系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
15(2) (1995,4), 175—185

Banach 空间中 Moore-Penrose 广义逆与不适定边值问题*

王 玉 文 李 志 伟
(哈尔滨师范大学，150080) (首都师范大学，北京 100037)

摘要 设 X,Y 为 Banach 空间，$D(A)\subset X$，$A:D(A)\to Y$ 为具有闭值域的闭稠定线性算子. 本文不假设 A 具有"定义域可分解"条件[18]，引入 A 的 Moore-Penrose 广义逆 A^+. 与 M. Z. Nashed 引入的不同，A^+ 一般非线性. 本文在空间 X，Y 的一定几何框架下，证得 A^+ 的存在唯一性、极小性、连续性，并给出了线性的充要条件，便于将 A^+ 应用于方程、优化、控制等问题.

作为应用，本文第二部分利用 Moore-Penrose 广义逆讨论空间 $L^p(\Omega)$ $\left(1<p<\frac{2n}{n-2}\right)$ 中一类不适定的边值问题. 在另文，给出广义逆在控制论中的应用.

关键词 Moore-Penrose 广义逆，Banach 空间，对偶映射，不适定边值问题.

1 引 言

众所周知，矩阵的广义逆为矩阵论的重要内容，这就导致对 Hilbert 空间中线性算子引入各类广义逆的概念，并将其应用于优化、计算方法、两点边值问题（参见 J. Locker[1-4]，J. P. Aubin[5]，M. Z. Nashed[6]，J. L. Lions[7]，马吉博[20]）. Moore-Penrose 广义逆是线性算子的最重要的广义逆，具有广泛的应用价值.

从 1974 年至 1979 年，M. Z. Nashed 与 G. F. Votruba[18,19] 对 Banach 空间中"定义域可分解"的线性算子 A，利用 A 的零空间及值域上的线性投影算子引入 A 的线性 Moore-Penrose 广义逆. 王玉文[8]去掉"定义域可分解"的条件. 对 Banach 空间中有界线性算子引入广义左逆与右逆(不必为线性)，利用空间的几何性质和对偶映射，给出形式表达式. 其应用见文[9,10]. 本文在 Banach 空间中，去掉"定义域可分解"条件，利用度量投影引入线性算子的 Moore-Penrose 广义逆，与 M. Z. Nashed 所引入的不同，此广义逆一般为非线性算子，当 X,Y 为 Hilbert 空间时，两者一致. 在自反、严格凸 Banach 空间中，利用 Banach 空间的几何性质，研究了 Moore-Penrose 广义逆的连续性、线性、最小特征，并应用于 Banach 空间 $L^p(\Omega)$ $\left(1<p<\frac{2n}{n-2}\right)$ 中一类不适定边值问题.

---

* 国家自然科学基金资助项目.
1992 年 11 月 5 日收到.

2 Moore-Penrose 广义逆

2.1 定义与引理

设X为 Banach 空间，X^* 为其对偶空间，$\langle x, x^*\rangle$ 为 $x^*\in X^*$ 在 $x\in X$ 处的值. Banach 空间的光滑、严格凸、H性质等概念请参见文[12].

定义 2.1[11] 设X为 Banach 空间，集值映射

$$F_X(x)=\{x^*\in X^*;\langle x,x^*\rangle=\|x\|^2=\|x^*\|^2\},x\in X,$$

称为X的对偶映射.

引理 2.2[11] F_X 具有性质:

1) F_X 为齐次的;

2) F_X 为单值的当且仅当X光滑;

3) F_X 为满射的当且仅当X自反;

4) F_X 为单射的当且仅当X严格凸;

5) F_X 为可加的当且仅当X为 Hilbert 空间.

注 若 $X=L^p(\Omega)$ $(1<p<\infty)$, 则

$$F_X(u)(x)=\begin{cases}\dfrac{|u(x)|^{p-1}\mathrm{sgn}u(x)}{\|u\|^{p-2}}, & u\neq\theta,\\ \theta, & u=\theta.\end{cases}$$

定义 2.3 设X为 Banach 空间，C为X中闭凸集，集值映射 $\pi(C;\cdot):X\to C$.

$$x\longmapsto\pi(C;x)=\{u\in C;\|u-x\|=\inf_{v\in C}\|v-x\|\},$$

称为从X到C上的度量投影，

引理 2.4[11] i) 对X中任意闭凸集中，$\pi(C;x)\neq\phi$ $(x\in X)$，当且仅当X是自反的;

ii) 对X中任意闭凸集 C,$\pi(C;x)$ $(x\in X)$ 至多为单点集当且仅当X严格凸.

引理 2.5[2] 设X为 Banach 空间，C为X中闭凸集，$x\in X$，$u\in C$，则 $u\in\pi(C;x)$ 当且仅当存在 $x^*\in X^*$，使得

i) $\|x^*\|=\|u-x\|$;

ii) $\langle v-x, x^*\rangle\geqslant\|u-x\|^2$, $v\in C$.

引理 2.6[13] 若X自反，严格凸且有H性质，C为X中闭凸集，则 $\pi(C;\cdot):X\to C$ 为连续的.

下面给出一个有用的引理，它是 Hilbert 空间中正交分解定理的推广.

引理 2.7 设X为自反 Banach 空间，C为X中非空闭凸锥，则对任意 $x\in X$，存在 $x_0\in\pi(C;x)$，$x_1\in F_X^{-1}(C^0)$ 满足

$$x=x_0+x_1;$$

其中 $C^0=\{x^*\in X^*;\langle x,x^*\rangle\leqslant 0,x\in C\}$. 若$X$又为严格凸，则上述分解式唯一.

证 对于 $x\in X$，因X自反，故 $\pi(C;x)\neq\emptyset$，取 $x_0\in\pi(C;x)$，由引理 2.5，存在

$x^* \in X^*$ 满足

$$\|x^*\| = \|x_0 - x\|, \text{ 且 } \langle v - x, x^* \rangle \geqslant \|x_0 - x\|^2, v \in C. \tag{2.1}$$

在(2.1)式中取 $v = x_0$，有

$$\langle x_0 - x, x^* \rangle = \|x_0 - x\|^2 = \|x^*\|^2. \tag{2.2}$$

由定义 2.1，$x^* \in F_X(x_0 - x)$，i.e. $x_0 - x \in F_X^{-1}(x^*)$，令 $x_1 = x - x_0$. 则

$$-x_1 \in F_X^{-1}(x^*), \text{ 且 } x = x_0 + x_1.$$

由(2.1),(2.2),有

$$\langle v - x, x^* \rangle \geqslant \|x_0 - x\|^2 = \langle x_0 - x, x^* \rangle.$$

因而

$$\langle v - x_0, x^* \rangle \geqslant 0, \ v \in C. \tag{2.3}$$

由于 $x_0 \in C$，且C为锥，故 $-x^* \in C^0$.

由引理 2.2，$F_X^{-1} = F_{X^*}$. 为齐次的，于是 $F_X^{-1}(-x^*) = -F_X^{-1}(x^*)$,

$$x_1 \in -F_X^{-1}(x^*) = F_X^{-1}(-x^*) \subset F_X^{-1}(C^0).$$

若X严格凸，则 $\pi(C;x)$ 为单点集，分解式唯一.

推论 2.8（广义正交分解定理） 设X自反，M为X的闭子空间，则对于 $x \in X$，有分解式

$$x = x_0 + x_1.$$

这里 $x_0 \in \pi(M;x), x_1 \in F_X^{-1}(M^\perp), M^\perp = \{x^* \in X^*, \langle x, x^* \rangle = 0, x \in M\}$.

若X又是严格凸的，则分解式唯一.

证　因M是线性的，则 $M^0 = M^\perp$.

定义 2.9　设 X, Y 为 Banach 空间，$D(A) \subset X$，$R(A) \subset Y, A: D(A) \to R(A)$ 是线性算子，$K(A) = \{x \in D(A);\ Ax = \theta\}$，若 $\pi(R(A);\cdot)$、$\pi(K(A);\cdot)$ 存在且为单值的，存在单值算子 $A^+: Y \to D(A)$ 满足:

(i) $AA^+A = A$;　　　　(ii) $A^+AA^+ = A^+$;

(iii) $AA^+ = \pi(R(A);\cdot)$;　　　　(iv) $A^+A = I_{D(A)} - \pi(K(A);\cdot)$.

则称 A^+ 为A的 Moore-Penrose 广义逆.

注 2.12　若 X, Y 为 Hilbert 空间，定义 2.9 与文[4,6]中相应定义一致.

注 2.13　若 $R(A) = Y$，则 (iii) 变为

(iii)′　$AA^+ = I_Y$.

此时 A^+ 叫A的广义投影右逆[8]. 若 $K(A) = \{\theta\}$，则 (iv) 为

(iv)′　$A^+A = I_{D(A)}$.

此时 A^+ 叫A的广义投影左逆[8]，并记为 A^-. 若 $R(A) = Y$，且 $K(A) = \{\theta\}$，则 (iii)′, (iv)′ 成立，A^+ 恰为A的逆 A^{-1}.

2.2 Moore-Penrose 广义逆的最小特征.

定理 2.10　若 X, Y 自反严格凸，A为闭值域闭稠定线性算子，则 $A^+: Y \to D(A)$ 唯一存在且

$$A^+y = \pi(A^{-1}\pi(R(A);y);\theta), \ y \in Y.$$

这里 $A^{-1}\pi(R(A);y) = \{x \in D(A); Ax = \pi(R(A);y)\}$.

证　(i) A^+ 的存在性：

因 $R(A)$ 是自反严格凸空间 Y 中闭子空间，则对 $y\in Y$，唯一存在 $\pi(R(A);y)$. 又因 A 为闭线性算子，故 $A^{-1}\pi(R(A);y)$ 为 X 的闭凸子集，从而由 X 的自反严格凸性，唯一存在 $\pi(A^{-1}(R(A);y);\theta)$.

定义算子 $A^+:Y\to D(A)$,

$$y\longmapsto A^+y=\pi(A^{-1}\pi(R(A);y);\theta),\ \ y\in p,$$

经简单的计算，便知 A^+ 满足定义 2.9 中 (i),(ii),(iii). 下只需证 (iv) 成立.

因 A 为闭线性的，故 $K(A)$ 为自反严格凸空间 X 的闭子空间. 对于 $x\in D(A)$，由推论 2.8，唯一存在 $x_1\in F_X^{-1}(K(A)^\perp)$，满足

$$x=\pi(K(A);x)+x_1. \tag{2.4}$$

从而 $Ax=Ax_1$, i.e. $x_1\in A^{-1}Ax$.

对于任意 $x'\in A^{-1}Ax$，有 $x'-x_1\in K(A)$. 令 $x_0=x'-x_1$，则 $x'=x_0+x_1$ 且 $x_0\in K(A)$.

取 $x_1^*\in F_X(x_1)\cap K(A)^\perp$，则

$$\langle x^1,x_1^*\rangle=\langle x_1,x_1^*\rangle+\langle x_0,x_1^*\rangle=\|x_1^*\|^2=\|x_1\|^2.$$

于是

$$\|x_1\|^2\leqslant\|x'\|\|x_1^*\|\leqslant\|x'\|\|x_1\|.$$

i.e. $\|x_1\|\leqslant\|x'\|$. 换言之，$x_1\in\pi(A^{-1}Ax;\theta)$，又因为 X 严格凸，从而有

$$x_1=\pi(A^{-1}Ax;\theta). \tag{2.5}$$

于是由(2.4),(2.5)得

$$\begin{aligned}A^+Ax&=\pi(A^{-1}\pi(R(A);Ax);\theta)\\&=\pi(A^{-1}Ax;\theta)\\&=x-\pi(K(A);x),\qquad x\in D(A),\end{aligned}$$

由定义 2.9，A^+ 为 A 的 Moore-Penrose 广义逆.

(ii) A^+ 的唯一性

设 A^+ 为 A 的任意 Moore-Penrose 广义逆，只需要证明

$$A^+y=\pi(A^{-1}\pi(R(A);y);\theta),\ \ y\in Y,$$

对于 $y\in Y$，令 $x=A^+y$，由定义 2.11 中 (iii) 知

$$Ax=AA^+y=\pi(R(A);y)\ \text{i.e.},$$
$$x\in A^{-1}\pi(R(A);y). \tag{2.6}$$

对于任意 $x'\in A^{-1}\pi(R(A);y)$

$$x'-x\in K(A). \tag{2.7}$$

另一方面，由定义 2.9 中 (ii),(iv) 得

$$x=A^+y=A^+AA^+y=A^+Ax=x-\pi(K(A);x).$$

从而 $\pi(K(A);x)=\theta$.

对于 $x=A^+y\in D(A)$，由推论 2.8，唯一存在 $x_1\in F_X^{-1}(K(A)^\perp)$，使

$$x=\pi(K(A);x)+x_1=x_1.$$

任取 $x^*\in F_X(x)\cap K(A)^\perp$，由(2.7)有

$$\|x\|^2 = \langle x, x^* \rangle = \langle x', x^* \rangle \leqslant \|x'\|\|x\|, x' \in A^{-1}\pi(R(A); y)$$

从而由 X 的严格凸性定义

$$A^+y = x = \pi(A^{-1}\pi(R(A); y); \theta), \quad y \in Y.$$

2.3 Moore-Penrose 广义逆的连续性

定理 2.11 若 X, Y 为自反、H严格凸的 Banach 空间，A 为闭值域闭稠定线性算子，则 $A^+: Y \to D(A)$ 为连续算子.

证　由定理 2.10

$$A^+y = \pi(A^{-1}\pi(R(A); y); \theta), \quad y \in Y.$$

因为Y自反、严格凸且有 H-性质，由引理 2.6，算子 $\pi(R(A); \cdot): Y \to R(A)$ 连续. 故只需证：$y_n \in R(A)$ $(n = 0, 1, 2\cdots)$，$y_n \to y_0$ $(n \to \infty)$ 蕴涵

$$\pi(A^{-1}y_n; \theta) \to \pi(A^{-1}y_0; \theta) \quad (n \to \infty).$$

为此，在 $D(A)$ 上引入图象范数

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\| + \|Ax\|, \quad x \in D(A).$$

由于 A 为闭线性算子，故 $(D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$ 为 Banach 空间，简记为 $\widehat{D(A)}$. 因为 $R(A)$ 为 Y 的闭子空间，从而为 Banach 空间. 易知 $A: \widehat{D(A)} \to R(A)$ 为满射且连续线性的. 由开映象定理[14]，存在 $L \geqslant 1$，对任意 $y, z \in R(A)$，$x \in A^{-1}y$，存在 $w \in A^{-1}z$，满足

$$\|x - w\|_{D(A)} \leqslant L\|y - z\|. \tag{2.8}$$

从而由文[14]定理 2.2.1，真凸泛函

$$p(y) = \inf\{\|x\|_{D(A)}; x \in A^{-1}y\}, y \in D(A)$$

为下半连续的.

由于对 $y \in R(A)$，$A^+y \in A^{-1}y$，且 $\|A^+y\| \leqslant \|x\|$，$x \in A^{-1}y$，从而 $y = Ax$，且

$$\begin{aligned}\|A^+y\|_{D(A)} &= \|A^+y\| + \|AA^+y\| = \|A^+y\| + \|y\| \\ &\leqslant \|x\| + \|Ax\| = \|x\|_{D(A)}, \quad x \in A^{-1}y.\end{aligned}$$

于是 $\|A^+y\|_{D(A)} = \inf\{\|x\|_{D(A)}; x \in A^{-1}y\}$，i.e.,

$$p(y) = \|A^+y\|_{D(A)}, \quad y \in R(A). \tag{2.9}$$

在(2.8)中取 $x = A^+y, z = \theta$，则存在 $w \in A^{-1}\theta$，使

$$p(y) = \|A^+y\|_{D(A)} \leqslant \|w\|_{D(A)} + L\|y\| < \infty, \quad y \in R(A),$$

i.e. $R(A)$ 为 $p(y)$ 的有效域. 从而由 $p(y)$ 在 $R(A)$ 上的下半连续性，应用文[21]命题 3.5.3，$p(y)$ 在 $R(A)$ 上连续. 从而当 $y_n \in R(A)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$，$y_n \to y_0$ $(n \to \infty)$ 时，$\|A^+y_n\|_{D(A)} \to \|A^+y_0\|_{D(A)}$ $(n \to \infty)$. 再由 $\|\cdot\|_{D(A)}$ 的定义，$\|A^+y_n\| \to \|A^+y_0\|$ $(n \to \infty)$. 注意到 $A^+y_n = \pi(A^{-1}y_n; \theta)$ $(n = 1, 2, \cdots)$，有

$$\|\pi(A^{-1}y_n); \theta\| \to \|\pi(A^{-1}y_0); \theta\| \quad (n \to \infty).$$

令 $x_n = \pi(A^{-1}y_n; \theta)$ $(n = 0, 1, 2\cdots)$，则

$$\|x_0\| = \lim_{n \to \infty}\|x_n\|. \tag{2.10}$$

下面证

$$\|x_n - x_0\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

若上式不真，可设(必要时可取子列)

$$\|x_n - x_0\| \geqslant \varepsilon_0 > 0 \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{2.11}$$

由 $\{x_n\}$ 为自反空间 X 中的有界列,从而有子列,仍用原记号,使

$$x_n \xrightarrow{w} \bar{x} \ (n \to \infty). \tag{2.12}$$

下面证明: $\bar{x} = x_0$.

因为 $\overline{D(A)} = X$, 且 X 自反,故 A^* 有定义且 $\overline{D(A^*)} = Y^*$, 于是 A^{**} 有定义,从而

$$Ax = A^{**}x, \ x \in D(A).$$

对任意 $w^* \in D(A^*) \subset Y^*$, 有

$$\langle y_n, w^* \rangle = \langle Ax_n, w^* \rangle = \langle x_n, A^* w^* \rangle \ (n = 1, 2, \cdots).$$

令 $n \to \infty$, 由(2.12),得到

$$\langle y_0, w^* \rangle = \langle \bar{x}, A^* w^* \rangle, \ w^* \in D(A^*).$$

但 $\langle y_0, w^* \rangle = \langle x_0, A^* w^* \rangle$, 从而 $\langle x_0 - \bar{x}, A^* w^* \rangle = 0, w^* \in D(A^*)$ 由 Banach 闭值域定理[15], $x_0 - \bar{x} \in R(A^*)^{\perp} = K(A)$, 故 $\bar{x} \in A^{-1}Ax_0 = A^{-1}y_0$.

由(2.10),(2.12)及范数的弱下半连续性.

$$\|\bar{x}\| \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \|x_n\| = \lim_{n \to \infty} \|x_n\| = \|x_0\|.$$

又因 X 严格凸, $A^{-1}y_0$ 中最小范数元唯一,从而 $\bar{x} = x_0$. 由(2.12),得

$$x_n \xrightarrow{w} x_0 \ (n \to \infty). \tag{2.13}$$

因为 X 具有H性质,(2.10),(2.13)蕴涵.

$$\|x_n - x_0\| \to 0 \ (n \to \infty),$$

这与(2.11)矛盾.

推论 2.12 若 X 自反、H严格凸, Y 为 Banach 空间, $R(A) = Y$, 则 $A^+ : Y \to D(A)$ 连续. 这里 A 与定理 2.11 相同.

推论 2.13 若 X 为 Banach 空间, Y 自反、H严格凸, A 为闭值域闭稠定线性算子且 $K(A) = \{\theta\}$. 则 $A^- : Y \to D(A)$ 连续.

证 $A: \widehat{D(A)} \to R(A)$ 为 1-1 有界线性算子, 由逆算子定理, $A^{-1}: R(A) \to \widehat{D(A)}$ 连续,从而由引理 2.6 $A^- = A^- \pi(R(A); \cdot): Y \to D(A)$ 连续.

2.4 Moore-Penrose 广义逆的线性

定理 2.14 设 X, Y 自反、严格凸, A 为闭值域闭稠定线性算子,则

(i) $A^+ = A_0^{-1}\pi(R(A); \cdot)$,

这里 A_0 为 A 在 $D(A_0)$ 上的限制. $D(A_0) = D(A) \cap F_X^{-1}(K(A))^{\perp}$;

(ii) A^+ 为线性算子当且仅当 $\pi(R(A); \cdot)$ 为线性算子且 $D(A) \cap F_X^{-1}(K(A)^{\perp})$ 为线性子空间.

证 (i) 由定理 2.10,只需证 A_0 为 1-1 的且

$$A_0^{-1}y = \pi(A^{-1}y; \theta), y \in R(A).$$

设 x_1、$x_2 \in D(A_0)$, 使 $Ax_1 = Ax_2$, 于是 $x_1 - x_2 \in K(A)$, 且 $F_X(x_1)$、$F_X(x_2) \in K(A)^{\perp}$, 从而

$$\langle x_1 - x_2, F_X(x_1) - F_X(x_2) \rangle = 0.$$

因为 X 为严格凸的，故 F_X 为严格单调算子或单射[11]，故 $x_1 = x_2$, i.e. A_0 为 1-1.

对于 $y \in R(A), A_0^{-1}y \in A^{-1}y$，于是对任意 $x \in A^{-1}y$,

$$A_0^{-1}y - x \in K(A).$$

因为 $A_0^{-1}y \in D(A) \cap F_X^{-1}(K(A)^{\perp})$，故

$$F_X(A_0^{-1}y) \in K(A)^{\perp}.$$

于是由对偶映射的定义

$$\begin{aligned}\|A_0^{-1}y\|^2 &= \langle A_0^{-1}y, F_X(A_0^{-1}y)\rangle \\ &= \langle A_0^{-1}y - x, F_X(A_0^{-1}y)\rangle + \langle x, F_X(A_0^{-1}y)\rangle \\ &= \langle x, F_X(A_0^{-1}y)\rangle \leqslant \|x\|\|A_0^{-1}y\|,\end{aligned}$$

i.e. $\|A_0^{-1}y\| \leqslant \|x\|, x \in A^{-1}y$. 因为 X 自反、严格凸，$A^{-1}y$ 为 X 中闭凸集，故

$$A_0^{-1}y = \pi(A^{-1}y;\theta), \quad y \in R(A).$$

(ii) 充分性　因为 $D(A_0)$ 为线性子空间. $A_0: D(A_0) \to R(A)$ 为 1-1 的，从而 $A_0^{-1}: R(A) \to D(A)$ 为线性算子. 又因 $\pi(R(A);\ \cdot): Y \to R(A)$ 为线性算子，从而由 (i)，$A^+ = A_0^{-1}\pi(R(A);\cdot)$ 为线性算子.

必要性　因为 A^+ 为线性算子，所以 $R(A^+) = D(A) \cap F_X^{-1}(K(A)^{\perp})$，$A^+$ 的值域，为线性子空间，且 $\pi(R(A);\cdot) = AA^+$ 为线性算子.

推论 2.15　若 X, Y 为 Hilbert 空间，A 如定理 2.18，则 A^+ 为线性算子；若 X, Y，A 如定理 2.14 所设，且 $K(A)^{\perp}$ 为 X^* 的一维子空间，$R(A) = Y$，则 A^+ 为线性算子.

3 Moore-Penrose 广义逆在不适定边值问题中的应用

3.1 问题的提出

设 Ω 为 R^n 中具有光滑边界 Γ 的有界区域，讨论下述 Neumann 问题

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) = f(x), & \text{a.e. } x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial v_A} = g(x), & \text{a.e. } x \in \Gamma. \end{cases} \tag{3.1}$$

这里 $f \in L^q(\Omega)\left(\dfrac{2n}{n+2} \leqslant q < \infty\right)$，$g \in L^2(\Gamma), a_{ij} \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$,

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial v_A} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\ \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \cos(\widehat{v, x_i})$$

v 为 Γ 的单位外法向量，$(\widehat{v, x_i})$ 为 v 与 x_i 夹角.

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) t_i t_j \geqslant \alpha |T|^2, \quad T = \{t_i\}_{i=1}^{n} \in R^n, \quad \alpha > 0.$$

设 $1/p + 1/q = 1$，则 $1 < p < 2n/(n-2)$. 由 Sobolev 嵌入定理[16]

$$H^1(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega)\ 且\ L^q(\Omega)\hookrightarrow (H^1(\Omega))^*.$$

对于 $f\in L^q(\Omega), g\in L^2(\Gamma)$，若 $u\in H^1(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\mathrm{d}x=\int_\Omega f(x)v(x)\mathrm{d}x+\int_\Gamma g(x)v(x)\mathrm{d}\sigma, v\in H^1(\Omega)$$

则称 u 为(3.1)的变分解[17]. 此时，u 在分布意义下满足(3.1)，简称 u 为(3.1)的弱解.

因为对 $f\in L^q(\Omega)$，(3.1) 的弱解不一定存在，即使存在，亦不唯一，为此引入下面的定义.

定义 3.1 设 $f\in L^q(\Omega)$，$g=0$，若 $u\in H^1(\Omega)$ 为下面 Neumann 问题的弱解.

$$\begin{cases}-\sum\limits_{i,j=1}^n \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right)=f(x)-\dfrac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x,\ \text{a.e.}\ x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial v_A}=0,\ \text{a.e.}\ x\in\Gamma,\end{cases}\tag{3.2}$$

且满足约束条件

$$\int_\Omega |u(x)|^{p-1}\mathrm{sgn}u(x)\mathrm{d}x=0.\tag{3.2$'$}$$

则称 u 为(3.1)的伪弱解.

3.2 引理

设 $D(A)=\left\{u\in H^1(\Omega)\subset L^p(\Omega);\ Au\in L^q(\Omega),\ \dfrac{\partial u}{\partial v_A}\Big|_\Gamma=0,\ \text{a. e.}\right\}$. 其中 A 与 $\dfrac{\partial}{\partial v_A}$ 在分布意义下满足

$$Au=-\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial v_A}=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\widehat{v,x_i}),\ u\in H^1(\Omega).$$

引理 3.2 (i) A 的值域在 $L^q(\Omega)$ 中闭，且

$$R(A)=\left\{f\in L^q(\Omega);\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x=0\right\},$$

(ii) A 的核 $K(A)=\{u(x)=c;c\in R^1\}$.

证 参见[17]第三章.

引理 3.3 A 为闭稠定线性算子.

证 仅需证 A 的闭性.

设 $\{u_n\}\subset D(A)$，在 $H^1(\Omega)$ 中 $u_n\to u$；$f_n=Au_n\in L^q(\Omega)$，在 $L^q(\Omega)$ 中 $f_n\to f$ $(n\to\infty)$.

因为 $R(A)$ 在 $L_q(\Omega)$ 中闭，故存在 $u_0\in D(A)$，满足

$$\begin{cases}Au_0(x)=f(x),\ 在\ \mathscr{D}'(\Omega)\ 中.\\ \dfrac{\partial u_0(x)}{\partial v_A}=0,\ \text{a.e.}\ x\in\Gamma.\end{cases}$$

对 $w \in C_0^\infty(\Omega)$，由正则性定理，有 $h \in C_0^\infty(\Omega)$，使

$$\begin{cases} Ah(x) = w(x), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial h(x)}{\partial v_A} = 0, & x \in \Gamma. \end{cases}$$

因 $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \cdots)$，且在 $H^1(\Omega)$ 中 $u_n \to u$ $(n \to \infty)$. 两次用 Green 公式，经直接计算，有

$$\int_\Omega u_0(x) w(x) \mathrm{d}x = \int_\Omega u(x) w(x) \mathrm{d}x.$$

因 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^q(\Omega)$ 中稠，故 $u(x) = u_0(x)$，a.e. $x \in \Omega$，于是 $u \in H^1(\Omega)$ 且 $Au = f \in L^q(\Omega)$.

因为在 $H^1(\Omega)$ 中，$u_n \to u$ $(n \to \infty)$，应用迹算子定理[17] $\dfrac{\partial u_n}{\partial v_A} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. 又因为 $u \to \dfrac{\partial u}{\partial v_A}: H^1(\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 是连续的，故在 $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 中 $\dfrac{\partial u_n}{\partial v_A} \to \dfrac{\partial u}{\partial v_A}$ i.e. $\dfrac{\partial u}{\partial v_A} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. 由 $\left.\dfrac{\partial}{\partial v_A}\right|_\Gamma$ 的线性，得 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial v_A}\right|_\Gamma = \left.\dfrac{\partial u_0}{\partial v_A}\right|_\Gamma$，在 $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 中成立. 但 $\left.\dfrac{\partial u_0}{\partial v_A}\right|_\Gamma = 0$，a.e. $x \in \Gamma$，从而 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial v_A}\right|_\Gamma = 0$，a.e. $x \in \Gamma$. i.e. $u \in D(A)$ 且 $f = Au$.

3.3　伪弱解的极小性与适定性

定理 3.4　设 $f \in L^q(\Omega)$，$g = \theta$，则 $u \in H^1(\Omega)$ 为(3.1)的伪弱解当且仅当：

(i) $Au = \pi(R(A); f)$，

(ii) $\|u\|_p = \min\{\|v\|_p; Av = \pi(R(A); f), v \in D(A)\}$.

这里 $\|\cdot\|_p$ 为 $L^p(\Omega)$ 的范数.

证　充分性　由引理 3.2

$$K(A)^\perp = \left\{f \in L^q(\Omega); \int_\Omega f(x)u(x)\mathrm{d}x = 0,\ u \in K(A)\right\}$$
$$= \left\{f \in L^q(\Omega); \int_\Omega f(x)\mathrm{d}x = 0\right\} = R(A). \tag{3.3}$$

若 $u \in D(A)$ 满足 (i) (ii)，由引理 3.3 与定理 2.4，有

$$u = A^+ f \tag{3.4}$$

应用推论 2.8，有 $f_1 \in F_{L^p}^{-1}(R(A)^\perp)$，满足

$$f = \pi(R(A); f) + f_1. \tag{3.5}$$

由引理 3.2

$$f_1 = c_1 \ (c_1 \text{ 为常数}). \tag{3.6}$$

将(3.5)两端在 Ω 上积分，应用引理 3.2，有

$$c_1 = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f(x)\mathrm{d}x. \tag{3.7}$$

从而由 (i)，(3.5)，(3.6) 及 $u \in D(A)$，得

$$
\begin{cases} Au(x) = f(x) - \dfrac{1}{\mu(\Omega)} \displaystyle\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x, \text{ a.e. } x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial v_A} = 0, \text{ a.e. } x \in \Gamma. \end{cases} \tag{3.8}
$$

又由(3.4),用定理 2.10 中相应的证明 (ii) 得 $F_{L^p}(u) \in K(A)^\perp = R(A)$, 从而

$$
\int_\Omega |u(x)|^{p-1}\mathrm{sgn}u(x)\mathrm{d}x = 0.
$$

i.e. u 为(3.1)的伪弱解.

必要性 设 $u \in H^1(\Omega)$ 为(3.1)的伪弱解, 则 $u \in D(A)$, 且 $|u|^{p-1}\mathrm{sgn}u \in R(A) = K(A)^\perp$

由(3.5)—(3.7)及(3.2),知

$$
Au = \pi(R(A); f). \tag{3.9}
$$

对 $v \in D(A)$, $Av = \pi(R(A); f)$ 有 $u - v \in K(A)$,从而由(3.2)′与 Hölder 不等式,得

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x &= \int_\Omega u(x)|u(x)|^{p-1}\mathrm{sgn}u(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega v(x)|u(x)|^{p-1}\mathrm{sgn}u(x)\mathrm{d}x \\
&\leqslant \|v\|_p \left(\int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}
$$

于是

$$
\|u\|_p = \min\{\|v\|_p; Av = \pi(R(A); f)\}.
$$

定理 3.5 (3.1)的伪弱解是适定的.

证 由定理 3.4 及 A^+ 的性质易知结论成立.

参考文献

[1] Locker J. The method of least squares for boundary value problems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1971, **154**: 57—68.

[2] Locker J. On constructing least squares solution to two point boundary value problems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1975, **203**:175--183.

[3] Locker J. The generalized Green's function for an *n*th order linear differential operator. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1977, **228**:243—268.

[4] Locker J. Functional Analysis and Two-Point Differential Operators Longman Scientific & Technical. New York, 1986.

[5] Aubin J.P. Applied Functional Analysis. Wrley-Inter-Science, New York, 1979.

[6] Nashed M.Z. Generalized Inversos and Aplications. Academic press, New York, 1976.

[7] Lions J.L. Remarks on the theory of optimal Control of distributed systems, Control theory of systems governed by partial differential equations Academic press. New York, 1979, 1—104.

[8] Wang YW (王玉文). The generalized inverse operators in Banach spaces. *Bull Pol. Aca. Sci. Math.*, No. 7—12, 433—441.

[9] 王玉文,王辉. Banach 空间中最小范数控制. 系统科学与数学,1991,**11**(1): 1—6.

[10] 王玉文. Orlicz空间中第一类不适定的积分方程. 纯粹数学与应用数学(已排版).

[11] Barbu V. Precpuanu, Th. Converity and Optimization in Banach spaces, Ed. Acad. Rep. Soc. Romania. Bucuresti, 1978.

[12] Diostel J. Geometry of Banach Spaces-Selected Topics. Lect. Math. Springer-Verlag, 1975,

485.
[13] 王玉文，陈述涛．Orlicz 空间中最佳逼近算子．纯粹数学与应用数学，1986.
[14] Aubin JP. H. Frankowska & set-valued analysis, systems and control, Foundations and Applications, Birkhauser, Boston, Basel, Berlin, 1990.
[15] Yosida K. Functional analysis, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.
[16] Adams R.A. Soblev space, Academic Press., New-York, 1975.
[17] Treves F. Basic linear partial differential equations, Academic Press. Inc, 1975.
[18] Nashed M.Z. G.F. Votruba, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1974, **80**: 825—835.
[19] Nashed M.Z. Lecture Notes in Math., Tol, Springer, Berlin, 1979, 180—195.
[20] 马吉溥．关于 $R(A_x)$ 闭的连续算子族 A_x 的 Moore-Penrose 广义逆A_x^+连续的充要条件．中国科学（A），1990，(6)：561—568.
[21] 史树中．凸分析．上海：上海科技出版社，1990.

MOORE-PENROSE GENERALIZED INVERSES IN BANACH SPACE AND ILL-POSED BOUNDARY VALUE PROBLEM

WANG YU-WEN
(*Department of Mathematics Harbin Normal University Harbin* 150080)

LI ZHI-WEI
(*Department of Mathematics Capital Normal University Beijing* 100037)

Abstract In this paper, we assume that X, Y are Banach spaces, $D(A)\subset X$, and $A:D(A)\to Y$ is a closed densely defined linear operator with closed range. We Introduce the Moore-Penrose generalized inverse operator A^+ of A not requiring that the domain of A be decomposable. Different from that proposed by M. Z. Nashed here A^+ is nonlinear in general. By some geometry in the spaces X and Y, we prove the existence-uniqueness, minimum property and continuity of A^+, and give the necessary and sufficient condition for operator A^+ to be linear. Operator A^+ can be applied problems such as solving equation, optimization and control problems etc.

As an application, we discuss a sort of ill-posed boundary value problems in the space $L_p(\Omega)\left(1<p<\dfrac{2n}{n-2}\right)$ with Moore-Penrose generalized inverse A^+.

Key words Moore-Penrose generalized inverse, Banach space, dual mapping, illposed boundary value problem.