系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
15(4) (1995, 10), 353–363

具有较高奇性的奇异边值问题的 Dirichlet 问题

刘 希 玉

(山东师范大学数学系， 济南 250014)

摘要 本文讨论一类奇异二阶常微分方程的边值问题，其中非线性项 $f(t,u)$ 在 $u=0$ 处及在 $t=0,1$ 处都具有较高的奇性. 应用现有的存在性结果无法得出这类方程的解. 利用锥上的不动点定理及解的细致先验估计得到了正解的存在性.

关键词 奇异边值问题，锥，不动点.

1 引 言

本文讨论下述方程

$$\frac{1}{p(t)}(p(t)x'(t))'+f(t,x(t))=0,\quad 0<t<1, \tag{1.1}$$

其中 $p(t)\in C[0,1]$, 而且 $0<t<1$ 时 $p(t)>0$. 所加边界条件为下列之一：

(i) $x(0)=x(1)=0$;

(ii) $x(1)=0, \lim\limits_{t\to 0}p(t)x'(t)=0$.

方程 (1.1) 连同边界条件 (i) 称为 Dirichlet 问题，其中 $f(t,u)\in C[(0,1)\times(0,\infty),(0,\infty)]$. 所谓方程 (1.1) 的解是指 $x(t)\in C[0,1]$, 当 $0<t<1$ 时 $x(t)>0$, 且满足方程及边界条件. 由于 $p(0)$ 及 $p(1)$ 可以为零， $f(t,u)$ 在 $t=0,1$ 及 $u=0$ 可能趋于无穷大，故方程 (1.1) 具有三方面的奇性. 较早讨论此类方程的有文 [1]–[3], 其中文 [1] 只讨论关于 $p(t)$ 有奇性的情形，文 [2] 限于关于 t 在 $t=0,1$ 有奇性，文 [3] 讨论 $p(t)\equiv 1$ 的特殊情况. 关于奇性程度，以非线性项为形如 $f(t,u)=t^{-\alpha}(1-t)^{-\alpha}u^{-\beta}$ 的典型方程为例，文 [3] 的结果只适合于 $\alpha=0,\beta<1$ 的情形，文 [4] 推广到可适用于 $\alpha<1,\beta<2$ 的情形，文 [5] 进一步推广到 $\alpha<2,\beta<2$. 最新的结果属于 D.O'Regan[6], 将奇性放宽至可适合于 $\alpha<1,\beta>0$ 的情形，即 u 在 $u=0$ 的奇性已不再有限制. 所用的方法为连续性定理. 本文将方程 (1.1) 转化为不同于文 [6] 采用的算子方程，应用锥上的不动点定理 [7], 将利用文 [6] 中定理得到的 "$\alpha<1,\beta>0$" 的结果改进为 $\alpha<2,\beta>0$. 所加条件较文 [6] 简单.

2 若干引理

本文主要讨论方程 (1.1) 连同边界条件 (i) 所形成的 Dirichlet 问题. 假设

$$\exists w>1,\quad \int_0^1\frac{1}{p^w(t)}\,\mathrm{d}t<\infty. \tag{2.1}$$

1993 年 4 月 13 日收到， 1993 年 11 月 3 日收到修改稿.

引进如下记号：

$$\rho=\int_0^1 \frac{1}{p(s)}\,\mathrm{d}s,\qquad \tau(t)=\int_0^t \frac{1}{p(s)}\,\mathrm{d}s,$$

$$\overline{\theta}(s)=\begin{cases}\tau(s), & 0\le s\le \frac{1}{2},\\ \tau(1)-\tau(s), & \frac{1}{2}<s\le 1,\end{cases}\qquad \theta(w,s)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^s \frac{1}{p^w(t)}\,\mathrm{d}t, & 0\le s\le \frac{1}{2},\\ \displaystyle\int_s^1 \frac{1}{p^w(t)}\,\mathrm{d}t, & \frac{1}{2}<s\le 1,\end{cases}$$

$$G(t,s)=\begin{cases}\frac{1}{\rho}[\tau(1)-\tau(t)]\tau(s), & 0\le s\le t\le 1,\\ \frac{1}{\rho}\tau(t)[\tau(1)-\tau(s)], & 0\le t\le s\le 1.\end{cases}\tag{2.2}$$

引理 2.1　Green 核满足估计：

$$G(t,s)\le \overline{\theta}(s),\quad \forall\, t,s\in[0,1].$$

证　注意 $\tau(s)$ 为增函数，当 $s\le t$ 时，有

$$G(t,s)\le \frac{1}{\rho}\tau(1)\tau(s)=\tau(s),\quad G(t,s)\le \frac{1}{\rho}[\tau(1)-\tau(s)]\tau(1)=\tau(1)-\tau(s),$$

即 $G(t,s)\le \overline{\theta}(s)$. 同理可证当 $s\ge t$ 时上述估计仍然成立.

引理 2.2　当下列问题有解时方程 (1.1) 有解.

$$\begin{cases} x(t)=(Ax)(t)=\displaystyle\int_0^1 G(t,s)p(s)f(s,x(s))\,\mathrm{d}s, & (2.3)\\ \displaystyle\int_0^1 \overline{\theta}(s)p(s)f(s,x(s))\,\mathrm{d}s<\infty. & (2.4)\end{cases}$$

证　设 $x(t)$ 是 (2.3)–(2.4) 的解，由 (2.4) 及引理 2.1 知 (2.3) 之右端有意义. 由 (2.2) 知 $x(0)=0, x(1)=0$, 即边界条件 (i) 满足. 由于

$$x(t)=\int_0^t \frac{1}{\rho}[\tau(1)-\tau(t)]\tau(s)p(s)f(s,x(s))\,\mathrm{d}s+\int_t^1 \frac{1}{\rho}\tau(t)[\tau(1)-\tau(s)]p(s)f(s,x(s))\,\mathrm{d}s,$$

当 $0<t<1$, 有

$$x'(t)=-\int_0^t \frac{1}{\rho}\tau'(t)\tau(s)p(s)f(s,x(s))\,\mathrm{d}s+\int_t^1 \frac{1}{\rho}\tau'(t)[\tau(1)-\tau(s)]p(s)f(s,x(s))\,\mathrm{d}s.$$

从而

$$(p(t)x'(t))'=-\frac{1}{\rho}f(t,x(t))\tau(t)p(t)-\frac{1}{\rho}f(t,x(t))[\tau(1)-\tau(t)]p(t),$$

即 $(px')'=-pf(t,x)$. 证毕.

引理 2.3　存在常数 $c>0$, 使得下列估计成立，

$$\overline{\theta}(s)\le c\theta(w,s),\quad G(t,s)\le c\theta(w,s),\quad \forall t,s\in[0,1].$$

证 不妨设 $0 \le s \le \frac{1}{2}$, 由于 $p(t) \in C[0,1]$, 令 $c = \max\limits_{[0,1]} p(t)^{w-1}$, 则

$$\overline{\theta}(s) = \int_0^s \frac{1}{p^w(t)} [p(t)]^{w-1} \, \mathrm{d}t \le c\theta(w,s).$$

证毕.

为讨论 (1.1) 的解，考虑下列逼近问题：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p(t)}(p(t)x'(t))' + f_n(t,x(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

其中 $f_n(t,u) = f(t, \max\{u, \frac{1}{n}\})$. 由引理 2.2 考虑算子方程：

$$x = A_n x = \int_0^1 G(t,s)p(s)f_n(s,x(s)) \, \mathrm{d}s$$

及线性算子

$$(Kx)(t) = \int_0^1 G(t,s)p(s)x(s) \, \mathrm{d}s.$$

引入加权的空间如下：设 $\sigma \ge 1$, 令：$E^\sigma = \{x(t) | x(t)$ 可测, 且 $\int_0^1 \theta(\sigma,s)p(s)|x(s)|^\sigma \, \mathrm{d}s < \infty\}$ 在 E^σ 中定义范数

$$\|x\|_{E^\sigma} = \left\{ \int_0^1 \theta(\sigma,s)p(s)|x(s)|^\sigma \, \mathrm{d}s \right\}^{\frac{1}{\sigma}},$$

易知 E^σ 为 Banach 空间. 作如下假设：

(H_0) $\exists w > 1$, 当 $x(t) \in C(0,1)$, $x(t)$ 在 $(0,1)$ 上有界，且 $\inf\limits_{(0,1)} x(t) > 0$ 时，$\int_0^1 \theta(w,s) \cdot p(s) f^w(s,x(s)) \, \mathrm{d}s < \infty$.

设 (H_0) 满足，则由 Hölder 不等式：

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \theta(w,s)p(s)f(s,x(s)) \, \mathrm{d}s \\ \le &\left\{ \int_0^1 \theta(w,s)p(s)f^w(s,x(s)) \, \mathrm{d}s \right\}^{\frac{1}{w}} \left\{ \int_0^1 \theta(w,s)p(s) \, \mathrm{d}s \right\}^{\frac{w-1}{w}} < \infty. \end{aligned} \tag{2.6}$$

引理 2.4　设条件 (H_0) 满足，则 f_n 为 Nemitskii 算子，即 $(f_n x)(t) = f_n(t,x(t))$ 有下列姓质：

i) $f_n : P \to E^w$ 连续,

ii) $f_n : P \to E^w$ 为有界算子，即将 P 中有界集映入 E^w 之有界集. 这里 $P = \{x(t) | x \in C[0,1]$, 且 $0 \le t \le 1$ 时，$x(t) \ge 0\}$, 且配以 $C[0,1]$ 之范数.

证　由于 $f_n(t,u) = f(t, \max\{u, \frac{1}{n}\})$, 故 $x \in P$ 时，$\max\{x, \frac{1}{n}\} \ge \frac{1}{n}$. 证明类似于文 [5] 中引理 2.4 及 2.6, 这里从略.

引理 2.5　算子 K: $E^w \to C[0,1]$ 连续.

证 由引理 2.1 及 2.3 及 Hölder 不等式知：

$$\begin{aligned}|(Kx)(t)| &\le \int_0^1 c\theta(w,s)p(s)|x(s)|\,\mathrm{d}s \\ &\le c\left\{\int_0^1 \theta(w,s)p(s)|x(s)|^w\,\mathrm{d}s\right\}^{\frac{1}{w}}\left\{\int_0^1 \theta(w,s)p(s)\,\mathrm{d}s\right\}^{\frac{w-1}{w}},\end{aligned}$$

故由 E^w 范数定义知 K 为有界线性 (连续) 算子. 下面只需证明 K 映 E^w 入 $C[0,1]$. 设 $x\in E^w$, 令 $y=Kx$, 则

$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{1}{\rho}\int_0^t [\tau(1)-\tau(t)]\tau(s)p(s)x(s)\,\mathrm{d}s+\frac{1}{\rho}\int_t^1 \tau(t)[\tau(1)-\tau(s)]p(s)x(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{\tau(1)}{\rho}\int_0^t \tau(s)p(s)x(s)\,\mathrm{d}s-\frac{\tau(t)}{\rho}\int_0^t \tau(s)p(s)x(s)\,\mathrm{d}s+\frac{\tau(t)}{\rho}\int_t^1 [\tau(1)-\tau(s)]p(s)x(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由于 $x\in E^w$, 可得

$$\int_0^1 \overline{\theta}(s)p(s)|x(s)|\,\mathrm{d}s \le c\int_0^1 \theta(w,s)p(s)|x(s)|\,\mathrm{d}s<\infty.$$

注意 $0<s<1$ 时 $\overline{\theta}(s)>0$, 因此 $0<t<1$ 时 $y(t)$ 连续，且

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t \tau(s)p(s)x(s)\,\mathrm{d}s=0,\quad \lim_{t\to 0}\tau(t)=0.$$

取 $t<t_1<1$, 则因 $\tau(t)$ 严格增，故

$$\begin{aligned}&\left|\tau(t)\int_t^1 [\tau(1)-\tau(s)]p(s)x(s)\,\mathrm{d}s\right| \\ &\le \int_t^{t_1} \tau(s)[\tau(1)-\tau(s)]p(s)|x(s)|\,\mathrm{d}s+\tau(t)\int_{t_1}^1 [\tau(1)-\tau(s)]p(s)|x(s)|\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

记上面两式分别为 I_1, I_2, 则

$$\begin{aligned}I_2 &\le \frac{\tau(t)}{\tau(t_1)}\int_{t_1}^1 \tau(t_1)[\tau(1)-\tau(s)]p(s)|x(s)|\,\mathrm{d}s \le \frac{\tau(t)}{\tau(t_1)}\int_{t_1}^1 \tau(s)[\tau(1)-\tau(s)]p(s)|x(s)|\,\mathrm{d}s \\ &\le \frac{\tau(t)}{\tau(t_1)}\int_0^1 \tau(s)[\tau(1)-\tau(s)]p(s)|x(s)|\,\mathrm{d}s \le \tau(1)\frac{\tau(t)}{\tau(t_1)}\int_0^1 \overline{\theta}(s)p(s)|x(s)|\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

用 τ^{-1} 表示 τ 的反函数，设 t 充分小，使 $\tau(t)<1$ 及 $\sqrt{\tau(t)}<\tau(1)$, 则令 $t_1=\tau^{-1}(\sqrt{\tau(t)})$ 有意义. 易知 $t_1>t$, 当 $t\to 0$ 时 $t_1\to 0$, 且

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tau(t)}{\tau(t_1)}=\lim_{t\to 0}\sqrt{\tau(t)}=0.$$

从而 $\lim\limits_{t\to 0} I_2=0$. 另外容易证明

$$I_1\le \tau(1)\int_0^{t_1} \tau(s)p(s)|x(s)|\,\mathrm{d}s\to 0,$$

最后 $\lim\limits_{t\to 0} y(t)=0$. 由结构的对称性完全可以证明 $\lim\limits_{t\to 1} y(t)=0$, 故 $y\in C[0,1]$. 证毕.

由引理 2.4 及 2.5 可知，算子 $A_n=Kf_n$, 将 P 映入 $C[0,1]$ 且为连续、有界算子. 下面讨论 A_n 的紧性.

引理 2.6　设 (H_0) 满足，则 A_n 全连续.

证　由引理 1.2 的证明，设 $y=A_nx$, 当 $0<t<1$ 时

$$p(t)y'(t)=-\int_0^t \frac{1}{\rho}\tau(s)p(s)f_n(s,x(s))\,\mathrm{d}s+\int_t^1 \frac{1}{\rho}[\tau(1)-\tau(s)]p(s)f_n(s,x(s))\,\mathrm{d}s.$$

由 Minkowskii 不等式

$$\begin{aligned}\left\{\int_0^1 |y'(t)|^w\,\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{w}} \le& \left\{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{p^w(t)}\left|\int_0^t \frac{1}{\rho}\tau(s)p(s)f_n(s,x)\,\mathrm{d}s\right|^w\right\}^{\frac{1}{w}}\\ &+\left\{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{p^w(t)}\left|\int_t^1 \frac{1}{\rho}[\tau(1)-\tau(s)]p(s)f_n(s,x)\,\mathrm{d}s\right|^w\right\}^{\frac{1}{w}}.\end{aligned}$$

设上式右端两项分别为 I_1,I_2, 则由 Hölder 不等式及 τ,p 的有界性

$$\begin{aligned}I_1^w &\le \frac{1}{p^w}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{p^w(t)}\int_0^t \tau(s)p(s)f_n^w(s,x)\,\mathrm{d}s\left\{\int_0^t \tau(s)p(s)\mathrm{d}s\right\}^{w-1}\\ &\le c_1\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{p^w(t)}\int_0^t \tau(s)p(s)f_n^w(s,x)\,\mathrm{d}s=c_1\int_0^1 \tau(s)p(s)\left[\int_s^1 \frac{\mathrm{d}t}{p^w(t)}\right]f_n^w(s,x)\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中 c_1 为常数. 以下用 $c_1,c_2,\cdots,c_5$ 表示常数，由引理 2.3 知

$$\begin{aligned}I_1^w &\le c_2\int_0^{\frac{1}{2}} \tau(s)p(s)f_n^w(s,x)\,\mathrm{d}s+c_1\int_{\frac{1}{2}}^1 \tau(1)p(s)\theta(w,s)f_n^w(s,x)\,\mathrm{d}s\\ &\le [c_2c+c_1\tau(1)]\int_0^1 \theta(w,s)p(s)f_n^w(s,x)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由结构的对称性同理可证明

$$I_2^w\le c_3\int_0^1 \theta(w,s)p(s)f_n^w(s,x)\,\mathrm{d}s,$$

故有常数 $c_4>0$ 使

$$\left\{\int_0^1 |y'(t)|^w\,\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{w}}\le c_4\int_0^t \theta(w,s)p(s)f_n^w(s,x)\,\mathrm{d}s.$$

设 $x_m\in P$ 且有界，则由引理 2.4 及引理 2.5 知，$y_m=A_nx_m$ 在 $C[0,1]$ 中有界. 再由引理 2.4 知有 c_5 与 m 无关，

$$\left\{\int_0^1 |y_m'(t)|^w\,\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{w}}\le c_5.$$

由此利用典型的分析方法可以证明 $\{y_m(t)\}$ 等度连续，从略. 最后，由 Arzela 定理 $\{y_m\}$ 有收敛子列. 故 A_n 紧. 证毕.

下面讨论逼近方程 (2.5) 解的存在性. 以下总假设 $\alpha(t),\varphi(u)$ 为某两函数，且 $\alpha\in C(0,1),\varphi\in C(0,\infty)$, 当 $0<t<1$ 及 $u>0$ 时 $\alpha(t)>0,\varphi(u)>0$, 且有

(H_1) $f(t,u) \le \alpha(t)\varphi(u), \quad 0<t<1, u>0$,

(H_2) $\exists w>1$, 满足 $\int_0^1 \theta(w,s)p(s)\alpha^w(s)\,\mathrm{d}s<\infty$.

对照条件 (H_0) 容易证明当 (H_1), (H_2) 满足时 (H_0) 成立.

引理 2.7 设 (H_1), (H_2) 满足，再设

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u}\varphi(u)=0, \tag{2.7}$$

则 n 充分大时方程 (2.5) 有解.

证 由引理 2.6 知， $A_n: P\to P$ 全连续. 设 T 充分大， $u\ge T$ 时， $\varphi(u)\le \varepsilon u$. 设 $x\in P$, $\|x\|>\frac{1}{n}$, 则由引理 2.3, 记 $y_n(t)=\max\{\frac{1}{n},x(t)\}$, 则 $\|y_n\|\le\|x\|$,

$$\begin{aligned}(A_nx)(t)&=\int_0^1 G(t,s)p(s)f_n(s,x(s))\,\mathrm{d}s\le c\int_0^1\theta(w,s)p(s)\alpha(s)\varphi(y_n)\,\mathrm{d}s\\&\le\varepsilon c\int_0^1\theta(w,s)p(s)\alpha(s)y_n(s)\,\mathrm{d}s+c\int_{y_n\le T}\theta(w,s)p(s)\alpha(s)\varphi(y_n)\,\mathrm{d}s\\&\le c\left\{\max_{[\frac{1}{n},T]}\varphi(u)\right\}\int_0^1\theta(w,s)p(s)\alpha(s)\,\mathrm{d}s+\varepsilon c\|x\|\int_0^1\theta(w,s)p(s)\alpha(s)\,\mathrm{d}s\\&\le\left\{c\max_{[\frac{1}{n},T]}\varphi(u)+\varepsilon c\|x\|\right\}\left\{\int_0^1\theta(w,s)p(s)\alpha^w(s)\,\mathrm{d}s\right\}^{\frac{1}{w}}\left\{\int_0^1\theta p\right\}^{1-\frac{1}{w}}\\&\le c_1[c_2+\varepsilon c\|x\|],\end{aligned}$$

其中 c_1,c_2 为常数，且与 x 无关. 取 $\varepsilon cc_1<1$, 则由上式知

$$\lim_{\|x\|\to\infty}\frac{\|A_nx\|}{\|x\|}=\varepsilon cc_1<1.$$

故可取 R 充分大，当 $\|x\|\ge R$ 时， $\|A_nx\|<\|x\|$. 由锥压缩不动点定理 [7] 知 A_n 有不动点. 再由引理 2.2 得证.

引理 2.8 设引理 2.7 条件满足，则存在与 n 无关的常数 $R>0$, 使 (2.5) 的每一解满足 $0\le x(t)\le R$.

证 设 $x(t)$ 是 (2.5) 的解，则 $0<t<1$ 时

$$(p(t)x'(t))'=-p(t)f_n(t,x(t))<0. \tag{2.8}$$

设 $\|x\|=x(t_0)$, 则 $0<t_0<1$, 且 $x'(t_0)=0$, 故由 (2.8) 式知， $0<t<t_0$ 时， $p(t)x'(t)>0$; $t_0<t<1$ 时， $p(t)x'(t)<0$, 即 $0<t<t_0$ 时， $x'(t)>0$; $t_0<t<1$ 时， $x'(t)<0$. 由 (2.7) 式，取 $T>0$, $u\ge T$ 时， $\varphi(u)<\varepsilon u$. 不妨设 $\|x\|>T$. 取 $0<t_1<t_0<t_2<1$, 满足 $x(t_1)=T$, $x(t_2)=T$. 则

$$\begin{cases} t\in(0,t_1)\bigcup(t_2,1) \quad \text{时}, \quad x(t)<T,\\ t\in[t_1,t_2] \quad \text{时}, \quad x(t)\ge T.\end{cases} \tag{2.9}$$

先设 $t_1\le t<t_0$, 不妨设， $T>1\ge\frac{1}{n}$, 则

$$-(px')'=pf\left(t,\max\left\{\frac{1}{n},x\right\}\right)\le\varepsilon p(t)\alpha(t)x(t).$$

在 $[t,t_0]$ 上积分得

$$p(t)x'(t) \le \varepsilon \int_t^{t_0} p(s)\alpha(s)x(s)\,\mathrm{d}s \le \varepsilon\|x\| \int_t^{t_0} p(s)\alpha(s)\,\mathrm{d}s.$$

在 $[t_1,t_0]$ 上积分得

$$x(t_0)-x(t_1) \le \varepsilon\|x\| \int_{t_1}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{p(t)} \int_t^{t_0} p(s)\alpha(s)\,\mathrm{d}s = \varepsilon\|x\| \int_{t_1}^{t_0} p(s)\alpha(s)\left[\int_{t_1}^{s} \frac{\mathrm{d}t}{p(t)}\right]\mathrm{d}s.$$

设 $t_0 \le \frac{1}{2}$, 则由上式得

$$x(t_0)-x(t_1) \le \varepsilon\|x\| \int_{t_1}^{t_0} p(s)\alpha(s)\overline{\theta}(s)\,\mathrm{d}s \le \varepsilon c\|x\| \int_0^{\frac{1}{2}} \theta(w,s)p(s)\alpha(s)\,\mathrm{d}s \le c_1\varepsilon\|x\|.$$

上式最后利用 Hölder 不等式及 (H_2), 其中 c_1 与 n 无关. 最后,

$$\|x\| = x(t_0) \le T + c_1\varepsilon\|x\|. \tag{2.10}$$

若 $t_0 \ge \frac{1}{2}$, 则令 $t_0 \le t \le t_2$, 同样有

$$-(px')' \le \varepsilon p\alpha x, \qquad -px' \le \varepsilon \int_{t_0}^{t} p\alpha x\,\mathrm{d}s,$$

$$\begin{aligned} x(t_0)-x(t_2) &\le \varepsilon\|x\| \int_{t_0}^{t_2} \frac{\mathrm{d}t}{p(t)} \int_{t_0}^{t} p(s)\alpha(s)\,\mathrm{d}s = \varepsilon\|x\| \int_{t_0}^{t_2} p(s)\alpha(s)\left[\int_{s}^{t_2} \frac{\mathrm{d}t}{p(t)}\right]\mathrm{d}s \\ &\le \varepsilon\|x\| \int_{t_0}^{t_2} \overline{\theta}(s)p(s)\alpha(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

最后同样可以证得 (2.10) 式. 故由 (2.10) 式, 事先选取充分小的 $\varepsilon > 0$, 使得 $\varepsilon c_1 < 1$, 则得 $\|x\| \le T/(1-\varepsilon c_1)$, 令 $R = t/(1-\varepsilon c_1)$, 则 R 与 n 无关, 证毕.

下面为了得出导数的先验估计, 需对函数 $\varphi(u)$ 作些技术处理. 总假设 (H_1), (H_2) 及 (2.7) 式成立. 首先由 (H_1) 的形式, 不妨假设

$$\varphi(u) \ge 1, \quad 0 < u < \infty. \tag{2.11}$$

否则用 $\varphi(u)+1$ 代替 $\varphi(u)$ 即可. 然后令 $a(u) = \frac{1}{u}\varphi(u)$, 则 $a(u) \in C(0,\infty)$, 而且当 $0 < u \le 1$ 时 $a(u) \ge 1$,

$$\lim_{u\to\infty} a(u) = 0, \tag{2.12}$$

作 $b(u) = \sup\limits_{u \le v < \infty} a(v)$, 易知 $u > 0$ 时, $b(u) > 0$, 定义

$$T(u) = \int_0^u \frac{1}{b(v)}\,dv, \quad u \ge 0. \tag{2.13}$$

引理 2.9　函数 $b(u), T(u)$ 满足, $b(u) \in C(0,\infty), T(u) \in C[0,\infty)$, 且 $b(u)$ 关于 u 单调下降, $T(u)$ 关于 u 严格单调增加, 同时

i) $\lim\limits_{u\to\infty} T(u) = \infty$;

ii) $\varphi(u) \le b(u)u, \quad u > 0.$

证 $b(u)$ 的连续性可如下来证. 因 $a(u)>0$. 由 (2.12) 式, 取 $M_1>u_0+1$, 使 $v\geq M_1$ 时, $a(v)<a(u_0)$, 则 $b(u_0)=\sup\limits_{u_0\leq v\leq M_1}a(v)$, 故存在 $u_1\in[u_0,M_1], b(u_0)=a(u_1)$. 设 $\delta<\frac{1}{2}u_0$, 取 R 充分大, 使 $v\geq R$ 时, $a(v)<\min\limits_{u_0-\delta\leq t\leq u_0+\delta}a(t)$, 则 $|u-u_0|<\delta$ 时, $b(u)=\sup\limits_{[u,R]}a(v)$. 再按通常的分析方法即可证得, $b\in C(0,\infty)$. 再由 (2.11) 式, $0<w\leq 1$ 时 $b(u)\geq 1$, 故知 $T\in C[0,\infty)$. 证毕.

引理 2.10 设 (H_1), (H_2) 及 (2.7) 式成立, 且

(H_3) $\forall M>0$, $\exists\psi\in C[0,1],\exists t_0\in(0,1)$, 使 $\psi(t_0)>0$, 且 $f(t,u)\geq\psi(t)\geq 0$, $t\in(0,1)$, $u\in(0,M]$.

则存在函数 $x^*\in C[0,1]$, 满足 $t\in(0,1)$ 时, $x^*(t)>0$, 且 (2.5) 的每一解 $x(t)$, 均有 $x(t)\geq x^*(t), t\in(0,1)$.

证 由引理 2.8 知, $0\leq x(t)\leq R$, 取 $M=R+1$, 而 $\psi(t)$ 是由 (H_3) 所确定的函数. 这时,

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)p(s)f\left(s,\max\left\{\frac{1}{n},x\right\}\right)\mathrm{d}s\geq\int_0^1 G(t,s)p(s)\psi(s)\,\mathrm{d}s\triangleq x^*(t),$$

由于 $t\in(0,1), s\in(0,1)$ 时 $G(t,s)>0, p(s)>0$, 故 $t\in(0,1)$ 时, $x^*(t)>0$. 证毕.

引理 2.11 设引理 2.10 条件满足, $x(t)$ 是 (2.5) 的解. 记 t_x^0 为 $x(t)$ 达到最大值的点, 即 $x(t_x^0)=\|x\|$, 则存在与 n 无关的常数 $\eta\in(0,\frac{1}{2})$, 满足: $\eta\leq t_x^0\leq 1-\eta$.

证 反证法. 取一列解 x_n, 而且与之相对应的 $t_{x_n}^0$ (简记为 t_n^0), 使 $t_n^0\to 0$ 或 1, 不妨设 $t_n^0\to 0$, 且对所有的 $n\geq 1$ 均有 $t_n^0<\frac{1}{2}$. 由 $x_n(0)=0$ 知 $0<t_n^0<\frac{1}{2}$. 又由引理 2.10 知, $x_n(t)\geq x^*(t)$, 从而 $\|x_n\|\geq\|x^*\|$. 由引理 2.8 知, $\|x_n\|$ 有界, 故不妨设

$$\|x_n\|\to c_0>0. \tag{2.14}$$

由引理 2.8 的证明知, 当 $0<t<t_n^0$ 时, $x_n(t)$ 关于 t 增加. 再由引理 2.9 知, 当 $t\in(0,t_n^0)$ 时,

$$\begin{aligned}-(p(t)x_n'(t))'&\leq p(t)\alpha(t)\varphi(\max\{\tfrac{1}{n},x_n\})\\&\leq p(t)\alpha(t)b(\max\{\tfrac{1}{n},x_n\})(\|x_n\|+1)\leq(R+1)p(t)\alpha(t)b(x_n).\end{aligned}$$

在 $[t,t_n^0]$ 上积分得

$$0<p(t)x_n'(t)\leq(R+1)\int_t^{t_n^0}p(s)\alpha(s)b(x_n(s))\,\mathrm{d}s\leq(R+1)b(x_n(t))\int_t^{t_n^0}p(s)\alpha(s)\,\mathrm{d}s.$$

作 $z_n(t)=T(x_n(t))$, ($T(u)$ 见 (2.13) 式), 则

$$z_n'(t)=T'(x_n)x_n'(t)\leq\frac{R+1}{p(t)}\int_t^{t_n^0}p(s)\alpha(s)\,\mathrm{d}s.$$

在 $[0,t_n^0]$ 上积分, 利用 $z_n(0)=T(0)=0$, 可得

$$\begin{aligned}z_n(t_n^0)&\leq(R+1)\int_t^{t_n^0}\frac{\mathrm{d}t}{p(t)}\int_t^{t_n^0}p(s)\alpha(s)\,\mathrm{d}s=(R+1)\int_0^{t_n^0}p(s)\alpha(s)\overline{\theta}(s)\,\mathrm{d}s\\&\leq c(R+1)\int_0^{t_n^0}p(s)\alpha(s)\theta(w,s)\,\mathrm{d}s\leq c_1\left\{\int_0^{t_n^0}p(s)\theta(w,s)\alpha^w(s)\,\mathrm{d}s\right\}^{\frac{1}{w}}.\end{aligned}$$

由 (H_2) 知右端积分收敛. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n(t_n^0)=\lim\limits_{n\to\infty} T(\|x_n\|)=T(c_0)\le 0$. 这与 (2.14) 中 $c_0>0$ 矛盾. 证毕.

引理 2.12　设 (H_1), (H_2), (H_3) 及 (2.7) 式满足，则存在与 n 无关的常数 $M>0$, 使得对方程 (2.5) 的每一解 $x(t)$ 有

$$\int_0^1\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(x(t))\right|^w \mathrm{d}t\le M.$$

证　按照引理 2.11 的记号，记 $z(t)=T(x(t))$, 则 $t_x^0\in[\eta,1-\eta]$. 设 $t\in(0,t_x^0)$, 以下为了记号简单将 t_x^0 记为 t^0. 类似引理 2.11 可得

$$0<p(t)x'(t)\le\int_t^{t^0}p(s)\alpha(s)b(s)(R+1)\,\mathrm{d}s,$$

$$0<z'(t)\le\frac{R+1}{p(t)}\int_t^{t^0}p(s)\alpha(s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{t^0}|z'(t)|^w\,\mathrm{d}t&\le(R+1)^w\int_0^{t^0}\frac{\mathrm{d}t}{p^w(t)}\left|\int_t^{t^0}p(s)\alpha(s)\,\mathrm{d}s\right|^w\\&\le(R+1)^w\int_0^{t^0}p(s)\alpha^w(s)\,\mathrm{d}s\int_0^s\frac{\mathrm{d}t}{p^w(t)}\left\{\int_0^1p(t)\,\mathrm{d}t\right\}^{w-1}\\&\le(R+1)^wc_1\int_0^\eta p(s)\alpha^w(s)\theta(w,s)\,\mathrm{d}s\\&\quad+(R+1)^wc_1\int_\eta^{1-\eta}p(s)\alpha^w(s)\,\mathrm{d}s\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{p^w(t)}\triangleq M\end{aligned}$$

与 n 无关. 设 $t^0<t<1$, 由于 $x(t)$ 在 $[t^0,t]$ 减，同样

$$0<-p(t)x'(t)\le\int_{t^0}^tp(s)\alpha(s)b(x)(R+1)\,\mathrm{d}s\le b(x(t))\int_{t^0}^tp(s)\alpha(s)(R+1)\,\mathrm{d}s,$$

故

$$0<-z'(t)\le(R+1)\int_{t^0}^tp\alpha\,\mathrm{d}s,$$

$$\begin{aligned}\int_{t^0}^1|z'(t)|^w\,\mathrm{d}t&\le(R+1)^wc_1\int_{t^0}^1p(s)\alpha^w(s)\,\mathrm{d}s\int_s^1\frac{\mathrm{d}t}{p^w(t)}\\&\le(R+1)^wc_1\int_{1-\eta}^1p(s)\alpha^w(s)\theta(w,s)\,\mathrm{d}s\\&\quad+(R+1)^wc_1\int_\eta^{1-\eta}p(s)\alpha^w(s)\,\mathrm{d}s\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{p^w(t)}.\end{aligned}$$

证毕.

3　主要结果

定理 3.1　设 (H_1), (H_2), (H_3), (2.7) 式满足，则方程 (1.1) 连同边界条件 (i) 存在正解.

证 由引理 2.7, 方程 (2.5) 存在解 $x_n(t)$, 由引理 2.8, $0 \le x_n(t) \le R$. 设 $z_n = T(x_n)$, 则 z_n 有界. 由引理 2.12 知, $\{z_n(t)\}$ 一致有界, 同等连续, 设 $z_n \to z_0$, 由引理 2.9, $T(u)$ 的反函数 $T^{-1}(u) \in C[0,\infty)$, 令 $x_0 = T^{-1}(z_0)$, 则 $\|x_n - x_0\|_c \to 0$. 下证 x_0 即为方程 (1.1) 的解. 由引理 2.10, 知 $x_0(t) \ge x^*(t)$, 故 $t \in (0,1)$ 时 $x_0(t) > 0$, 而 $x_n(0) = x_n(1) = 0$, 故 $x_0(0) = x_0(1) = 0$, 即边界条件满足. 由 (2.15) 式, 取 $t = \eta$ 则

$$0 < z_n'(\eta) \le \frac{(R+1)}{p(\eta)} \int_\eta^{1-\eta} p(s)\alpha(s)\,\mathrm{d}s.$$

从而不妨设 $\{z_n'(\eta)\}$ 收敛, 因此

$$x_n'(\eta) = \frac{1}{T'(x_n(\eta))} z_n'(\eta) \to \overline{x}.$$

由方程 (2.5), 设 $0 < t < 1$, 则有

$$p(t)x_n'(t) - p(\eta)x_n'(\eta) = -\int_\eta^t p(s)f(s, \max\{\frac{1}{n}, x_n\}\,\mathrm{d}s,$$

故

$$x_n'(t) = \frac{p(\eta)}{p(t)}x_n'(\eta) - \frac{1}{p(t)}\int_\eta^t p(s)f(s, \max\{\frac{1}{n}, x_n\})\,\mathrm{d}s,$$

$$x_n(t) = x_n(\eta) + \int_\eta^t \frac{p(\eta)x_n'(\eta)}{p(t)}\,\mathrm{d}t - \int_\eta^t \frac{\mathrm{d}t}{p(t)}\int_\eta^t pf(s, \max\{\frac{1}{n}, x_n\})\,\mathrm{d}s.$$

在 $[\eta, t]$ 内, $x_n(t) \ge x^*(t) \ge m > 0$, 令 $n \to \infty$ 得

$$x_0(t) = x_0(\eta) + \int_\eta^t \frac{p(\eta)}{p(t)}\overline{x}\,\mathrm{d}t - \int_\eta^t \frac{\mathrm{d}t}{p(t)}\int_\eta^t pf(s, x_0)\,\mathrm{d}s.$$

故有, $(px_0')' = -pf(s, x_0)$. 证毕.

推论 3.2 设 $t \in (0,1), u \in (0,\infty)$ 时, $p(t) = t^\beta(1-t)^\beta$, 且

$$f(t,u) \le ct^{-\alpha}(1-t)^{-\alpha}\varphi(u), \tag{3.1}$$

则当 $\beta \in (0,1), \alpha \in (0,2)$ 时, 条件 (H_1), (H_2) 满足.

证 显然 $\int_0^1 \frac{1}{p(t)}\,\mathrm{d}t < \infty$. 取 $w > 1$, 使 $\beta w < 1$, 及 $2 - \alpha w + \beta(1-w) > 0$, 则 $\int_0^1 \frac{1}{p^w(t)}\,\mathrm{d}t < \infty$, 而且当 $s \in (0, \frac{1}{2})$ 时,

$$\theta(w,s) = \int_0^s s^{-\beta w}(1-s)^{-\beta w}\,\mathrm{d}s \le c_1\int_0^s s^{-\beta w}\,\mathrm{d}s \le c_2 s^{1-\beta w},$$

其中 c_1, c_2 为常数, 从而

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \theta(w,s)p(s)\alpha^w(s)\,\mathrm{d}s \le c_3\int_0^{\frac{1}{2}} s^{1-\beta w}s^\beta s^{-\alpha w}\,\mathrm{d}s < \infty.$$

同理可证

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \theta(w,s)p(s)\alpha^w(s)\,\mathrm{d}s < \infty.$$

证毕.

例 下述边值问题有解，其中 $\beta \in (0,1), \alpha \in (0,2), \gamma \in (0,\infty)$.

$$\begin{cases} x'' + \frac{\beta}{t}x' + t^{-\alpha}(1-t)^{-\alpha}x^{-\gamma} = 0, \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases}$$

注 由文 [6] 中定理 3.3 知上述问题当 $\alpha \in (0,1)$ 时有解，但 $\alpha \in (1,2)$ 时无法用文 [6] 的结论得出解，故本文结果比文 [6] 广泛.

参 考 文 献

[1] Dunninger and Kurtz, Existence of solution for some nonlinear singular boundary value problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 1986, **115**(2): 396–405.

[2] Bobisud et al., Solvability of some nonlinear boundary value problems. *Nonl. Anal.*, 1988, **12**(9): 855–869.

[3] Gatica, J. A. et al., Singular nonlinear boundary value problems for second order ordinary differential equations. *J. Diff. Eqs.*, 1989, **79**(1): 62–78.

[4] O'Regan, D., Singular second order boundary value problems. *Nonl. Anal.*, 1990, **65**(12): 1097–1109.

[5] 刘希玉. 混合高阶奇异边值问题. 山东师大学报，待发表.

[6] O'Regan, D., Some existence principle and some general results for singular nonlinear two point boundary value problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 1992, **166**(1): 24–40.

[7] 郭大钧. 非线性泛函分析. 济南：山东科技出版社， 1985 年.

SINGULAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH HIGHER SINGULARITY

LIU XI-YU

(*Shandong Normal University, Jinan* 250014)

Abstract This paper deals with a kind of singular boundary value problem for second order ordinary differential equations, where the nonlinear term $f(t,u)$ has higher singularity at $u=0$ and at $t=0,1$. The existence results already in use are, however, not valid in obtaining solutions to equations of this sort. By applying fixed point theorems on cones and a priori bounds of solutions we get the existence of positive solutions.

Key words Singular BVP, cones, fixed points.