系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
28(1) (2008, 1), 9–15

Liénard 型方程周期边值问题解的存在唯一性

李维国 陈金海

(中国石油大学数学与计算科学学院， 东营 257061)

摘要 给出了下列方程

$$u''(t)+f(u,t)u'(t)+g(u,t)=e(t)$$

边值问题周期解的存在唯一性问题的一些新的判定条件.

关键词 整体反函数定理， Liénard 型方程，周期解，存在唯一性.

MR(2000) 主题分类号 34B15, 34L05, 47E05

1 引 言

本文主要讨论下列方程

$$u''(t)+f(u,t)u'(t)+g(u,t)=e(t) \tag{1.1}$$

在区间 $[0,2\pi]$ 上的周期边值问题解的存在唯一性，即

$$u(0)-u(2\pi)=u'(0)-u'(2\pi)=0, \tag{1.2}$$

其中 $g(u,t):R\times R\to R$ 是关于 u 连续可微，关于 t 连续且以 2π 为周期的连续函数. $f(t),e(t):R\to R$ 为关于 t 连续且以 2π 为周期. 关于上述方程周期解的存在性，多解性已有丰富的结果[1−10]. 研究问题的基本方法有相平面分析法[3]; 重合度理论；上下解方法[2,6−7], 这类方法给出的结论常常是至少有几解，难以获得解的精确个数.

Duffing 型方程周期解的存在唯一性方面有代表性的工作是由 Mawhin, Reissig, Lazer 在非共振条件下给出一系列结论[4,7−8], 1997 年李维国与沈祖和 [5] 构造性地证明了

$$u''(t)+Cu'(t)+g(u,t)=e(t) \tag{1.3}$$

在满足条件 (1.2) 下的周期解的存在唯一性问题，其中 C 为常数，即若存在两个几乎处处连续的实函数 $a(t)$, $b(t)$ 使得

$$n^2\le a(t)\le g'_u(u,t)\le b(t)\le (n+1)^2, \tag{1.4}$$

收稿日期：2005-05-31, 收到修改稿日期：2006-10-09.

且在 $[0,2\pi]$ 的一个正测集上 $a(t)>n^2$, $b(t)<(n+1)^2$, 方程 (1.3) 存在唯一的 2π 周期解. 本文首先利用文 [11] 的方法给出方程 (1.1) 结合边界条件 (1.2) 下的周期解的存在唯一性条件，然后对所得结论进行了推广.

我们的证明方法不同于文 [2–10] 的方法，而结果是文 [1–10] 的推广. 在第 4 节我们给出实例说明这种推广是实质性的.

2 引　理

设 X,Y 为 Banach 空间，其中范数不加区分地都记作 $\|\cdot\|$, $R^{n\times n}$ 和 R^n 分别表示 n 阶实方阵和 n 维实向量.

引理 1[10]　设 $T:X\to Y$ 是连续 Fréchet 可微映射，假定对一切 $x\in X$, T 的 Fréchet 微商 $T'(x)$ 都是 X 到 Y 上的线性同胚. 记

$$\zeta(R)=\inf_{x\in X,\|x\|<R}\frac{1}{\|[T'(x)]^{-1}\|},\tag{2.1}$$

如果 $\int_0^{+\infty}\zeta(R)\mathrm{d}R=+\infty$, 那么 T 是 X 到 Y 的同胚.

由引理 1, 可得如下结论成立.

引理 2[1]　设 $L:\mathrm{Dom}(L)\in X\to Y$ 是线性稠密算子，设 $N:\mathrm{Dom}(L)\in X\to Y$ 是连续 Fréchet 可微映射， $K>0$ 使得 $\forall u\in\mathrm{Dom}(L)$, $\|N'(u)\|>K$. 若 $L+N'(u)$ 对于任意 $u\in\mathrm{Dom}(L)$ 可逆，且存在常数 $C>0$ 使得 $\|[L+N'(u)]^{-1}\|\le C$, 则 $L+N$ 是 $\mathrm{Dom}(L)$ 到 Y 上的同胚.

引理 3　设 $A_i\in R^{n\times n}, i=1,2,\cdots,k$ 均为对称阵，则

$$\prod_{i=1}^k\min\sigma(A_i)\le\left|\lambda\left(\prod_{i=1}^kA_i\right)\right|\le\prod_{i=1}^k\max\sigma(A_i),\tag{2.2}$$

其中 $\sigma(A_i)$ 表示 A_i 的奇异值， $\lambda\left(\prod\limits_{i=1}^kA_i\right)$ 表示 $\prod\limits_{i=1}^kA_i$ 的特征值.

证　由矩阵范数不等式 $\rho(A_i)\le\|A_i\|=\max\sigma(A_i)$, 其中 $\rho(A_i)$ 表示 A_i 的谱半径，可知

$$\rho\left(\prod_{i=1}^kA\right)\le\left\|\left(\prod_{i=1}^kA_i\right)\right\|\le\prod_{i=1}^k\|A_i\|=\prod_{i=1}^k\max\sigma(A_i).$$

若 $A_i\in R^{n\times n}, i=1,2,\cdots,k$ 中至少有一个为奇异矩阵，则结论成立.

若 $A_i\in R^{n\times n}, i=1,2,\cdots,k$ 均可逆，则

$$\rho\left(\left(\prod_{i=1}^kA\right)^{-1}\right)\le\left\|\left(\prod_{i=1}^kA\right)^{-1}\right\|\le\prod_{i=1}^k\|A_i^{-1}\|=\prod_{i=1}^k\max\sigma(A_i^{-1}).$$

结合上两式即有结论成立.

引理 4[12]　设 $A(t):[0,2\pi]\to R^{n\times n}$ 连续，对任意连续的 $r(t):[0,2\pi]\to R^n$, 系统

$$w'(t)=A(t)w(t)+r(t),\quad w(0)=w(2\pi)\tag{2.3}$$

存在唯一解的充要条件是 $I-W(2\pi)$ 可逆，这里 $W(t)$ 是相应的齐次方程

$$W'(t)=A(t)W(t),\quad W(0)=I$$

的基本解矩阵，$I\in R^{n\times n}$ 为单位阵. 且系统 (2.3) 的解为

$$w(t)=W(t)\left\{[I-W(2\pi)]^{-1}W(2\pi)\int_0^{2\pi}W^{-1}(s)r(s)\mathrm{d}s+\int_0^t W^{-1}(s)r(s)\mathrm{d}s\right\}.$$

3 主要结论

令 $C_{[0,2\pi]}$ 表示 $[0,2\pi]$ 上的连续函数空间，$C^2_{[0,2\pi]}=\left\{w|[0,2\pi]\to R^2\text{且 } w \text{ 连续}\right\}$, $\widehat{C}^2_{[0,2\pi]}=\left\{w\in C^2_{[0,2\pi]}|w(0)=w(2\pi)\right\}$.

定理 1 若存在常数 $a>0$, $\varepsilon_1<0$, 使得

$$\int_0^{2\pi}\left[-f+\sqrt{(f-2a)^2+(-g'_u+f'_t+a(f-a)+1)^2}\right]\mathrm{d}t\le\varepsilon_1,\quad\forall\, u\in C_{[0,2\pi]};\tag{3.1}$$

或者存在常数 $a<0$, $\varepsilon_2>0$, 使得

$$\int_0^{2\pi}\left[-f-\sqrt{(f-2a)^2+(-g'_u+f'_t+a(f-a)+1)^2}\right]\mathrm{d}t\ge\varepsilon_2,\quad\forall\, u\in C_{[0,2\pi]}\tag{3.2}$$

成立，则问题 (1.1) 和 (1.2) 存在唯一周期解.

证 令 $F(u,t)=\int_0^u f(s,t)\mathrm{d}s-au$, 并作变换 $x=u$, $y=u'+F(u,t)$, 则系统 (1.1) 等价于

$$\begin{cases}x'=-F(x,t)+y,\\ y'=-g(x,t)+\displaystyle\int_0^x f'_t(s,t)\mathrm{d}s+a(F(x,t)-y)+e(t).\end{cases}\tag{3.3}$$

设 $w=(x,y)^{\mathrm{T}}$, $E(t)=(0,e(t))^{\mathrm{T}}$, 及其

$$M(w,t)=\begin{pmatrix}-F(x,t)+y\\ -g(u,t)+\int_0^x f'_t(s,t)\mathrm{d}s+a(F(x,t)-y)+e(t)\end{pmatrix}.$$

则 (1.1) 和 (1.2) 等价于

$$\begin{cases}w'=M(w,t)+E(t),\\ w(0)=w(2\pi).\end{cases}\tag{3.4}$$

记 $M(w,t)$ 关于 w 的导数

$$A(w,t)=\frac{\partial M(w,t)}{\partial w}=\begin{pmatrix}-f+a & 1\\ -g'_u+f'_t(x,t)+a(f-a) & -a\end{pmatrix}.\tag{3.5}$$

任取固定的 $w_0\in C^2_{[0,2\pi]}$, 考虑线性系统

$$\begin{cases} w'(t) = A(w_0,t)w + E(t), \\ w(0) = w(2\pi), \end{cases} \tag{3.6}$$

及其对应的齐次方程

$$\begin{cases} W'(t) = A(w_0,t)W(t), \\ W(0) = I. \end{cases} \tag{3.7}$$

设 $Lw = -w'$, $N : C^2_{[0,2\pi]} \to C^2_{[0,2\pi]}$, $(Nw)t = A(w(t),t)$, 由 $f(u,t), g(u,t)$ 的连续性知：$A(w(t),t)$ 在 w 点连续 Fréchet 可导，且存在常数 $K>0$ 使得 $\forall\, w \in C^2_{[0,2\pi]}$, $\left\|\frac{\partial A}{\partial w}(w,t)\right\| \le K$, 故 $\forall\, w,v \in C^2_{[0,2\pi]}$

$$(N'(w)v)\,t = \frac{\partial A}{\partial w}(w,t)v(t),$$

因此 $N(w)$ 连续可导，且 $\forall\, w \in C^2_{[0,2\pi]}$, $\|N'(w)\| \le K$, 故系统 (3.6) 等价于

$$[L + N'(w_0)]\,w = -E(t), \quad w \in \widehat{C}^2_{[0,2\pi]}. \tag{3.8}$$

因此若可以证明 $I - W(2\pi)$ 可逆，就可以应用引理 2 和引理 4, 类似于文 [11] 中定理 2 的证明，得到 (1.1) 和 (1.2) 周期解存在唯一性证明.

下面我们证明，若 (3.1) 和 (3.2) 成立，则 $I - W(2\pi)$ 可逆且 $\|(I - W(2\pi))^{-1}\| \le C$, 其中 $C > 0$ 为常数.

将 $[0,2\pi]$ 区间 n 等分，每个子区间长度 $h = \frac{2\pi}{n}$, 分点 $t_j = jh, j = 0,1,2,\cdots,n$, (3.7) 的离散方程为

$$\frac{W(t_{j+1}) - W(t_j)}{h} = A(w_0(t_j),t_j)W(t_j), \quad j = 0,1,2,\cdots,n-1,$$

由此得

$$W(t_n) = \prod_{j=0}^{n-1}(I + A(w_0(t_j),t_jh)),$$

因此当 $h \to 0$ 时， $W(t_n) = W(2\pi)$.

接着估计 $W(t_n)$ 的特征值. 设 $A^{\mathrm{T}}(w_0(t_j),t_j) + A(w_0(t_j),t_j)$ 的特征值为 $\lambda(t_j)$, $j = 0,1,2,\cdots,n-1$, 由 (3.5) 知,

$$A^{\mathrm{T}}(w_0(t_j),t_j) + A(w_0(t_j),t_j) = \begin{pmatrix} 2(-f+a) & -g'_u + f' + a(f-a) + 1 \\ -g'_u + f' + a(f-a) + 1 & -2a \end{pmatrix}.$$

于是

$$\lambda(t_j) = -f \pm \sqrt{(f-2a)^2 + (-g'_u + f'_t + a(f-a) + 1)^2}. \tag{3.9}$$

再设 $\mu(t_j)$ 是 $(I + A(w_0(t_j),t_j))^{\mathrm{T}}\,(I + A(w_0(t_j),t_j))$ 的特征值，由

$$\begin{aligned} &\big(I + A(w_0(t_j),t_j)\big)^{\mathrm{T}}\big(I + A(w_0(t_j),t_j)\big) \\ &= I + \big(A^{\mathrm{T}}\big(w_0(t_j),t_j\big) + A\big(w_0(t_j),t_j\big)\big)h + A^{\mathrm{T}}\big(w_0(t_j),t_j\big)A\big(w_0(t_j),t_j\big)h^2 \end{aligned}$$

知，当 h 充分小时，h 的平方项可忽略．因此 $\mu(t_j)=1+\lambda(t_j)h+O(h^2)$. 同时

$$\max\lambda(t_j)=-f+\sqrt{(f-2a)^2+(-g'_u+f'_t+a(f-a)+1)^2},$$

$$\min\lambda(t_j)=-f-\sqrt{(f-2a)^2+(-g'_u+f'_t+a(f-a)+1)^2}.$$

若条件 (3.1) 成立，结合引理 3, 并令 $h\to 0$,

$$\begin{aligned}
|\lambda(W_n)| &\le \prod_{j=0}^{n-1}\max\sigma(I+A(w_0(t_j),t_j))\\
&\le \prod_{j=0}^{n-1}(1+\max\lambda(t_j)h+O(h^2))^{\frac{1}{2}}\\
&=\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\max\lambda(t_j)h\right)+O(h)\\
&=\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[-f+\sqrt{(f-2a)^2+(-g'_u+f'_t+a(f-a)+1)^2}\right]\mathrm{d}t\right)\\
&\le \exp\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right)<1.
\end{aligned}\tag{3.10}$$

同理，若条件 (3.2) 成立，结合引理 3, 并令 $h\to 0$, 可有

$$\begin{aligned}
|\lambda(W_n)| &\ge \prod_{j=0}^{n-1}\min\sigma(I+A(w_0(t_j),t_j))\\
&\ge \prod_{j=0}^{n-1}(1+\min\lambda(t_j)h+O(h^2))^{\frac{1}{2}}\\
&=\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\min\lambda(t_j)h\right)+O(h)\\
&=\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[-f-\sqrt{(f-2a)^2+(-g'_u+f'_t+a(f-a)+1)^2}\right]\mathrm{d}t\right)\\
&\ge \exp\left(\frac{\varepsilon_2}{2}\right)>1.
\end{aligned}\tag{3.11}$$

由 (3.10) 和 (3.11) 式知,当 $h\to 0$ 时, $I-W(2\pi)$ 可逆且存在常数 $C>0$ 使得 $\|(I-W(2\pi))^{-1}\|\le C$.

问题 (1.1) 和 (1.2) 中 $f(u,t)=C$ 常数时，应用定理 1 可有下述关于 Duffing 方程 (1.3) 在满足边值条件 (1.2) 下的解的存在唯一性结论.

推论 1　若存在常数 $a>0$, $\varepsilon_1<0$, 使得

$$\int_0^{2\pi}\left[-C+\sqrt{(C-2a)^2+(-g'_u+a(C-a)+1)^2}\right]\mathrm{d}t\le\varepsilon_1,\quad \forall\, u\in C_{[0,2\pi]},\tag{3.12}$$

或者存在常数 $a < 0$, $\varepsilon_2 > 0$, 使得

$$\int_0^{2\pi} \left[-C - \sqrt{(C-2a)^2 + (-g'_u + a(C-a)+1)^2}\right] \mathrm{d}t \geq \varepsilon_2, \quad \forall\, u \in C_{[0,2\pi]} \tag{3.13}$$

成立, 则问题 (1.3),(1.2) 存在唯一周期解.

4 例 子

例 1 考虑微分方程

$$u'' + (2 + \sin^2 t + 3u^2)u' + 2u + u\sin^2 t + u^3 = e(t), \tag{4.1}$$

其中 $e(t)$ 为任意以 2π 为周期的函数.

取 $a = 1 > 0$, 通过计算可得, 对于任意的 $u(t)$,

$$-f + \sqrt{(f-2a)^2 + [1 + a(f-a) - g'_u]^2} = -f + \sqrt{(f-2)^2 + [f - g'_u]^2} = -2 < 0.$$

容易验证方程 (4.1) 满足 (3.1), 从而由定理 1 知适合此条件的微分方程 (4.1) 有唯一的 2π 周期解, 但方程 (4.1) 并不满足条件 (1.5), 故我们不能从文 [1,5,10] 来判断此微分方程解的存在唯一性.

参 考 文 献

[1] Brown K J and Lin S S. Periodically perturbed conservative systems and a globle inverse function theorem. *Nonlinear Anal.*, 1980, **4**(1): 193–201.

[2] Cheng W W. Generalized upper and low solution method for the forced Duffing equation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1997, **125**(2): 397–406.

[3] Ding T, Iannacci B and Zanolin F. Existence and multiplicity results for periodic solution of semilinear Duffing equation. *J. Diff. Equs.*, 1993, **105**: 364–409.

[4] Lazer A C and Mckenna P J. On the existence of stable periodic solution of differential equation of Duffing type. *Pro. Amer. Math. Soc.*, 1990, **110**(1): 125–133.

[5] Li W G and Shen Z H. The constructive proof for the existence of the periodic solutions of the Duffing equation. *Chinese Sci. Bull*, 1997, **42**: 1591–1594.

[6] Mawhin J. Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems. CBMS-Regional Conf. Math. No. 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979.

[7] Mawhin J and Ward J R. Nonuniform nonresonance conditions at the two first eigenvalue for periodic solution of forced Liénard and Duffing equations. *Rocky Mountain J. Math.*, 1982, **12**(4): 643–654.

[8] Reissig R. Contractive Mapping and Periodic Perturbed Nonconsevative system, Nonlinear Differential Equation of High Order. Groningen: Norrdhoff Leyden, 1974, 73–87.

[9] Wang Z H. Periodic solutions of Liénard differential equations with subquadratic potential conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, 2001, **256**: 127–141.

[10] 李树杰，冯德兴．共振下一类常微分方程组周期解的唯一存在性．系统科学与数学， 1986, **6**(2): 241–246.
[11] 王文，沈祖和．广义 Liénard 方程周期解的存在唯一性．应用泛函分析学报， 2005, **7**(3): 234–240.
[12] Coddington E and Levinson N. Theory of Ordinary Differential Equations, International Series in Pure and Applied. New York, McGraw-Hill, 1995.

UNIQUE EXISTENCE OF SOLUTION TO BOUNDARY VALUE PROBLEM OF LIÉNARD TYPE EQUATIONS

LI Weiguo　　CHEN Jinhai

(*School of Mathematics and Computational Sciences, China University of Petroleum, Dongying* 257061)

Abstract In this paper the unique solvability of the periodic solution to the following boundary value problem

$$u''(t) + f(u,t)u'(t) + g(u,t) = e(t)$$

with suitable periodic boundary conditions is considered.

Key words Global inverse function theorem, Liénard type equation, periodic solution, unique existence.