系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
28(1) (2008, 1), 91–98

一类二阶常微分方程边值问题的无穷多个解*

舒 小 保

(湖南大学数学与计量经济学院， 长沙 410082)

摘要 利用变分原理和 Z_2 不变群指标研究了二阶常微分方程边值问题

$$\begin{cases} u''(t)-u(t)+f(t,u(t))=0, \quad 0<t<1, \\ u'(0)=0, \\ \alpha_1 u(1)+u'(1)=0, \end{cases}$$

(其中 $\alpha_1>-\frac{1}{2}$). 得出了这类方程存在无穷个解的充分条件.

关键词 变分原理， Z_2 不变群指标，边值问题.

MR(2000) 主题分类号 34B15, 34B05, 65K10

1 引言与预备知识

近年来，随着常微分方程理论的发展，如下形式的二阶常微分方程的边值问题引起了许多学者的重视

$$\begin{cases} u''(t)-u(t)+f(t,u(t))=0, \quad 0<t<1, \\ u'(0)=0, \\ \alpha_1 u(1)+u'(1)=0. \end{cases} \tag{1.1}$$

(其中 $\alpha_1>-\frac{1}{2}$). 但对方程 (1.1) 的研究基本上是利用锥映射不动点定理和相关方法得出方程的正解 (见文 [1,2] 等). 本文试探利用临界点定理和 Z_2 不变群指标来研究此方程. 下面简单介绍有关临界点和 Z_2 不变群指标的知识 (如文 [3,4]).

定义 1.1 如果 $x_0\in E$ 满足 $g'(x_0)=\theta$, 则 x_0 称为 g 的临界点， $g(x_0)$ 称为 g 的临界值，不是临界点的点称为 g 的正则点. 设 c 是实数，如果 $g^{-1}(c)$ 中不含临界点，则 c 称为 g 的正则值. 记 $K=\{x\in E|g'(x)=\theta\}$, $K_c=\{x\in E|g'(x)=\theta,\ g(x)=c\}$. K 称为 g 的临界集. 记 $g_c=\{x\in E|g(x)\le c\}$, g_c 称为 g 的水平集.

* 高等学校博士点专项科研基金 (20020558092), 广东省自然科学基金 (031608), 国家自然科学基金 (10471155) 和湖南省博士后科研资助专项计划 (2006FJ4249) 资助项目.

收稿日期：2005-03-10, 收到修改稿日期：2006-03-27.

定义 1.2 设 $g \in C^1(E,R)$. 如果 $\{x_n\} \subset E, g(x_n)$ 有界， $g'(x_n) \to \theta(n \to \infty)$ 蕴涵 $\{x_n\}$ 有收敛子列，则称 g 满足 Palais-Smale 条件，或简称 P.S. 条件.

定义 1.3 设 E 是实 Banach 空间，令 $\Sigma = \{A| \quad A \subset E \setminus \{\theta\}$ 是对称闭集 $\}$. 定义 $\gamma : \Sigma \to Z^+ \bigcup \{+\infty\}$ 如下

$$\gamma(A) = \begin{cases} \min\{n \in Z | \text{存在连续奇映射} \quad \varphi : A \to R^n \setminus \{\theta\}\}; \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{当} \quad A = \emptyset \quad \text{时}; \\ +\infty, \text{如果对于任意} \quad n \in Z, \ \text{不存在连续奇映射} \quad A \to R^n \setminus \{\theta\} \end{cases}$$

则称 γ 是 Σ 上的 Z_2 群的不变指标，简称亏格.

定义 1.4 称 $i_1(g) = \lim\limits_{a \to -0} \gamma(g_a)$, $i_2(g) = \lim\limits_{a \to -\infty} \gamma(g_a)$, 为 Clark 量.

引理 1.5[3] 设 $I \in C^1(X, R^1)$, 满足 P.S. 条件，偶函数，又设

(P_1) 存在 $\rho, \alpha > 0$ 以及有穷维子空间 E, 使得

$$I|_{E^\perp \cap S_\rho} \geq \alpha.$$

(P_2) 存在一列子空间 $\widetilde{E_j}, \dim(\widetilde{E_j}) = j$, 以及 $R_j > 0$ 使得

$$I(x) \leq 0 \quad \forall x \in \widetilde{E_j} \backslash B_{R_j}, \quad j = 1, 2, 3, \cdots$$

则 I 有无穷多个不同的临界点，对应着正临界值.

引理 1.6 假设 E 是一个 Hilbert 空间，序列 $\{x_n\} \subset E$ 满足 $x_n \rightharpoonup x_0$ 和 $\|x_n\| \to \|x_0\|$, 那么序列 $\{x_n\}$ 强收敛 x_0, 即 $x_n \to x_0$.

本文主要是利用引理 1.5 处理常微分方程的边值问题.

2 主要结果

定理 2.1 假设 f 满足条件

i) $f \in C([0,1] \times R, R)$;

ii) 存在实数 T, 使得 $\overline{\lim\limits_{u \to 0}} \dfrac{f(t,u)}{u} \leq T$;

iii) 存在 $\theta > 2$, $\alpha > 0$, 使得 $0 < G(t,u) = \displaystyle\int_0^u f(t,v)\mathrm{d}v \leq \frac{1}{\theta} u f(t, u(t))$, $\forall \ |u(t)| \geq \alpha$;

iv) $f(t,u)$ 关于 u 是奇函数.

那么，边值问题 (1.1) 有无穷多个不同的非平凡解.

证 问题 (1.1) 的解对应于如下泛函的临界点

$$I(u) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(|u'(t)|^2 + |u(t)|^2) - G(t,u)\right]\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\alpha_1 u^2(1), \quad u \in H_0^1(0,1), \tag{2.1}$$

这里 $G(t,u) = \int_0^u f(t,\omega)\mathrm{d}\omega$. 其中 $H_0^1(0,1)$ 是一个 Sobolev 空间，也是一个 Hilbert 空间，其内积和范数分别定义为

$$(u,v) = \int_0^1 (u'(t)v'(t) + u(t)v(t))\mathrm{d}t,$$

$$\|u\| = \Big(\int_0^1 (|u'(t)|^2 + |u(t)|^2)\mathrm{d}t \Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.2}$$

即有

$$H_0^1(0,1) = W_0^{1,2}(0,1) = \ C_0^2[0,1] \text{ 关于范数 (2.2) 完备化}.$$

记 $E = H_0^1(0,1)$, 由于 $f(t,u)$ 是关于 u 的连续奇函数，因此 $I \in C^1(E,R)$ 是关于 u 的偶泛函，且 $I(\theta) = 0$. 现在我们来说明 $I(u)$ 对应的欧拉方程就是边值系统 (1.1). 由

$$\begin{aligned} I(u+sv) = I(u) + s\Big\{ \int_0^1 [u'(t)v'(t) + u(t)v(t) - f(t, u+\theta sv)v]\mathrm{d}t + \alpha_1 u(1)v(1) \Big\} \\ + \frac{s^2}{2}\Big\{ \int_0^1 (|v'(t)|^2 + |v(t)|^2)\mathrm{d}t + \alpha_1 v^2(1) \Big\} \quad \forall u, v \in E, 0 < \theta < 1, \end{aligned} \tag{2.3}$$

可以证明

$$(I'(u), v) = \int_0^1 [u'v' + uv - f(t,u(t))v]\mathrm{d}t + \alpha_1 u(1)v(1), \quad \forall u, v \in E. \tag{2.4}$$

由 $I'(u) = 0$, 即对任意 $v \in E$ 有

$$\int_0^1 [u'v' + uv - f(t,u(t))v]\mathrm{d}t + \alpha_1 u(1)v(1) = 0, \tag{2.5}$$

另一方面，由分部积分法有

$$\int_0^1 u'(t)v'(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 u''(t)v\mathrm{d}t = v(1)u'(1) - u'(0)v(0). \tag{2.6}$$

用 (2.6) 减去 (2.5), 以及边值条件我们有

$$\int_0^1 v(u''(t) - u + f(t,u(t)))\mathrm{d}t = v(1)(u'(1) + \alpha_1 u(1)) - u'(0)v(0) = 0.$$

由变分原理不难得出

$$u''(t) - u + f(t,u(t)) = 0,$$

即 $I(u)$ 的临界点是边值问题 (1.1) 的解.

只要证明泛函

$$I(u) = \int_0^1 \Big[\frac{1}{2}(|u'(t)|^2 + |u(t)|^2) - G(t,u(t))\Big]\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\alpha_1 u^2(1), \quad u \in H_0^1(0,1)$$

有无穷多对临界点即可．现在用引理 1.5 来证明．由条件 i) 和条件 iv) 有， $I \in C^1(E,R)$ 是偶泛函，且 $I(\theta) = 0$.

把 (2.4) 写成下面的等价形式

$$\int_0^1 f(t,u(t))v\mathrm{d}t = \int_0^1 (u'v' + uv)\mathrm{d}t - (I'(u),v) + \alpha_1 u(1)v(1), \quad \forall u, v \in E. \tag{2.7}$$

首先验证 P.S. 条件. 设 $\{u_n\}\subset E$ 以及常数 c_1,c_2 满足

$$c_1\leq I(u_n)\leq c_2, \tag{2.8}$$

$$I'(u_n)\to 0 \quad (n\to\infty\text{时}). \tag{2.9}$$

把 (2.9) 写成其等价形式

$$\sup\Big\{\int_0^1[u_n'v'+u_nv-f(t,u_n(t))v]\mathrm{d}t+\alpha_1u_n(1)v(1)\Big\}\to 0,\quad \text{当 } n\to\infty, \tag{2.10}$$

其中 $u,v\in E,\|v\|=1$, 令 $\|z_n\|=\|I'(x_n)\|$, 记 $\varepsilon_n=\|z_n\|$, 那么 $\varepsilon_n\to 0$ 当 $n\to\infty$ 时.

用 u_n 代替 v, 由 (2.10) 和 (2.4), 易得

$$\|u_n\|^2=\int_0^1 f(t,u_n(t))u_n(t)\mathrm{d}t-\alpha_1u_n^2(1)+\langle z_n,u_n\rangle. \tag{2.11}$$

下面证明在条件 (2.8) 和 (2.9) 成立时, $\|u_n\|$ 是有界的.

分 2 种情形加以证明. 记 $E_1=\{t\in[0,1]||u_n(t)|\geq\alpha\}$, $E_2=[0,1]\setminus E_1$.

(A) 当 $-\frac{1}{2}<\alpha_1<0$ 时, 由条件 iii) 和 (2.7) 有

$$\begin{aligned}
I(u_n)&=\frac12\|u_n\|^2-\int_0^1G(t,u_n(t))\mathrm{d}t+\frac12\alpha_1u_n^2(1)\\
&=\frac12\|u_n\|^2-\int_{E_1}G(t,u_n(t))\mathrm{d}t-\int_{E_2}G(t,u_n(t))\mathrm{d}t+\frac12\alpha_1u_n^2(1)\\
&\geq\frac12\|u_n\|^2-\int_{E_1}\frac1\theta u_n(t)f(t,u_n(t))\mathrm{d}t-c_3+\frac12\alpha_1u_n^2(1)\\
&\geq\frac12\|u_n\|^2-\int_0^1\frac1\theta u_n(t)f(t,u_n(t))\mathrm{d}t-c_4+\frac12\alpha_1u_n^2(1)\\
&=\frac12\|u_n\|^2-\frac1\theta\Big(\int_0^1(|u_n'(t)|^2+|u_n(t)|^2)\mathrm{d}t-(I'(u_n),u_n)+\alpha_1u_n^2(1)\Big)-c_4+\frac12\alpha_1u_n^2(1)\\
&=\Big(\frac12-\frac1\theta\Big)\|u_n\|^2+\frac1\theta(I'(u_n),u_n)-c_4+\Big(\frac12-\frac1\theta\Big)\alpha_1u_n^2(1)\\
&\geq\Big(\frac12-\frac1\theta\Big)\|u_n\|^2+\frac1\theta\|I'(u_n)\|\|u_n\|-c_4+\Big(\frac12-\frac1\theta\Big)\alpha_1u_n^2(1).
\end{aligned}$$

其中常数 c_3, c_4 与下文的 c_i 均大于 0.

分 2 种情形来说明 $\{u_n\}$ 有界.

1) 当 $\max\limits_{0\leq t\leq1}|u(t)|\leq 1$ 时, 则有

$$I(u_n)\geq\Big(\frac12-\frac1\theta\Big)\|u_n\|^2+\frac1\theta\|I'(u_n)\|\|u_n\|-c_4+\Big(\frac12-\frac1\theta\Big)\alpha_1,$$

从而

$$\Big(\frac12-\frac1\theta\Big)\|u_n\|^2\leq I(u_n)-\frac1\theta\|I'(u_n)\|\|u_n\|+c_4-\Big(\frac12-\frac1\theta\Big)\alpha_1,$$

由 $\theta > 2$ 不难推出 $\{\|u_n\|\}$ 有界.

2)　当 $\max\limits_{0\le t\le 1}|u(t)| > 1$ 时，

i)　若存在 $t_0 \in [0,1]$, 使得 $u(t_0) = 0$, 那么有

$$|u(1)| = \Big|\int_{t_0}^1 u'(s)\mathrm{d}s\Big| \le \int_0^1 |u'(s)|\mathrm{d}s \le \sqrt{2}\|u\|;$$

ii)　若不存在 $t_1 \in [0,1]$, 使得 $u(t_1) = 0$, 那么由 $u(t)$ 的连续性知， $u(t) > 0$ 或 $u(t) < 0$, 对任意的 $t \in [0,1]$, 不妨设 $u(t) > 0$. 由连续性知存在 $t_2 \in [0,1]$, 使得， $u(t_2) = \min\limits_{0\le t\le 1} u(t)$. 从而有

$$u(1) - u(t_2) = \Big|\int_{t_2}^1 u'(s)\mathrm{d}s\Big| \le \int_0^1 |u'(s)|\mathrm{d}s,$$

即

$$\begin{aligned} u(1) &\le u(t_2) + \int_0^1 |u'(s)|\mathrm{d}s \le \Big(\int_0^1 u^2(t)\mathrm{d}t\Big)^{\frac12} + \Big(\int_0^1 |u'(t)|^2\mathrm{d}t\Big)^{\frac12} \\ &\le \sqrt{2}\Big(\int_0^1 u^2(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 |u'(t)|^2\mathrm{d}t\Big)^{\frac12}. \end{aligned}$$

综合 i), ii) 有

$$u^2(1) \le 2\|u\|^2,$$

从而有

$$\Big(\frac12 - \frac1\theta\Big)\alpha_1 u^2(1) \ge \Big(\frac12 - \frac1\theta\Big)2\alpha_1\|u_n\|^2$$

和

$$I(u) \ge \Big(\frac12 - \frac1\theta\Big)(1+2\alpha_1)\|u_n\|^2 - \frac1\theta\|I'(u_n)\|\|u_n\| - c_4,$$

由 (2.8) 和 (2.9), 有

$$\Big(\frac12 - \frac1\theta\Big)(1+2\alpha_1)\|u_n\|^2 \le I(u_n) + \frac1\theta\|I'(u_n)\|\|u_n\| + c_4 \le c_5\|u_n\| + c_5,$$

再由 $\theta > 2$ 和 $\alpha_1 > -\frac12$, 知序列 $\{\|u_n\|\}$ 有界．再综合 1), 2) 知当 $-\frac12 < \alpha_1 < 0$ 时，序列 $\{\|u_n\|\}$ 有界.

(B)　当 $\alpha_1 > 0$ 时，类似 (A) 的证明，不难得出

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \frac12\|u_n\|^2 - \int_0^1 G(t,u_n(t))\mathrm{d}t + \frac12\alpha_1 u_n^2(1) \\ &\ge \frac12\|u_n\|^2 - \int_0^1 \frac1\theta u_n(t)f(t,u_n(t))\mathrm{d}t + \frac12\alpha_1 u_n^2(1) - c_4 \\ &\ge \Big(\frac12 - \frac1\theta\Big)\|u_n\|^2 - \frac1\theta\|I'(u_n)\|\|u_n\| - c_4 + \Big(\frac12 - \frac1\theta\Big)\alpha_1 u_n^2(1) \\ &\ge \Big(\frac12 - \frac1\theta\Big)\|u_n\|^2 - \frac1\theta\|I'(u_n)\|\|u_n\| - c_4, \end{aligned}$$

(此处利用了 $(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})\alpha_1 u^2(1)\geq 0$) 和

$$\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\Big)\|u_n\|^2 \leq \frac{1}{\theta}\|I'(u_n)\|\|u_n\|+I(u_n)+c_4 \leq c_5\|u_n\|+c_5,$$

再由 $\theta>2$, 知序列 $\{\|u_n\|\}$ 有界. 综合 (A) 和 (B) 得出 $\{\|u_n\|\}$ 有界, 而 $E=H_0^1(0,1)$ 是自反的 Banach 空间, 从而序列 $\{u_n\}$ 在空间 $H_0^1(0,1)$ 中存在一列弱收敛子列, 不妨仍然记为 $\{u_n\}$ 为 E 中的弱收敛子列. 于是得出: 存在 $u_0\in E$, 使得当 $n\to\infty$ 时, $u_n \rightharpoonup u_0$.

而由 (2.11) 和 $\|u_n\|$ 的有界性, 我们有

$$\|u_n\|^2-\int_0^1 f(t,u_n(t))u_n\mathrm{d}t+\alpha_1 u_n^2(1)\to 0,\quad \text{当 } n\to\infty \text{ 时};$$

另一方面, 在 $H_0^1(0,1)$ 中的弱收敛序列 $\{u_n\}$, 蕴含着 $\{u_n\}$ 在空间 $C([0,1],R)$ 上一致收敛, (文 [5] 中的性质 1.2). 因此进一步有

$$\|u_n\|^2\to\int_0^1 f(t,u_0(t))u_0\mathrm{d}t-\alpha_1 u_0^2(1),\quad \text{当 } n\to\infty \text{ 时},$$

由引理 1.6 可知, 在空间 $H_0^1(0,1)$ 上 $\|u_n\|$ 是收敛的, 所以泛函 I 满足 P.S. 条件.

下面验证引理 1.5 的条件 (P_1) 和 (P_2) 成立. 首先验证条件 (P_1) 成立, 取自然数 $m^2>\max\{T,\frac{T}{1+\alpha_1}\}$, 令 $v_j(t)=\sin jt,\ j=1,2,\cdots,$ 定义 $V=\mathrm{span}\{v_1,v_2,\cdots,v_m\},\ X=V^{\perp}$. 由条件 ii), 存在 $\delta>0$, 使当 $|u|\leq\delta$, 时, 有 $|f(t,u(t))|\leq T|u|$, 选取 $\rho=\delta$, 则当 $u\in S_\rho\bigcap X$ 时

$$\|u\|_C\leq\|u\|=\rho=\delta,$$

由

$$\int_0^1|u(t)|^2\mathrm{d}t\leq\frac{1}{m^2}\int_0^1|u'(t)|^2\mathrm{d}t,$$

不难得出

$$\int_0^1|u(t)|^2\mathrm{d}t\leq\frac{\rho^2}{m^2+1},$$

从而有当 $\alpha_1\geq 0$ 时,

$$\begin{aligned}
I(u)&=\frac{1}{2}\|u\|^2-\int_0^1 G(t,u(t))\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\alpha_1 u^2(1)\\
&\geq\frac{1}{2}\|u\|^2-\int_0^1 G(t,u(t))\mathrm{d}t\\
&\geq\frac{1}{2}\rho^2-\int_0^1\Big(\int_0^{|u(t)|}Tv\mathrm{d}v\Big)\mathrm{d}t\\
&\geq\frac{1}{2}\rho^2-\frac{T}{2(m^2+1)}\rho^2\\
&=\frac{1}{2}\Big(1-\frac{T}{m^2+1}\Big)\rho^2\\
&>0.
\end{aligned}$$

当 $-\frac{1}{2}<\alpha_1<0$ 时，

$$\begin{aligned}I(u)&=\frac{1}{2}\|u\|^2-\int_0^1 G(t,u(t))\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\alpha_1 u^2(1)\\&\geq\frac{1+\alpha_1}{2}\|u\|^2-\int_0^1 G(t,u(t))\mathrm{d}t\\&\geq\frac{1+\alpha_1}{2}\rho^2-\int_0^1\Big(\int_0^{|u(t)|}Tv\mathrm{d}v\Big)\mathrm{d}t\\&\geq\frac{1+\alpha_1}{2}\rho^2-\frac{T}{2(m^2+1)}\rho^2\\&=\frac{1}{2}\Big(1+\alpha_1-\frac{T}{m^2+1}\Big)\rho^2\\&>0.\end{aligned}$$

综合上述可知 $I(u)>0,\forall u\in S_\rho\bigcap X$ 时，即引理 1.5 条件 (P_1) 成立.

最后来验证引理 1.5 条件 (P_2) 成立．由条件 iii) 知

$$G(t,u(t))\geq c_7|u|^\theta-c_8.$$

对于每个有限维子空间 $E_1\subset E$, 存在 $c_9>0$, 使得

$$\Big(\int_0^1|u(t)|^\theta\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{\theta}}\geq c_9\|u\|,\quad\forall\, u\in E_1.$$

因此，当 $u\in E_1$, 和 $-\frac{1}{2}<\alpha_1<0$ 时，有

$$\begin{aligned}I(u)&=\frac{1}{2}\|u\|^2-\int_0^1 G(t,u(t))\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\alpha_1 u^2(1)\\&\leq\frac{1}{2}\|u\|^2-\int_0^1 G(t,u(t))\mathrm{d}t\\&\leq\frac{1}{2}\|u\|^2-c_7\int_0^1|u(t)|^\theta\mathrm{d}t+c_8\\&\leq\frac{1}{2}\|u\|^2-c_7c_9^\theta\|u\|^\theta+c_8\\&=\Big(\frac{1}{2}-c_7c_9^\theta\|u\|^{\theta-2}\Big)\|u\|^2+c_8.\end{aligned}$$

$u\in E_1$, 和 $\alpha_1\geq0$ 时，有

$$\begin{aligned}I(u)&=\frac{1}{2}\|u\|^2-\int_0^1 G(t,u(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\alpha_1 u^2(1)\\&\leq\frac{1+\alpha_1}{2}\|u\|^2-c_7\int_0^1|u(t)|^\theta\mathrm{d}t+c_8\\&\leq\frac{1+\alpha_1}{2}\|u\|^2-c_7c_9^\theta\|u\|^\theta+c_8\\&=\Big(\frac{1+\alpha_1}{2}-c_7c_9^\theta\|u\|^{\theta-2}\Big)\|u\|^2+c_8,\end{aligned}$$

因此，综合上述当 $R=R(E_1)$ 充分大时，必有 $I(u)\leq 0,\quad \forall \quad u\in E_1\backslash B_R$. 即引理 1.5 条件 (P_2) 成立．从而 I 有无穷多对临界点，所以边值问题 (1.1) 有无穷多个不同的非平凡解．

参 考 文 献

[1] 张凤琴，王济荣．二阶非线性常微分方程的奇异边值问题．山西大学学报， 1995, **18**: 366–370.

[2] 马如云．一类非线性 m- 点边值问题正解的存在性．数学学报， 2003, **46**: 785–794.

[3] 张恭庆．临界点理论及其应用．上海：上海科学技术出版社， 1986.

[4] 郭大钧，孙经先，刘兆理．非线性常微分方程泛函方法．济南：山东科学技术出版社， 1995.

[5] Mawhin J and Willem M. Critical Point Theory and Hamiltonian Systems. Springer-Verlag, New York, 1989.

[6] Xu Yuantong and Guo Zhiming. Existence of periodic solutions to second-order Hamiltonian systems with potential indefinite in sign. *Nonlinear Analysis*, 2002, **51**: 1273–1283.

[7] Rabinowitz P H. Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. CBMS., Regional Conf. Series in Math., 1986, No. 65.

[8] 韩志清．共振条件下的常微分方程组 $2\pi-$ 周期解的存在性．数学学报， 2000, **43**: 639–644.

[9] 徐远通，郭志明．一种几何指标理论在泛函微分方程中的应用．数学学报， 2001, **44**: 1027–1036.

[10] Xu Yuantong. Subharmonics Solutions for convex nonautonomous Hamiltonian systems. *Nonl. Anal. T. M. A.*, 1997, **28**: 1359–1371.

INFINITELY MANY SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A CLASS OF SECOND-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

SHU Xiaobao

(*Department of Mathematics, Hunan University, Changsha* 410082)

Abstract By means of variational structure and Z_2 group index theory, infinitely many solutions of boundary value problems for second-order ordinary differential equations

$$\begin{cases} u''(t)-u(t)+f(t,u(t))=0, \quad 0<t<1,\\ u'(0)=0,\\ \alpha_1 u(1)+u'(1)=0, \end{cases}$$

are obtained, where $\alpha_1>-\frac{1}{2}$.

Key words Variational structure, Z_2 group index theory, boundary value problems.