u_- < u_m < u_+$

首先描述初始值问题 (3.1) 的弱熵解  $v(x, t)$  中初等波的相互作用. 在  $x-t$  平面上的点  $(0, 0)$  和  $(a, 0)$  处分别发出一个中心扩张波  $E_1(u_-, u_m)$  和中心扩张波  $E_2(u_m, u_+)$ , 其中

$$E_1(u_-, u_m) = S(u_-, u_m) \text{ 或 } S^r(u_-, u_m), \quad E_2(u_m, u_+) = R(u_m, u_+);$$

或

$$E_1(u_-, u_m) = S(u_-, u_m), \quad E_2(u_m, u_+) = S(u_m, u_+) \text{ 或 } S^r(u_m, u_+);$$



或

$$E_1(u_-, u_m) = S(u_-, u_m), \quad E_2(u_m, u_+) = S^r(u_m, u_2) \cup R(u_2, u_+);$$

或

$$E_1(u_-, u_m) = S^r(u_-, u_1) \cup R(u_1, u_m), \quad E_2(u_m, u_+) = R(u_m, u_+).$$

将  $E_1(u_-, u_m)$  中的激波表示为  $x=x_1(t)$ . 当  $E_1(u_-, u_m) = S^r(u_-, u_1) \cup R(u_1, u_m)$  和  $E_2(u_m, u_+) = R(u_m, u_+)$  时, 这两个扩张波  $E_1(u_-, u_m)$  和  $E_2(u_m, u_+)$  粘合成一个扩张波  $E = E_1(u_-, u_m) \cup R(u_m, u_+)$ ; 当  $E_1(u_-, u_m) = S(u_-, u_m)$  或  $S^r(u_-, u_m)$  时, 在有限时刻它与  $E_2(u_m, u_+)$  相碰, 相互作用结果为一扩张波, 将其生成激波仍表示为  $x=x_1(t)$ . 于是  $v(x, t)$  中的最左边第一个激波是  $x=x_1(t)(t>0)$ , 位于包括  $t$ - 轴的第一象限或位于第二象限且激波速度非正或从包括  $t$ - 轴的第一象限穿过  $t$ - 轴进入并留在第二象限. 则  $u(x, t) = v(x, t)|_{R^+ \times R^+}$  是问题 (1.1) 的弱熵解. 此时  $u(x, t)$  中初等波与边界的相互作用包括: 激波与边界相撞并被边界吸收; 中心稀疏波碰到边界并被边界部分或全部吸收 (如图 7).

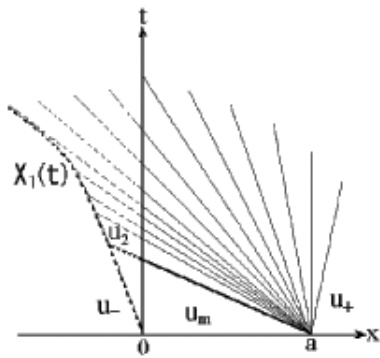


图 7

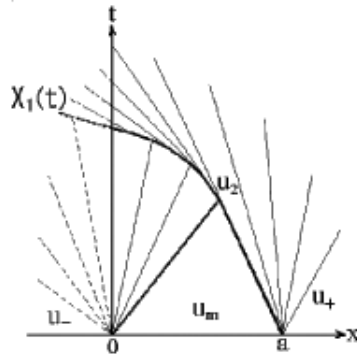


图 8

### 3.2.2 子情形 $u_m < u_-, u_+$

先考察问题 (3.1) 的弱熵解的结构. 在  $x-t$  平面上的点  $(0,0)$  和  $(a,0)$  处分别发出一个中心稀疏波  $R(u_-, u_m)$  和中心扩张波  $E(u_m, u_+)$ , 其中

$$C(u_m, u_+) = S(u_m, u_+) \text{ 或 } S^r(u_m, u_+) \text{ 或 } S^r(u_m, u_2) \cup R(u_2, u_+).$$

$E(u_m, u_+)$  中的激波, 记为  $x=x_1(t)$ , 会与其左边的中心稀疏波  $R(u_-, u_m)$  相互作用, 其生成激波, 仍记为  $x=x_1(t)$ , 右边为常状态  $u_+$  或一个稀疏波. 则  $x=x_1(t)(t>0)$  位于第一象限或从第一象限穿过  $t$ - 轴进入并留在第二象限. 令  $u(x, t) = v(x, t)|_{R^+ \times R^+}$ , 于是  $u(x, t)$  是问题 (1.1) 的弱熵解. 此时初等波与边界的相互作用结果包括: 激波被边界吸收; 稀疏波 (不一定是中心的) 被边界部分或全部吸收 (例如见图 (8)).

### 3.2.3 子情形 $u_-, u_+ < u_m$

在此子情形, 对问题 (3.1) 而言, 在  $x-t$  平面上的点  $(0,0)$  和  $(a,0)$  处分别发出一个中心扩张波  $E(u_-, u_m)$  和中心压缩波  $C(u_m, u_+)$ ,  $E(u_-, u_m)$  与  $C(u_m, u_+)$  在有限时刻相碰. 按其相互作用类型分为下列六种可能性

- (I)  $E(u_-, u_m) = R(u_-, u_m)$ ,  $C(u_m, u_+) = S(u_m, u_+)$  或  $S^r(u_m, u_+)$  或  $S^r(u_m, u_2) \cup R(u_2, u_+)$ ;  
 (II)  $E(u_-, u_m) = S(u_-, u_m)$  或  $S^r(u_-, u_m)$ ,  $C(u_m, u_+) = S(u_m, u_+)$  或  $S^r(u_m, u_+)$ ;  
 (III)  $E(u_-, u_m) = S(u_-, u_m)$  或  $S^r(u_-, u_m)$ ,  $C(u_m, u_+) = S^r(u_m, u_2) \cup R(u_2, u_+)$ ;  
 (IV)  $E(u_-, u_m) = S^r(u_-, u_1) \cup R(u_1, u_m)$ ,  $C(u_m, u_+) = S(u_m, u_+)$  或  $S^r(u_m, u_+)$ ;  
 (V)  $E(u_-, u_m) = S^r(u_-, u_1) \cup R(u_1, u_m)$ ,  $C(u_m, u_+) = S^r(u_m, u_2) \cup R(u_2, u_+)$ .

下面分别对每种相互作用类型来构造问题 (1.1) 的弱熵解.

- (I)  $E(u_-, u_m) = R(u_-, u_m)$ ,  $C(u_m, u_+) = S(u_m, u_+)$  或  $S^r(u_m, u_+)$  或  $S^r(u_m, u_2) \cup R(u_2, u_+)$ .

此时  $f''(u_-) = 0$ .  $C(u_m, u_+)$  中的激波, 记为  $x = x_1(t)$ , 会穿过  $R(u_-, u_m)$ , 且只有在  $t \rightarrow \infty$  时才能完全穿透整个  $R(u_-, u_m)$ , 其生成激波 (接触或非接触) 的右边为稀疏波 (非中心的), 仍将此生成激波表示为  $x = x_1(t)$ . 则  $x = x_1(t) (t > 0)$  从第一象限穿过  $t$ -轴进入并留在第二象限. 于是应用引理 2.3 容易验证  $u(x, t) = v(x, t)|_{R^+ \times R^+}$  是问题 (1.1) 的弱熵解.  $u(x, t)$  中初等波与边界的相互作用包括: 激波与边界相撞并被边界吸收; 稀疏波 (不一定是中心的) 碰到边界并被边界部分或全部吸收 (例如也见图 8).

- (II)  $E(u_-, u_m) = S(u_-, u_m)$  或  $S^r(u_-, u_m)$ ,  $C(u_m, u_+) = S(u_m, u_+)$  或  $S^r(u_m, u_+)$ .

此时  $u_- < u_c < u_m$ .  $E(u_-, u_m)$  与  $C(u_m, u_+)$  在某有限时刻  $t = t_*$  合并为一个新的非接触激波  $S(u_-, u_+)$  (见图 9). 将初始激波  $C(u_m, u_+)$  记为  $x = x_2(t) (0 < t < t_*)$ .

在条件  $f(u_-) \leq f(u_m)$  或  $f(u_-) > f(u_m)$ ,  $f(u_-) \geq f(u_+)$  下, 初始值问题 (3.1) 的弱熵解  $v(x, t)$  中最左边激波  $x = x_1(t) (t > 0)$  (当  $0 < t < t_*$ ,  $x = x_1(t)$  为  $E(u_-, u_m)$ ; 当  $t \geq t_*$  时,  $x = x_1(t)$  为非接触激波  $S(u_-, u_+)$ ), 分别位于包括  $t$ -轴的第一象限或第二象限且激波速度非正. 则  $u(x, t) = v(x, t)|_{R^+ \times R^+}$  为问题 (1.1) 的弱熵解,  $u(x, t)$  中初等波与边界的相互作用结果为激波被边界吸收.

在条件  $f(u_m) < f(u_-) < f(u_+)$  下, 当  $t < t_*$  时,  $v(x, t)$  中最左边第一个激波  $x = x_1(t)$  的速度为负, 当  $t > t_*$  时  $x = x_1(t)$  的速度为正. 则  $x = x_1(t) (t > 0)$  会从第二象限穿过  $t$ -轴进入第一象限. 若取  $u(x, t) = v(x, t)|_{R^+ \times R^+}$ , 则当  $t > t_1$  时这个  $u(x, t)$  不满足边界熵条件 (2.2), 其中  $t_1$  是激波  $x = x_2(t) (0 < t < t_*)$  与  $t$ -轴相交的时刻, 因而不是问题 (1.1) 的弱熵解. 下面重新构造解. 令

$$V(x, t) = \begin{cases} v(x, t), & 0 < t < t_1, \\ v_1(x, t), & t \geq t_1, \end{cases}$$

其中  $v_1(x, t)$  是初始值问题 (3.3) 的弱熵解, 则  $V(x, t)$  在点  $(0, t_1)$  处发出一个速度为正的的非接触激波  $S(u_-, u_+)$ . 由引理 2.3 能验证  $u(x, t) = V(x, t)|_{R^+ \times R^+}$  为问题 (1.1) 的弱熵解, 这个解  $u(x, t)$  中初等波与边界的相互作用为 (接触或非接触) 激波  $C(u_m, u_+)$  碰到边界, 边界同时弹回一个非接触激波  $S(u_-, u_+)$  (见图 9).

- (III)  $E(u_-, u_m) = S(u_-, u_m)$  或  $S^r(u_-, u_m)$ ,  $C(u_m, u_+) = S^r(u_m, u_2) \cup R(u_2, u_+)$ .

这时  $u_+ < u_c < u_m$ . 激波  $E(u_-, u_m)$  与右接触激波  $S^r(u_m, u_2)$  在某有限时刻  $t = t_*$  合并为一个非接触激波, 此非接触激波又穿过中心稀疏波  $R(u_2, u_+)$ , 且当  $u_+ > u_-$  时在有限时刻完全穿透整个  $R(u_2, u_+)$ , 当  $u_+ = u_-$  时只有在  $t \rightarrow \infty$  时此激波才能完全穿透整个  $R(u_m, u_2)$ , 当  $u_+ < u_-$  时此激波不能完全穿透整个  $R(u_m, u_2)$ . 此非接触激波与  $R(u_m, u_2)$  相互作用的生成激波仍为非接触激波. 将  $E(u_-, u_m)$  及其与  $C(u_m, u_+)$  相互作用的生成激波记为  $x = x_1(t)$ . 于

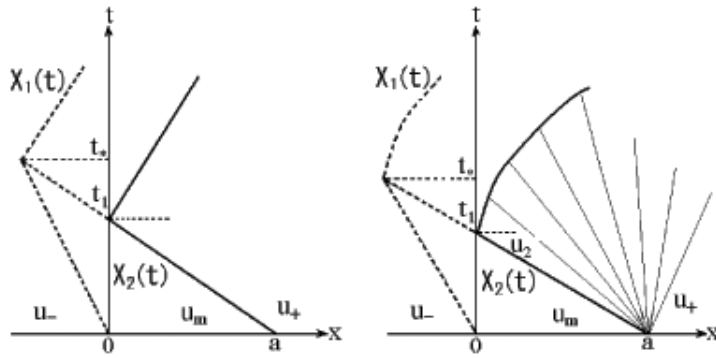


图 9

图 10

是  $x=x_1(t)(t>0)$  是问题 (3.1) 的弱熵解  $v(x, t)$  中最左边第一个激波.  $x=x_1(t)(t>0)$  的位置为以下两种: (a) 位于包括  $t$ - 轴的第一象限或位于第二象限且激波速度非正; (b) 从第二象限穿过  $t$ - 轴进入第一象限, 亦即激波速度由负变为正 (见图 10, 图 11).

当  $x=x_1(t)(t>0)$  在位置 (a) 时,  $u(x, t)=v(x, t)|_{R^+ \times R^+}$  为问题 (1.1) 的弱熵解, 且在  $u(x, t)$  中初等波与边界的相互作用包括中心稀疏波撞到边界并被边界部分或全部吸收; (接触或非接触) 激波与边界相撞并被边界吸收.

当  $x=x_1(t)(t>0)$  在位置 (b) 时, 令

$$V(x, t) = \begin{cases} v(x, t), & t < t_1, \\ v_1(x, t), & t \geq t_1, \end{cases} \quad (3.4)$$

其中  $v_1(x, t)$  是初始值问题 (3.3) 的解,  $t_1$  由以下方式决定: 如果  $f(u_-) < f(u_2)$ , 则激波  $x=x_1(t)(t>0)$  的速度当  $t < t_*$  时为负且当  $t > t_*$  时为正, 取  $t_1$  为激波  $S^r(u_m, u_2)$  (记为  $x=x_2(t)$ ) ( $0 < t < t_*$ ) 与  $t$ - 轴相交的时刻 (见图 10); 如果  $f(u_-) \geq f(u_2)$ , 则存在  $t_{**} \geq t_*$  使  $x=x_1(t)$  在  $t < t_{**}$  时速度为负, 在  $t=t_{**}$  时速度为零, 在  $t_{**}$  的某个去心右邻域内速度为正, 这时, 取  $t_1$  为从点  $(x_1(t_{**}), t_{**})$  往下作速度为  $f'(u(x_1(t_{**})+0, t_{**}))$  的特征与  $t$ - 轴相交的时刻 (见图 11).  $V(x, t)$  在点  $(0, t_1)$  处发出一个速度非负的非接触激波, 它将穿过其右边的中心稀疏波. 从而由引理 2.3 可验证  $u(x, t)=V(x, t)|_{R^+ \times R^+}$  是问题 (1.1) 的弱熵解 (见图 10, 图 11). 于是从图中可知,  $u(x, t)$  中初等波与边界的相互作用为一个 (接触或非接触) 激波与边界相碰, 边界同时或稍后弹回一个非接触激波.

(IV)  $E(u_-, u_m) = S^r(u_-, u_1) \cup R(u_1, u_m)$ ,  $C(u_m, u_+) = S(u_m, u_+)$  或  $S^r(u_m, u_+)$ .

此时,  $u_m > u_c$ .  $C(u_m, u_+)$  在有限时刻与  $R(u_1, u_m)$  相碰并将穿过  $R(u_1, u_m)$ .

当  $u_+ \geq u_1$  时,  $C(u_m, u_+)$  在有限时刻不能完全穿透整个  $R(u_1, u_m)$ . 此时初始值问题 (3.1) 的解  $v(x, t)$  中最左边第一个激波是初始波  $S^r(u_-, u_1)$ , 位于包括  $t$ - 轴的第一象限或位于第二象限且激波速度为负. 于是  $u(x, t)=v(x, t)|_{R^+ \times R^+}$  是问题 (3.1) 的弱熵解,  $u(x, t)$  中初等波与边界的相互作用为激波撞到边界并被边界吸收.

将  $S^r(u_-, u_1)$  记为  $x=x_1(t)$ . 当  $u_+ < u_1$  时,  $C(u_m, u_+)$  在某有限时刻  $t=t_*$  完全穿透整个  $R(u_1, u_m)$ , 其相互作用的生成激波 (接触或非接触) 的右状态是  $u_+$  或稀疏波 (非中心的). 这个生成激波仍记为  $x=x_1(t)$ , 又与  $S^r(u_-, u_1)$  在  $t=t_*$  合并成一个非接触激波. 此非接触激波

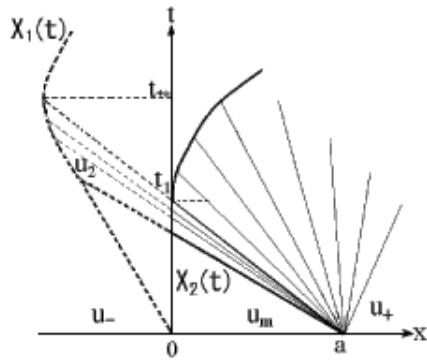


图 11

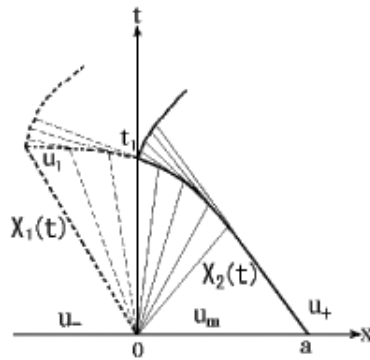


图 12

也用  $x=x_1(t)$  表示, 它会穿过其右边的稀疏波, 当  $u_+ > u_-$  时它在有限时刻完全穿透其右边的整个稀疏波, 当  $u_+ \leq u_-$  时它在有限时刻不能完全穿透其右边的整个稀疏波. 将非接触激波与其右边的稀疏波相互作用的生成激波还是记为  $x=x_1(t)$ . 于是  $x=x_1(t)(t>0)$  是问题 (3.1) 的解  $v(x, t)$  中最左边第一个激波, 其位置如下: (a) 整个  $x=x_1(t)(t>0)$  位于包括  $t$ -轴的第一象限或位于第二象限且波速非正; (b) 当  $0 < t < t_*$  时,  $x=x_1(t)$  位于第二象限且波速为负, 当  $t > t_*$ ,  $x=x_1(t)$  从第二象限穿过  $t$ -轴进入第一象限, 即存在  $t_{**} \geq t_*$ , 使  $x=x_1(t)$  的速度当  $t < t_{**}$  时为负, 当  $t > t_{**}$  时为正. (1) 当  $f(u_-) \leq f(u_1)$  或  $f(u_-) > f(u_1)$ ,  $f'(u_-) \leq 0$  或  $f(u_-) > f(u_1)$ ,  $f(u_-) \geq f(u_+)$ ,  $f'(u_+) < 0 < f'(u_-)$  时,  $x=x_1(t)(t>0)$  属于位置 (a), 令  $u(x, t) = v(x, t)|_{R^+ \times R^+}$ . (2) 当  $f(u_-) > f(u_1)$ ,  $f'(u_-) > 0$ ,  $f'(u_+) \geq 0$  或  $f(u_+) > f(u_-) > f(u_1)$ ,  $f'(u_+) < 0 < f'(u_-)$  时,  $x=x_1(t)(t>0)$  属于位置 (b), 令  $u(x, t) = V(x, t)|_{R^+ \times R^+}$ , 其中  $V(x, t)$  由 (3.4) 式给出, (3.4) 式中的  $t_1$  由下列方式决定: 若  $t_{**} = t_*$ , 则  $t_1$  是  $x=x_2(t)(0 < t < t_*)$  ( $x=x_2(t)$  由激波  $C(u_m, u_+)$  及其与  $R(u_1, u_m)$  相互作用的生成激波衔接而成) 与  $t$ -轴相交的时刻 (见图 12). 若  $t_{**} > t_*$ , 从点  $(x_1(t_{**}), t_{**})$  往下作速度为  $f'(u(x_1(t_{**})+0, t_{**}))$  的特征, 如果该特征不与  $t$ -轴相交, 则取  $t_1$  为  $x=x_2(t)(0 < t < t_*)$  与  $t$ -轴相交的时刻 (见图 13); 如果该特征与  $t$ -轴相交, 则取  $t_1$  为该特征与  $t$ -轴相交的时刻 (见图 14). 于是由引理 2.3, 以上构造的  $u(x, t)$  为问题 (1.1) 的弱熵解 (如图 12-14). 从上面解的构造过程知, 解  $u(x, t)$  中初等波与边界的相互作用为: 一个非中心稀疏波撞到边界并被边界部分或全部吸收; 一个 (接触或非接触) 激波与边界相撞并被边界吸收; 一个接触或非接触激波碰到边界, 边界同时或稍后弹回一个非接触激波 (见图 12-14).

$$(V) \quad E(u_-, u_m) = S^r(u_-, u_1) \cup R(u_1, u_m), \quad C(u_m, u_+) = S^r(u_m, u_2) \cup R(u_2, u_+).$$

这时  $u_m > u_c > u_+$ . 首先陈述初始值问题 (3.1) 的解的结构. 将  $S^r(u_m, u_2)$  表示为  $x=x_2(t)$ , 它在有限时刻与  $R(u_1, u_m)$  相碰并穿过  $R(u_1, u_m)$ , 在某有限时刻  $t=t_*$  能完全穿透整个  $R(u_1, u_m)$ , 其生成激波为右接触激波, 仍记为  $x=x_2(t)(0 < t < t_*)$ , 其右边为稀疏波 (非中心的), 它在时刻  $t=t_*$  与  $S^r(u_-, u_1)$  合并成一个非接触激波. 最后此非接触激波又穿过其右边的稀疏波, 当  $u_+ > u_-$  时, 在有限时刻能完全穿透其右边的整个稀疏波, 当  $u_+ \leq u_-$  时, 在有限时刻不能完全穿透其右边的整个稀疏波. 像情形 (IV) 一样, 初始值问题 (3.1) 的解  $v(x, t)$  中最左边第一个激波  $x=x_1(t)(t>0)$  (它由  $S^r(u_-, u_1)$  及其与右边波相互作用的生成激波衔接而成) 的位置如下: (a) 整个  $x=x_1(t)(t>0)$  位于包括  $t$ -轴的第一象限或位于第二象限且波速非正 (在

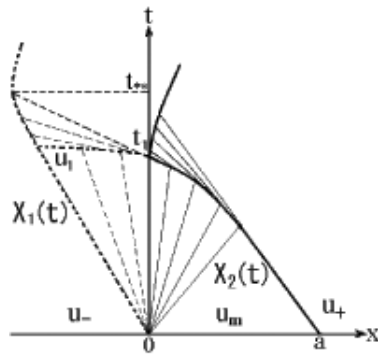


图 13

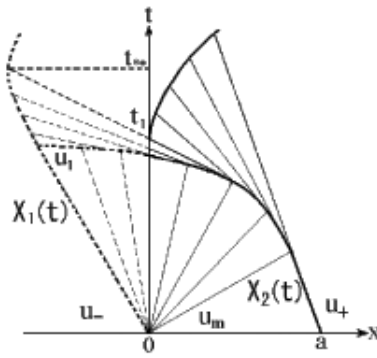


图 14

$f(u_-) \leq f(u_1)$  或  $f(u_-) > f(u_1)$ ,  $f'(u_-) \leq 0$  或  $f'(u_+) < 0 < f'(u_-)$ ,  $f(u_-) > f(u_1)$ ,  $f(u_-) \geq f(u_+)$  的条件下); (b) 当  $0 < t < t_*$  时,  $x = x_1(t)$  位于第二象限且波速为负, 当  $t > t_*$ ,  $x = x_1(t)$  从第二象限穿过  $t$ -轴进入第一象限, 即存在  $t_{**} \geq t_*$ , 使激波  $x = x_1(t)$  当  $t < t_{**}$  时速度为负, 当  $t > t_{**}$  时速度为正 (在条件  $f(u_-) > f(u_1)$ ,  $f'(u_-) > 0$ ,  $f'(u_+) \geq 0$  或  $f(u_+) > f(u_-) > f(u_1)$ ,  $f'(u_+) < 0 < f'(u_-)$ ) 下). 根据激波  $x = x_1(t)$  ( $t > 0$ ) 的位置能构造问题 (1.1) 的弱熵解, 其构造方法与情形 (IV) 相同.

从 3.1.1-3.1.3 和 3.2.1-3.2.3 的情形讨论可知, 问题 (1.1) 的弱熵解  $u(x, t)$  的构造主要依赖于初始值问题 (3.1) 的弱熵解  $v(x, t)$  中最左边第一个激波的位置, 亦即以上各种子情形中的激波  $x = x_1(t)$  ( $t > 0$ ) 的位置, 还与最左边第二个激波, 亦即以上子情形中的激波  $x = x_2(t)$  ( $0 < t < t_*$ ) 有关. 当  $x = x_1(t)$  ( $t > 0$ ) 位于  $x-t$  平面上包括  $t$ -轴的第一象限或位于第二象限且波速非正或从第一象限穿过  $t$ -轴进入并留在第二象限且波速非正时,  $u(x, t) = v(x, t)|_{R^+ \times R^+}$  为问题 (3.1) 的弱熵解; 当  $x = x_1(t)$  ( $t > 0$ ) 在某一时刻前位于第二象限且波速由负变为正, 亦即存在  $t_{**} \geq t_*$  使  $x = x_1(t)$  在  $t < t_{**}$  时速度为负, 在  $t_{**}$  的某个去心右邻域内速度为正时 ( $t_*$  出现在上文中), 不能像前面那样构造  $u(x, t)$ , 因当  $t > t_1$  时边界熵不等式 (2.2) 不成立, 需重新构造解, 这时取  $u(x, t) = V(x, t)|_{R^+ \times R^+}$ , 则这个  $u(x, t)$  为问题 (3.1) 的弱熵解, 这里  $t_1$  和  $V(x, t)$  定义在子情形 3.1.1, 3.1.3 和 3.2.3 的 (II)-(V) 中, 在子情形 3.2.3 的 (II) 或 (III) 或 (IV) 或 (V),  $t_1$  还与  $x = x_2(t)$  ( $0 < t < t_*$ ) 有关. 在  $u(x, t)$  中初等波与边界的相互作用为一个稀疏波 (不一定是中心的) 撞到边界并被边界部分或全部吸收; 中心稀疏波与边界相撞, 边界反射一个非接触或接触激波; 一个 (接触或非接触) 激波与边界相撞并被边界吸收; 一个接触或非接触激波碰到边界, 边界同时或稍后弹回一个非接触激波. 与严格凸的单个守恒律初边值问题相比, 非凸单个守恒律初边值问题的弱熵解中包括下列新的相互作用类型: 一个接触或非接触激波碰到边界, 边界弹回一个非接触激波.

注 1 由于初边值问题 (1.1) 的弱熵解的结构已澄清, 可使用类似于文 [18,28] 的分析方法证明问题 (1.1) 的弱熵解与其粘性近似解间的  $L^1$ -误差界为  $O(\sqrt{\varepsilon})$ .

注 2 本文关于非凸单个守恒律初边值问题的弱熵解的构造方法能推广到  $f$  具有一个拐点且初始值为具有有限个间断点的分段光滑函数的情形或  $f$  具有有限多个拐点且初始值为两段常数的情形.

## 参 考 文 献

- [1] Courant R and Friedrich K F. *Supersonic Flows and Shock Waves*. New York: Wiley-Interscience, 1948.
- [2] Whitham G B. *Linear and nonlinear waves*. New York: Wiley-Interscience, 1974.
- [3] Bustos M C and Concha F. On the construction of global weak solutions in the kynch theory of sedimentation. *Math. Methods in the Appl. Sci.*, 1988, **10**: 245–264.
- [4] Bustos M C, Paiva F and Wendland W L. Control of continuous sedimentation of an ideal suspension as an initial and boundary value problem. *Math. Methods in the Appl. Sci.*, 1990, **12**: 533–548.
- [5] Bustos M C, Concha F and Wendland W L. Global weak solution to the problem of continuous sedimentation of an ideal suspension. *Math. Methods in the Appl. Sci.*, 1990, **13**: 1–22.
- [6] Bustos M C, Paiva F and Wendland W L. Entropy boundary condition in the theory of sedimentation of ideal suspension. *Math. Methods in the Appl. Sci.*, 1996, **19**: 679–697.
- [7] Bardos C, Leroux A Y and Nedelec J C. First order quasilinear equations with boundary conditions. *Comm. Part. Diff. Eqs.*, 1979, **4**: 1017–1034.
- [8] Szepessy A. Measure-value solution to scalar conservation laws with boundary conditions. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1989, **139**: 181–193.
- [9] Joseph K T. Burgers equation in the quarter plane: a formula for the weak limit. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1988, **41**: 133–149.
- [10] LeFloch P G. Explicit formula for scalar nonlinear conservation laws with boundary conditions. *Math. Methods in the Appl. Sci.*, 1988, **10**: 265–287.
- [11] LeFloch P G and Nedelec J C. Explicit formula for weighted scalar nonlinear conservation laws. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1988, **308**: 667–683.
- [12] Pan Tao and Lin Longwei. The global solution of the scalar nonconvex conservation law with boundary condition I. *J. Part. Diff. Eqs.*, 1995, **8**: 371–383.
- [13] Dubotís F and LeFloch P G. Boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws. *J. Diff. Eqs.*, 1988, **8**: 93–122.
- [14] Serre D and Zumbrun K. Boundary layer stability in real vanishing viscosity limit. *Comm. Math. Phys.*, 2001, **221**: 267–292.
- [15] Joseph K T and LeFloch P G. Boundary layers in weak solutions of hyperbolic conservation laws. *Comm. Pure Appl. Anal.*, 2002, **1**: 51–76.
- [16] Joseph K T and LeFloch P G. Boundary layers in weak solutions of hyperbolic conservation laws II. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1999, **147**: 47–88.
- [17] Chen G Q and Frid H. Vanishing viscosity limit for initial-boundary value problems for conservation laws. *Contemporary Mathematics, Amer. Math. Soc.*, 2000, **238**: 35–51.
- [18] Liu Hongxia and Pan Tao.  $L^1$ -convergence rate of viscosity methods for scalar conservation laws with the interaction of elementary waves and the boundary. *Quart. Appl. Math.*, 2004, **62**: 601–621.
- [19] Liu Hongxia and Pan Tao. Interaction of elementary waves for scalar conservation laws on a bounded domain. *Math. Methods in the Appl. Sci.*, 2003, **26**: 619–632.

- [20] Ballou D P. Solutions to nonlinear hyperbolic Cauchy problems without convexity conditions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1970, **152**: 441–460.
- [21] Dafermos C M. Polygonal approximations of solutions of the initial value problem for a conservation law. *J. Diff. Eqs*, 1972, **38**: 33–41.
- [22] Dafermos C M. Regularity and large time behavior of solutions of a conservation law without convexity. *Proc. Roy. Soc. Edin.*, 1985, **99A**: 201–239.
- [23] Liu T P. Invariants and asymptotic behavior of solutions of a conservation laws. *Pro. Amer. Math. Soc.*, 1978, **71**: 227–231.
- [24] Zumbrun K. Asymptotic behavior for systems of nonconvex conservation laws. Ph. D Dissertation, New York University, 1990.
- [25] Wang J H. The asymptotic behavior of solutions of a singular conservation law. *J. Math. Anal. Appl.*, 1981, **83**: 357–376.
- [26] Hopf E. On the right weak solution of the Cauchy problem for a quasilinear equation of first order. *J. Math. Mech.*, 1969, **19**: 483–487.
- [27] Chang T and Hsiao L. The Riemann problem and interaction of wave in gas dynamics. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Harlow, Longman Sci. Techn., 1989.
- [28] Tang T, Teng Z H and Xin Z P. Fractional rate of convergence for viscous approximation to nonconvex conservation laws. *SIAM J. Math. Anal.*, 2003, **35**: 98–122.

## CONSTRUCTION OF GLOBAL WEAK ENTROPY SOLUTION OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NONCONVEX SCALAR CONSERVATION LAWS

Liu Hongxia    Pan Tao

(*Department of Mathematics, Jinan University, Guangzhou 510632*)

**Abstract** This paper is concerned with an initial-boundary problem of nonconvex scalar conservation laws with two pieces of constant initial data and constant boundary data. Under the condition that the flux function has one inflection point, by the structure of weak entropy solution of the corresponding initial value problem and the boundary entropy condition developed by Bardos-Leroux-Nedelec, we give a construction method for the global weak entropy solution of the initial-boundary value problem and clarify the solution structure nearby the boundary. In contrast to the initial-boundary value problem for strictly convex scalar conservation laws, the weak entropy solution of the initial-boundary value problem for nonconvex scalar conservation laws includes the following new interaction type: a contact or non-contact shock collides with the boundary and a new non-contact shock wave rebounds from the boundary.

**Key words** Nonconvex scalar conservation laws, initial-boundary problem, boundary entropy condition, global weak entropy solution.